# 工程中常用的矩阵计算

## ——理论算法与FORTRAN程序

史明仁　杨中华
陈　志　高旅端　编著

北京工业大学出版社

## 内容简介

本书挑选矩阵计算中有代表性的、最常用的算法，介绍它们的理论依据、算法步骤与计算机程序，使有关矩阵计算的理论、方法与算法语言三者融为一体，对读者在学习矩阵计算的基本理论、常用算法以及使用FORTRAN语言编制计算机程序等方面会大有帮助.

本书介绍的算法主要有求解线性方程组的消去法与矩阵分解法、行列式求值与矩阵求逆、一般实矩阵与实对称矩阵的特征根与特征向量的计算，以及矩阵的广义逆和求解线性与非线性最小二乘问题．本书可作为高校教师、本科生、研究生与工程技术人员讲授或学习矩阵计算的教材，也可作为学习线性代数及其计算方法与算法语言的参考书.


**工程中常用的矩阵计算**

**——理论、算法与FORTRAN程序**

史明仁等　编著

*

北京工业大学出版社出版发行

各 地 新 华 书 店 经 销

北京通县燕山印刷厂印刷

*

1991年3月第1版　1991年3月第1次印刷

787×1092毫米　16开本　21.875印张　544千字

印数：1～3 000册

ISBN7-5639-0126-4/O·7

定价：8.70元

# 前　言

随着计算机技术的迅速发展，科学与工程计算的应用范围已扩大到所有的学科领域．实验、理论、科学计算已三足鼎立，相辅相成，成为人类科学活动的三大方法．

矩阵计算是科学计算中最常用、最基本的部分．作者在多次为高校工科教师与科技工作者讲解《常用算法》[1]的基础上，将讲稿经充实整理，编成此书，希望对读者在掌握矩阵计算的基本理论与常用算法，以及学会用FORTRAN语言编制程序方面有所帮助．

我国各高校在文革以后才开设线性代数与计算方法课，其中的基本理论与算法不能满足科学与工程计算的需要．我们正是针对这一情况，选择矩阵计算中有代表性的、最常用的算法，介绍它们的理论依据、算法概要与计算机程序，使有关矩阵计算的理论、方法及算法语言三者融为一体．

本书的理论基本上是自满足的，不需要读者另外参看其它线性代数或计算方法的参考书，这样便于读者自学．其中的算法采用介于程序与计算公式之间的语言来描述，以帮助读者学会如何把计算公式"翻译"为计算机程序．其中的子程序用FORTRAN-77语言编制，并在IBM-PC微型计算机上试算通过．程序中有许多中文说明，使读者便于阅读．我们编制程序时，着重考虑程序的易读性，而不过分追求节省工作单元的技巧，考虑到FORTRAN语言的发展趋势，我们在编制程序时尽量少使用GOTO语句，不使用IF算术语句，不使用赋值语句作为循环终端语句（均以CONTINUE语句结尾）等等．另外，为防止由于校对疏漏而造成程序的印刷错误，程序部分（包括通用子程序、计算实例的主程序与计算结果）由计算机打印，然后胶版印刷，附于书的末尾部分．

书中有少量的有关算法的问题，希望读者认真解答并编制程序，在计算机上试算验证，不要急于去看习题参考答案．每个算法后的计算实例也请读者先编制主程序试算，然后与书中所附的主程序与计算结果核对，这样才有收获．

限于作者的理论水平与实算经验，特别是算法的写法属于新的尝试，错漏之处定然不少，希冀广大读者与师长、同行的批评指正．

谨向指导、帮助本书编写工作的邓乃扬教授与诸梅芳教授表示衷心的谢意．

作　者

1990年6月于北京工业大学应用数学系

# 目　录

# 附录 FORTRAN-77源程序部分

# 第一章　矩阵与向量

## §1　矩阵的定义及其线性运算

### 1·1　矩阵的定义

**定义1·1·1**　由$m\times n$个元素，排成$m$行、$n$列的矩形表（或矩形阵列）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1·1·1}$$

称为一个$m\times n$矩阵，用大写拉丁字母表示矩阵．例如用$A$表示(1·1·1)所示矩阵，$m\times n$称为矩阵$A$的阶．

位于矩阵$A$第$i$行、第$j$列的元素(以后简称为（$i,j$）元素)记为$a_{ij}$（习惯上用与矩阵记号所对应的小写拉丁字母表示，例矩阵$B$的（$i,j$）位置上的元素记为$b_{ij}$），其中$i$是行序号（行下标），$j$是列序号（列下标）.矩阵的元素可以是实数或复数，这时的矩阵分别称为实矩阵或复矩阵，其元素也可以是多项式或其它函数表达式等等．

以$a_{ij}$为元素的$m\times n$矩阵$A$，简记为$A=[a_{ij}]_{m\times n}$．$m=n$时，称$A$为$n$阶方阵，元素$a_{ii}$（行序号等于列序号）$i=1,2,\cdots,n$，称为$A$的主对角元．

**例1·1·2**　$\mathrm{i}$为虚数单位，即$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} & -2 \\ 1+\mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ -2 & \mathrm{i} & 5 \end{pmatrix} \tag{1·1·2}$$

则$A$为$2\times 4$实矩阵，$a_{12}=a_{23}=2$；而$B$为3阶复方阵，$b_{32}=\mathrm{i}$．

在解多变量问题时，矩阵是强有力的数学工具．

**例1·1·3**　已知$m$个方程，$n$个未知量（记为$x_1,x_2,\cdots,x_n$）的多元一次方程组——今后称为线性方程组（第$i$个方程中的第$j$个未知量$x_j$的系数记为$a_{ij}$）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1·1·3}$$

它的$m\times n$个系数可排成(1·1·1)所示的$m\times n$数表，它即为矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，称为线性方程组（1·1·3）的系数矩阵．

(1·1·3)的未知量，以及它的右端常数项也可以分别构成$n\times 1$矩阵$\boldsymbol{X}$与$m\times 1$矩阵$B$：

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\tag{1·1·4}$$

线性方程组(1·1·3)的未知量采用什么记号不会影响它的解，重要的是它的系数矩阵与它的常数项各是什么．把一列常数项加入到系数矩阵$A$中（作为最后一列），可得到以下的$m\times(n+1)$矩阵：

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}\tag{1·1·5}$$

$\tilde{A}$称为线性方程组的增广矩阵．一旦$\tilde{A}$确定以后，以$\tilde{A}$为增广矩阵的线性方程组也就唯一确定．增广矩阵(1·1·5)可简记为

$$\tilde{A}=[A,B]\tag{1·1·5$'$}$$

**例1·1·4** 有$m$个以$x_1,x_2,\cdots,x_n$为自变量的多元函数

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,m)\tag{1·1·6}$$

若令矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$的元素$a_{ij}=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$，则

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\tag{1·1·7}$$

称为这$m$个多元函数的Jacobi矩阵，它在多个多元函数的问题中起重要作用．

### 1·2 矩阵的相等与一元运算

**定义1·1·5** 两个矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{k\times t}$的行数、列数分别相等：$m=k$，$n=t$；并且对应元素都相等：$a_{ij}=b_{ij}$，对$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$都成立时，称这两个矩阵相等，记为$A=B$．

两张栏目完全相同，且各项数据全对应相等的报表，是两个矩阵相等的一个实例．

下面介绍矩阵的一元运算，即一个矩阵的自身运算．

**定义1·1·6** 对换矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$的行与列，得到的$n\times m$矩阵，称为$A$的转置矩阵，记为$A^T$，即$A$的$(j,\ i)$元素是$A^T$的$(i,\ j)$元素．当记$A^T=[a'_{ij}]_{n\times m}$时，则有

$$a'_{ij}=a_{ji}\quad(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)\tag{1·1·8}$$

由$A$得到$A^T$，相当于把一张报表的行栏目与列栏目对换而得到的另一张报表．

**例1·1·7** (1·1·2)中的矩阵$A$与$B$的转置矩阵分别为

$$A^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\\0&2\\-1&0\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}1&1+i&-2\\1-i&-1&i\\-2&-i&5\end{pmatrix}$$

**定义1·1·8** 矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$的每一个元素取其共轭复数后得到的$m\times n$矩阵称为$A$的共轭矩阵，记为$\overline{A}$；$A$的共轭矩阵的转置矩阵($n\times m$阶)称为$A$的共轭转置矩阵，它等于$A$先转置后取共轭，记为$A^H$，即

$$A^H=(\overline{A})^T=\overline{A^T} \tag{1·1·9}$$

由定义即可得以下结论.

**定理1·1·9** 当且仅当$A$为实矩阵时，$\overline{A}=A$.

**例1·1·10** $A$、$B$由(1·1·2)所示，则

$$\overline{A}=A,\quad A^H=(\overline{A})^T=A^T$$

$$B^H=(\overline{B})^T=B$$

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1&1+i&-2\\1-i&-1&i\\-2&-i&5\end{pmatrix}$$

## 1·3 矩阵的线性运算

下面介绍矩阵的两种线性运算：加减与数乘矩阵.

**定义1·1·11** 已知两个$m\times n$矩阵$A=[a_{ij}]$、$B=[b_{ij}]$，若$m\times n$矩阵$C=[c_{ij}]$的元素$c_{ij}$由

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ \ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \tag{1·1·10}$$

给出，则称$C$为$A$与$B$的和，记作$C=A+B$.

矩阵$A$与$B$要相加，它们的行数与列数必须分别相等. $A+B$表示它们的对应元素相加. 两张栏目完全相同的报表汇总是矩阵加法的一个实例.

**定义1·1·12** （1）矩阵$B=[b_{ij}]_{m\times n}$的每个元素取相反数，得到的矩阵称为$B$的负矩阵，记为$-B$，即$-B$的$(i,\ j)$元素为$-b_{ij}$.

（2）两个$m\times n$矩阵的差$A-B$定义为$A+(-B)$，也就是$A$、$B$矩阵对应元素之差，所以若$D=A-B=[d_{ij}]_{m\times n}$时，

$$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\ \ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \tag{1·1·11}$$

**例1·1·13** 已知(其中$i=\sqrt{-1}$)

$$A=\begin{pmatrix}4&-5+i&2i\\-i&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-6+2i&3&1-i\\0&i&-2\end{pmatrix}$$

则

$$A+B=\begin{pmatrix}-2+2i&-2+i&1+i\\-i&-1+i&-2\end{pmatrix},\quad -B=\begin{pmatrix}6-2i&-3&-1+i\\0&-i&2\end{pmatrix}$$

$$A-B=A+(-B)=\begin{pmatrix}10-2i&-8+i&-1+3i\\-i&-1-i&2\end{pmatrix}$$

**定义1·1·14** 已知$m\times n$矩阵$A=[a_{ij}]$与数（实数或复数）$\lambda$，则$m\times n$矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为$\lambda$与$A$的数量乘积，记为$\lambda A$或$A\lambda$. 也就是说，以数$\lambda$乘以矩阵$A$，就是把$A$的每个元素都乘以$\lambda$.

当有$\lambda$张（$\lambda$是正整数）完全相同的报表汇总时，可用矩阵的数乘运算来实现.

矩阵的加减运算与数乘运算统称为线性运算. 由矩阵的线性运算定义，可以把一个复矩阵$A$表示为$P+iQ$的形式，其中$P$与$Q$均为实矩阵，它们分别为$A$的每个元素的实部与虚部系数所成的矩阵，称为$A$的实部与虚部. 也就是说，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，而$a_{ij}=\alpha_{ij}+i\beta_{ij}$，则$A=P+iQ$，其中$P=[\alpha_{ij}]_{m\times n}$，$Q=[\beta_{ij}]_{m\times n}$.

**例1·1·15**

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -5+i & 2i \\ -i & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1\cdot1\cdot12)$$

**定义1·1·16** 元素全部为零的$m\times n$矩阵称为$m\times n$零矩阵，记为$O_{m\times n}$. 在不致于混淆的情况下，简记为$O$.

矩阵的线性运算具有以下规则.

**定理1·1·17** 已知$A$，$B$，$C$为$m\times n$矩阵，$\lambda$，$\mu$为数，则

（1）$A+B=B+A$.（加法交换律）

（2）$(A+B)+C=A+(B+C)$.（加法结合律）由此，3个矩阵相加可以记为$A+B+C$.

（3）$A+O=O+A$.

（4）$A+(-A)=O$.

（5）$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.（矩阵对数的分配律）

（6）$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.（数对矩阵的分配律）

（7）$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.（数的结合律）

（8）$1\cdot A=A$.

（9）若$\lambda A=O$，则$\lambda=0$或$A=O$两者必居其一.

（10）$\overline{(A+B)}=\bar{A}+\bar{B}$，$(A+B)^T=A^T+B^T$，$(A+B)^H=A^H+B^H$；
$\overline{(\lambda A)}=\bar{\lambda}\bar{A}$，$(\lambda A)^H=\bar{\lambda}A^H$.

以上性质均可用定义来验证.

由矩阵的线性运算规则，两个复矩阵$A$与$B$的加减，可用实矩阵来实现，就象两个复数加减等于它们的实、虚部分别加减一样. 例如$A$与$B$分别按例1·1·15的方法写为$A=P+iQ$，$B=R+iS$，其中$P,Q,R,S$均为实矩阵，则$A\pm B=(P\pm R)+i(Q\pm S)$.

## §2 矩阵的乘法

### 2·1 矩阵乘法的定义与例子

**定义1·2·1** 已知矩阵$A=[a_{ik}]_{m\times n}$，$B=[b_{kj}]_{n\times l}$，作矩阵$C=[c_{ij}]_{m\times l}$，使

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,l) \qquad (1\cdot2\cdot1)$$

则矩阵$C$称为$A$左乘$B$（或$B$右乘$A$）的乘积，记为$C=AB$.

注意两个矩阵要相乘，左边矩阵$A$的列数必须等于右边矩阵$B$的行数．而乘积$C$的行数等于左边矩阵的行数，列数等于右边矩阵的列数，可简单记忆为

$$(m\times \overset{\frown}{n)(n}\times l)=m\times l$$

而求$C=AB$的元素$c_{ij}$时，可划出$A$的第$i$行与$B$的第$j$列，把它们的对应元素分别相乘，然后相加．例如，$3\times4$矩阵$A$左乘$4\times4$矩阵$B$时，乘积$C$的$(2,3)$元素$c_{23}$可图示为

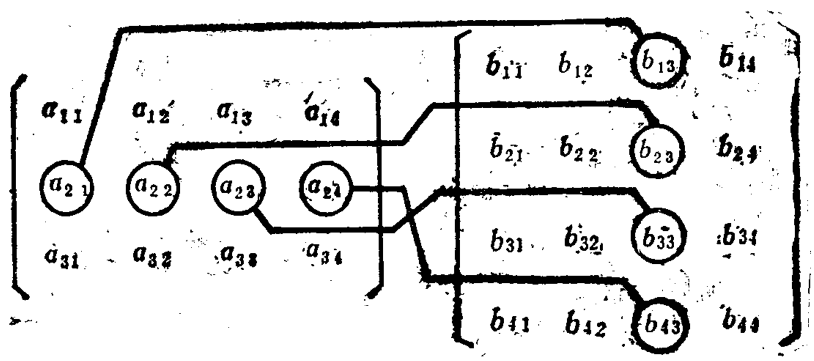


图 1-2-1

$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}+a_{24}b_{43}$$

**例1·2·2** 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&4&-6&3\\-2&5&0&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&15\\3&-1\\0&-2\\2&4\end{pmatrix}$$

则

$AB=$

$$\begin{pmatrix}1\times(-1)+0\times3+2\times0+(-1)\times2 & 1\times15+0\times(-1)+2\times(-2)+(-1)\times4\\ 0\times(-1)+4\times3+(-6)\times0+3\times2 & 0\times15+4\times(-1)+(-6)\times(-2)+3\times4\\ (-2)\times(-1)+5\times3+0\times0+(-3)\times2 & (-2)\times15+5\times(-1)+0\times(-2)+(-3)\times4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&7\\18&20\\11&-47\end{pmatrix}$$

而$BA$无意义，因为$B$的列数$\neq A$的行数.

**例1·2·3** 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$$

上面的例子说明矩阵乘法与数的乘法有两个重要区别：

（1）当$AB$有意义时，$BA$不一定有意义，即使都有意义，矩阵的乘法一般不具有交换律，即一般$AB \neq BA$. 因此，不能笼统地说"$A$、$B$相乘"，而应说明是$A$"左乘"$B$，还是$A$"右乘"$B$.

（2）两个非零矩阵$A$与$B$的乘积$AB$可能是零矩阵．也就是说，在矩阵乘法中从$AB=O$一般不能推出"$A=O$或$B=O$，两者必居其一"的结论.

矩阵的普通乘法不定义为两个矩阵的对应元素相乘（尽管这种定义自然得多，并且此时乘法交换律也会成立），而由(1·2·1)式来定义，这使得矩阵这一工具在实际应用中发挥了巨大的作用.

**例1·2·4** 当我们把线性方程组(1·1·3)的系数、未知量与常数项分别用$m\times n$矩阵$A$、$n\times 1$矩阵$X$与$m\times 1$矩阵$B$表示后，则$A$左乘$X$的乘积为

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{1·2·2}$$

$AX$与$B$均为$m\times 1$矩阵，而(1·1·3)的$m$个等式表明$AX$与$B$的元素对应相等，按照矩阵相等的定义1·1·5有

$$AX=B \tag{1·2·3}$$

这就是线性方程组的矩阵形式，它的样子与一元一次方程$ax=b$相似.

**例1·2·5** 平面解析几何中的坐标旋转变换为

$$\begin{cases} x=\cos\theta\cdot x'-\sin\theta\cdot y' \\ y=\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y' \end{cases} \tag{1·2·4}$$

分别作矩阵

$$Z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\qquad Z'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1·2·5}$$

按照矩阵乘法与相等的定义，可得

$$Z=UZ' \tag{1·2·6}$$

矩阵$U$称为变换(1·2·4)的系数矩阵（简称变换矩阵）.

2·2 矩阵乘法的运算规则

矩阵乘法尽管与数的乘法有重要区别，但它的运算规则与数的乘法也有很多相似之处．下面先给出一种简单而重要的矩阵.

**定义1·2·6** 主对角元全为1，其余元素全为零的$n$阶方阵，称为$n$阶单位阵，记为$I_n$. 在不致混淆的情况下，记为$I$，即

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1·2·7}$$

**定理1·2·7** 设以下各矩阵的阶数使得相应的加法或乘法相容（即有意义），$\lambda$为数，则

（1）$(AB)C=A(BC)$，（乘法结合律） 这样，三矩阵相乘可记为$ABC$.

（2）$A(B+C)=AB+AC$；$(B+C)A=BA+CA$.（乘法对加法分配律）

（3）$A$为$m\times n$矩阵，则

$$AI_n=A,\ I_mA=A$$

若$A$为$n$阶方阵，则

$$AI=IA=A$$

（单位阵在矩阵乘法中作用，与数1在数的乘法中的作用相同）.

（4）$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.

（5）$(A_1A_2\cdots A_k)^T=A_k^T\cdots A_2^TA_1^T$（转置的反向规则）

$\overline{A_1A_2\cdots A_k}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_k$

$(A_1A_2\cdots A_k)^H=A_k^H\cdots A_2^HA_1^H$（共轭转置的反向规则）

**证明**：仅证（1）与（5）中"转置的反向规则".

（1）设$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{jk}]_{n\times s}$，$C=[c_{kl}]_{s\times t}$，令

$$U=BC=[u_{jl}]_{n\times t},\quad V=AB=[v_{ik}]_{m\times s}$$

则由乘法公式(1·2·1)，可得

$$u_{jl}=\sum_{k=1}^{s}b_{jk}c_{kl}\quad(j=1,2,\cdots,n;\ l=1,2,\cdots,t)$$

$$v_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,s)\tag{1·2·8}$$

因此$A(BC)=AU$的$(i,l)$元素为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_{jl}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{s}b_{jk}c_{kl}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}a_{ij}b_{jk}c_{kl}\tag{1·2·9}$$

而$(AB)C=VC$的$(i,l)$元素为

$$\sum_{k=1}^{s}v_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}\tag{1·2·10}$$

因双重连加号可交换次序，因此(1·2·9)式与(1·2·10)式的右端相等，从而$A(BC)$与$(AB)C$的任何$(i,l)$元素都相等，这就证明了$A(BC)=(AB)C$.

（5）只对两个矩阵的情况证明，即$(AB)^T=B^TA^T$，多个矩阵乘积转置的反向规则可由归纳法与结合律推出.

设$A=[a_{ik}]_{m\times n}$，$B=[b_{kj}]_{n\times s}$，$A^T=[a'_{ki}]_{n\times m}$，$B^T=[b'_{jk}]_{s\times n}$. 由乘法公式(1·2·1)及转置公式(1·1·8)可知$(AB)^T$的$(j,i)$元素，即$AB$的$(i,j)$元素等于

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

而$B^TA^T$的$(j,i)$元素为

$$\sum_{k=1}^{n}b'_{jk}a'_{ki}=\sum_{k=1}^{n}b_{kj}a_{ik}$$

因此$(AB)^T=B^TA^T$. 定理证毕.

由于矩阵乘法满足结合律，所以可定义方阵的乘幂：$n$阶方阵$A$的$k$（正整数）次幂定义

为$k$个$A$连乘，记为$A^k$，则它满足以下运算规则：

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}$$
$$(A^k)^l = A^{kl} \tag{1·2·11}$$

其中$k$、$l$为正整数．但要注意，由于矩阵乘法一般不满足交换律，所以一般来说，$(AB)^k \neq A^k B^k$．例如，$(AB)^2 = ABAB \neq AABB = A^2B^2$．

另外要指出，消去律在矩阵乘法中一般也不成立，即从 $AB=AC$与$A\neq O$ 不能推出 $B=C$．因为从$AB=AC$及分配律知 $A(B-C)=O$，但由此式与 $A\neq O$ 不能推出 $B-C=O$，即$B=C$．

最后我们给出几种特殊矩阵的定义．

**定义1·2·8** 若$n$阶方阵$A=[a_{ij}]$除主对角线及其右上部分元素外，其余元素为0（$i>j$时，$a_{ij}=0$），即$A$形为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1·2·12}$$

则称$A$为上三角矩阵．$A^T$称为下三角矩阵．主对角元全为1的上（下）三角矩阵称为单位上（下）三角矩阵．

若$n$阶方阵$B$，除主对角元以外，其它元素全为零，即$B$形为

$$B=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1·2·13}$$

则称$B$为对角矩阵，并简记(1·2·13)式为

$$B=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{1·2·14}$$

我们容易验证以下结论成立．

**定理1·2·9** （单位）上三角矩阵的乘积仍为（单位）上三角矩阵；(单位)下三角矩阵的乘积仍为(单位)下三角矩阵；对角矩阵的乘积仍为对角矩阵．

当$k$为正整数时，

$$[\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)]^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k) \tag{1·2·15}$$

### 2·3 乘法运算规则的应用举例

正确地应用矩阵乘法运算规则，不仅在理论推导，而且在矩阵的数值计算中十分重要．特别是结合律的应用，因为乘法的计算顺序具有举足轻重的作用．

**例1·2·10** 计算$ABC$，其中$A$、$B$均为100阶方阵，而$C$为100×1矩阵，应如何按排计算次序？

**解**：若先计算 $V=AB$，则计算$V$的每个元素要作100次乘法(加减法运算速度很快,我们不去考虑)，$V$共$10^4$个元素，共需作$10^6$次乘法；再算$VC$，计算它的每个元素要作 100 次乘法，共100个元素要作$10^4$次乘法．$(AB)C$这种方案总计作($10^6+10^4$)次乘法．

方案二是先算$U=BC$，再求$AU=A(BC)$．由上面分析可知，总共只需作 2 000次乘法．不仅节省计算时间，更重要的是减少舍入误差的积累，所以在编制程序前，应事先作一番分

析.

**例1·2·11** 如何应用矩阵的线性运算的规则把两个复矩阵$A$与$B$的乘法用实矩阵的乘法来实现.

**解**：由例1·1·15知$A$、$B$均可表为$A=P+iQ$，$B=R+iS$，其中$P,Q,R,S$均为实矩阵，$i=\sqrt{-1}$，从而由运算规则

$$\begin{aligned}AB&=(P+iQ)(R+iS)=PR+iPS+iQR+(-1)QS\\&=(PR-QS)+i(PS+QR)\end{aligned}\tag{1·2·16}$$

这与两个复数的乘法规则类似，只是这里要注意，因为是$A$左乘$B$,因此化为实矩阵运算时，凡出现两个实矩阵相乘时，$A$的实、虚部均在左边.

## §3 矩阵乘法的几种算法

### 3·1 矩阵的存贮形式

矩阵在计算机中可以用二维数组存贮，也可以用一维数组来存贮. 用二维数组来存贮时，其格式与矩阵的自然格式一致. 维数语句

DIMENSION　　A(M,N)

表示实矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$以二维实数组形式存贮. $M$、$N$分别与$A$的行数、列数对应.

数组元素

$$A(2,3)$$

表示矩阵$A$的元素$a_{23}$.

实矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$也可以用有$m\times n$个元素的一维实数组来存贮. 若用整型变量$MN$来表示$m\times n$时，它的维数语句为

DIMENSION　　A(M,N)

此时，如果按行序存贮矩阵$A$时（即先依次存放$A$的第1行元素，接着依次存放$A$的第2行元素，…，最后依次存放$A$的第$m$行元素），则数组元素

$$A(N*(I-1)+J)\text{或}A(N*I+J-N)$$

表示矩阵$A$的元素$a_{ij}$. 这是因为矩阵$A$每行有$n$个元素，所以$A$的第$i$行、第$j$列元素应为数组$A$的第

$$n(i-1)+j=ni+j-n\tag{1·3·1}$$

个元素，即

$$\begin{aligned}\text{数组下标值}&=\text{列数}\times(\text{行序号}-1)+\text{列序号}\\&=\text{列数}\times\text{行序号}+\text{列序数}-\text{列数}\end{aligned}\tag{1·3·1$'$}$$

一维数组存贮矩阵，常可产生比二维数组存贮矩阵更为有效的程序.

### 3·2 矩阵乘法的几种算法

下面介绍3种关于矩阵乘法的算法：

（1）以二维数组存贮的实矩阵乘法；

（2）以一维数组存贮的实矩阵乘法；

（3）同时计算行元素的实矩阵乘法.

**一、算法1-1** 用二维数组存贮的实矩阵乘法.

1．算法

已知实矩阵$A=[a_{ik}]_{m\times n}$、$B=[b_{kj}]_{n\times l}$，求$C=AB=[c_{ij}]_{m\times l}$，则$c_{ij}$的计算公式为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,l)$$

把它写成一种介于“公式语言”与“程序语言”之间的算法：

1）对$i=1,2,\cdots,m$执行

1·1）对$j=1,2,\cdots,l$执行

$$c_{ij}\leftarrow\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\tag{1·3·2}$$

它对应到程序中即为：$I$是第1层外循环的循环变量，其初值为1，终值为$M$，步长为1；$J$是第二层循环的循环变量，初值为1，终值为$L$，步长为1．而和式$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，通常也用循环语句来实现，$K$为循环变量，初值为1，终值为$N$，步长为1．因此容易写出它的通用子程序．

2．程序说明

（1）子程序语句

SUBROUTINE　MULTI2 (A,B,C,M,N,L)

（2）哑元说明

A,B,C　分别为M×N，N×L，M×L个元素的二维实数组．A、B为输入参数，C为输出参数．

M,N,L　输入参数、整型变量．M为矩阵A与C的行数，N为矩阵A的列数与矩阵B的行数，L为矩阵B、C的列数．

二、**算法1-2**　用一维数组存贮的实矩阵乘法（按行序存贮矩阵）．

1．算法

它与算法1-1的差别仅在于需要根据(1·3·1)′计算(1·2·1)式中$a_{ik}$、$b_{kj}$、$c_{ij}$的下标值．它们分别为

$$\begin{cases}i_p=n\cdot(i-1)\\ ka=i_p+k\end{cases}$$
$$kb=l\cdot(k-1)+j$$
$$kc=l\cdot(i-1)+j\tag{1.3.3}$$

因此，算法应为

0）按行输入矩阵$A$和$B$，均用一维数组存贮．

1）对$i=1,2,\cdots,m$执行

1·1）对$j=1,2,\cdots,l$执行

$$c_{kc}\leftarrow\sum_{k=1}^{n}a_{ka}\cdot b_{kb}\tag{1·3·4}$$

2．程序说明

（1）子程序语句

SUBROUTINE　MULTI1 (A,B,C,MN,NL,ML,M,N,L)

（2）哑元说明