HZ BOOKS
华章教育

全国研究生入学考试数学复习指导丛书

概率论与数理统计

历年真题详解与考点分析

姚孟臣 编著

数学

机械工业出版社
China Machine Press

全国研究生入学考试数学复习指导丛书

概率论与数理统计

历年真题详解与考点分析

姚孟臣 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计：历年真题详解与考点分析/姚孟臣编著. —北京：机械工业出版社，2002.4
(全国研究生入学考试数学复习指导丛书)
ISBN 7-111-10056-5

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料 ②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第013483号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码100037)
责任编辑：马海宽
北京忠信诚胶印厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2002年4月第1版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 17.25印张
定 价：26.00元

出 版 前 言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共 16 本将陆序面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士研究生的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士研究生的考生开

拓思路,更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法,培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心,以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们,感谢他们付出的辛勤劳动。同时,欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002 年 3 月

目 录

第一章　随机事件和概率

一、重点内容简介

1.1　样本空间与随机事件

1. 随机现象及其统计规律性

在一定条件下,具有多种可能发生的结果的现象称为**随机现象**.这类现象的一个共同点是:事先不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种.

一般来说,随机现象具有两重性:表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性.随机现象的偶然性又称为它的**随机性**.在一次实验或观察中,结果的不确定性就是随机现象随机性的一面;在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面,称随机现象的必然性为**统计规律性**.

2. 随机试验与随机事件

如果一个试验满足下面的两个条件:

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 试验都有哪些可能的结果是明确的,但每次试验的具体结果在试验前是无法得知的,那么我们就称它是一个**随机试验**,以后简称为**试验**.一般用字母 E 表示.

在随机试验中,每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**,用 ω 表示;而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**,记为 Ω.

有了样本空间的概念,我们就可以来描述随机事件了.所谓**随机事件**是样本空间 Ω 的一个子集,随机事件简称为**事件**,用字母 A,B,C 等表示.因此,某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生,记为 $\omega\in A$.

这里需要特别指出的是,我们把样本空间 Ω 也作为一个事件.因为在每次试验中,必定有 Ω 中的某个样本点发生,即事件 Ω 在每次试验中必定发生,所以 Ω 是一个必定发生的事件.在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**,记作 Ω.类似地,我们把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 也作为一个事件.显然它在每次试验中都不发生.所以 $\varnothing$ 是一个不可能发生的事件.在每次试验中必定不会发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$.我们知道,必然事件 Ω 与不可能事

件$\varnothing$都不是随机事件.因为作为试验的结果,它们都是确定性的,并不具有随机性.但是为了今后讨论问题方便,我们也将它们当作随机事件来处理.

1.2 事件之间的关系与运算

1. 事件的包含关系与等价关系

设A,B为两个事件.如果A中的每一个样本点都属于B,那么称事件B**包含**事件A,或称事件A包含于事件B,记为$A\subset B$或$B\supset A$.这就是说,在一次试验中,如果事件A发生必然导致事件B发生.

如果$A\supset B$与$B\supset A$同时成立,那么称事件A与事件B**等价**或**相等**,记为$A=B$.这就是说,在一次试验中,等价的两个事件同时发生或同时不发生,因此可以把它们看成是一样的.

2. 事件的并与交

设A,B为两个事件.我们把至少属于A或B中一个的所有样本点构成的集合称为事件A与B的**并**或**和**,记为$A\cup B$或$A+B$.这就是说,事件$A\cup B$表示在一次试验中,事件A与B至少有一个发生.

设A,B为两个事件.我们把同时属于A及B的所有样本点构成的集合称为事件A与B的**交**或**积**,记为$A\cap B$或$A\cdot B$,有时也简记为AB.这就是说,事件$A\cap B$表示在一次试验中,事件A与B同时发生.

3. 事件的互不相容关系与事件的逆

设A,B为两个事件.如果$A\cdot B=\varnothing$,那么称事件A与B是**互不相容**的(或**互斥**的).这就是说,在一次试验中事件A与事件B不可能同时发生.

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形.即,如果$A_i\cdot A_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,这时我们称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$是**互不相容**的(或**互斥**的).

对于事件A,我们把不包含在A中的所有样本点构成的集合称为事件A的**逆**(或A的**对立事件**),记为$\bar{A}$.这就是说,事件$\bar{A}$表示在一次试验中事件A不发生.我们规定它是事件的基本运算之一.

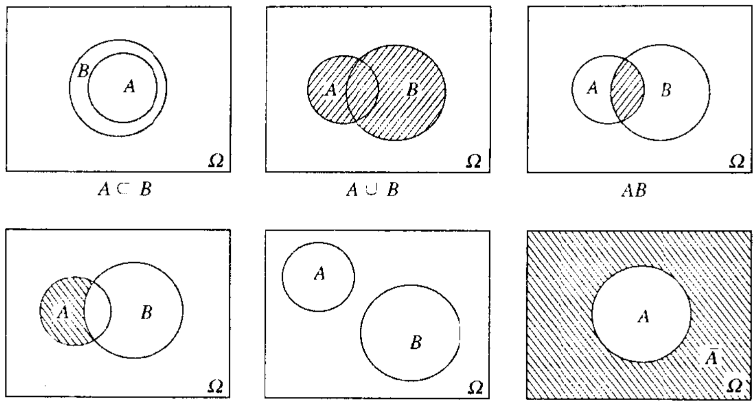
在一次试验中,事件A与$\bar{A}$不会同时发生(即$A\cdot\bar{A}=\varnothing$,称它们具有**互斥性**),而且$A$与$\bar{A}$至少有一个发生(即$A+\bar{A}=\Omega$,称它们具有**完全性**).这就是说,事件$A$与$\bar{A}$满足:

$$\begin{cases}A\cdot\bar{A}=\varnothing,\\A+\bar{A}=\Omega.\end{cases}$$

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其他一些运算.例如,我们称事件$A\bar{B}$为事件A与B的**差**,记为$A-B$.可见,事件$A-B$是由包含于A而不包含于B的所有样本点构成的

集合.

事件的关系和运算如图 1-1 所示.



$A\subset B$　　$A\cup B$　　AB

$A-B$　　AB互不相容　　$\bar{A}$

图 1-1

事件的运算满足下列规则:

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 德摩根律: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

德摩根律可以推广到任意多个事件的场合.

1.3　概率的定义与性质

1. 概率的公理化定义

定义　设 E 是一个随机试验, Ω 为它的样本空间, 以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域, 定义一个函数 $P(A)$(其中 A 为任一随机事件), 且 $P(A)$满足以下三条公理. 则称函数 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

公理 1　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2　$P(\Omega)=1$.

公理 3 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

2. 概率的统计定义

定义 在一组不变的条件 S 下，独立地重复作 n 次试验. 设 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数，当试验次数 n 很大时，如果 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动；而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的**概率**. 记作

$$P(A) = p.$$

1.4 古典概型

我们把具有特性：

1) 试验的结果是有限个；

2) 每个结果出现的可能性是相同的

随机试验称为**古典概型随机试验**，就是说，在我们所讨论的基本事件空间 Ω 中，基本事件 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 是有限个，并且 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n)$.

定义 设古典概型随机试验的基本事件空间由 n 个基本事件组成，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. 如果事件 A 是由上述 n 个事件中的 m 个组成，则称事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1-1}$$

所谓**古典概型**就是利用关系式(1-1)来讨论事件发生的概率的数学模型.

1.5 几何概型

我们把具有特性：

1) 试验的结果是无限且不可列的；

2) 每个结果出现的可能性是均匀的

随机试验称为**几何型随机试验**. 在几何型随机试验中，我们是通过几何度量(长度、面积、体积等)来计算事件出现的可能性.

定义 设 E 为几何型的随机试验，其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区

域来描述，而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件，则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}, \tag{1-2}$$

其中 $L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别为 Ω 与 A 的**几何度量**.

所谓**几何概型**就是利用关系式(1-2)来讨论事件发生的概率的数学模型.

注意，上述事件 A 的概率 $P(A)$ 只与 $L(A)$ 有关，而与 $L(A)$ 对应区域的位置及形状无关.

1.6　概率基本性质的应用

由概率公理化定义中的三条公理可以推导出概率的一些基本性质

性质 1（有限可加性）　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 2（加法公式）　设 A,B 为任意两个随机事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

上面的加法公式可以推广到有限多个事件的情况，例如对于三个事件 A_1,A_2,A_3，我们有

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)=&P(A_1)+P(A_2)\\&+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)\\&+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

性质 3　设 A 为任意随机事件，则

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

性质 4　设 A,B 为两个任意的随机事件，若 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由于 $P(B-A)\geqslant 0$，根据性质 4 可以推得，当 $A\subset B$ 时，

$$P(A)\leqslant P(B).$$

1.7　条件概率与概率的乘法公式

1. 条件概率

前面我们所讨论的事件 B 的概率 $P_S(B)$，都是指在一组不变条件 S 下事件 B 发生的概率

(但是为了叙述简练,一般不再提及条件组 S,而把 $P_S(B)$简记为 $P(B)$).在实际问题中,除了考虑概率 $P_S(B)$外,有时还需要考虑“在事件 A 已发生”这一附加条件下,事件 B 发生的概率.与前者相区别,称后者为**条件概率**,记作 $P(B|A)$,读作在 A 发生的条件下事件 B 的概率.

在一般情况下,如果 A、B 是条件 S 下的两个随机事件,且 $P(A)\neq 0$.则在 A 发生的前提下 B 发生的概率(即条件概率)为

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

2. 概率的乘法公式

定理 两个事件 A 与 B 的积的概率等于事件 A 的概率乘以在 A 发生的前提下 B 发生的概率.即

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)\ (P(A)>0).$$

同理有

$$P(AB)=P(B)P(A \mid B)\ (P(B)>0).$$

上述的计算公式可以推广到有限多个事件的情形,例如对于三个事件 A_1,A_2,A_3(若 $P(A_1)>0,P(A_1A_2)>0$)有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2).$$

1.8 全概公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

定理 如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$;

2) $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,

则对任一事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B \mid A_i).$$

称之为**全概率公式**,见图 1-2.

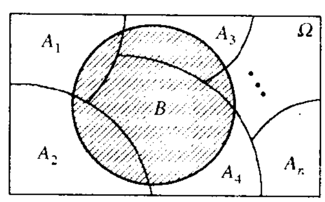


图 1-2

全概率公式是概率的加法公式和乘法公式的综合.利用这个公式可以从较简单事件的概率推算出复杂事件的概率.即把复杂事件分解成简单事件之和的形式.只要求出互不相容的事件 BA_i 的概率$(i=1,2,\cdots,n)$,就可以得到事件 B 的概率.通常我们把满足定

理的条件1),2)的事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$称为**完备事件组**.运用全概率公式的关键在于找出这个完备事件组,我们看下面的例子.

2. 贝叶斯公式

定理 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是某一随机试验的一个完备事件组,对任意事件 $B(P(B)>0)$,在事件 B 已发生的条件下事件 A_i 发生的概率为

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}$$
$$(i = 1,2,\cdots,n).$$

称之为**贝叶斯公式**.

贝叶斯公式主要用于在已知某事件 B 发生的条件下,来判断 B 是伴随着 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的哪一个事件发生的情况下而发生的.即要求知道 B 发生的条件下某个原因 A_i 发生的概率.这就是条件概率 $P(A_i|B)$.所以这个公式又称为**原因概率公式**.

1.9 事件的独立性

定义 设 A,B 是某一随机试验的任意两个随机事件.称 **A 与 B 是相互独立**的,如果

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

这就是在 A 与 B 独立的情况下事件 A 与 B 乘积的概率公式.可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系.所谓事件 A 与 B 相互独立就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性.类似地当 $P(B)\neq 0$ 时,A 与 B 相互独立也可以用

$$P(A \mid B) = P(A)$$

来定义.

由两个随机事件相互独立的定义,我们可以得到:若事件 A 与 B 相互独立,则 $\bar{A}$ 与 B,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

如果事件 A,B,C 满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称**事件 A,B,C 相互独立.**

注意,事件 A,B,C 相互独立与事件 A,B,C 两两独立不同,两两独立是指上述四个式子中前三个式子成立.因此,相互独立一定是两两独立,但反之不一定.

对于 n 个事件的独立性,我们有

定义 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件.如果对于所有可能的组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$ 下列各式同时成立

$$\begin{cases}P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\\P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),\end{cases}$$

那么称 $\boldsymbol{A_1,A_2,\cdots,A_n}$ **是相互独立的.**

1.10 二项概型

在实际问题中,我们常常要做多次试验条件完全相同(即可以看成是一个试验的多次重复)并且都是相互独立(即每次试验中的随机事件的概率不依赖于其他各次试验的结果)的试验.我们称这种类型的试验为**独立重复试验**.

定理 在单次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次独立重复试验中

$$P\{A\text{ 发生}k\text{ 次}\}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n).\tag{1-3}$$

所谓**伯努利概型**就是利用关系式(1-3)来讨论事件概率的数学模型.伯努利概型又称为**独立试验序列概型**(或**二项概型**).

二、历年真题全解

一、填空题

1.(1988年数学三、四)设 $P(A)=0.4,P(A+B)=0.7$,若事件 A 与 B 互斥,则 $P(B)=$ ________;若事件 A 与 B 独立,则 $P(B)=$ ________.

答案是:0.3,0.5.

分析 若 A 与 B 互斥,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$,于是

$$P(B)=P(A+B)-P(A)=0.7-0.4=0.3.$$

若 A 与 B 独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)$,于是由

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$,得

$$P(B)=\frac{P(A+B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.7-0.4}{1-0.4}=0.5.$$

2.（1989年数学一）已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$________.

答案是：0.7.

分析　由题设 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.4$.

于是 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$.

3.（1990年数学一）设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6，若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B})=$________.

(2) 答案是：0.3.

分析　$\because\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

又　$P(A\bar{B})+P(AB)=P(A)$

$\therefore\ P(A\bar{B})=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$.

4.（1991年数学四）设 A、B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________.

答案是：0.6.

分析　由题设 $P(A)=0.7$，$P(A\bar{B})=0.3$，利用公式

$$AB+AB=A,$$

知

$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.7-0.3=0.4.$$

故

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6.$$

5.（1992年数学一、四）已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为________.

答案是：$\frac{7}{12}$.

分析　$\because\ P(AB)=0$，$\therefore\ P(ABC)=0$，于是

$$\begin{aligned}P(\overline{ABC})=P(\overline{A\cup B\cup C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)\\&\quad-P(AC)+P(ABC)]\\&=1-\frac{3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

6.（1994年数学一）已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

答案是：$1-p$.