高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

解析几何讲义

辽宁教育学院数学系　编

高等教育出版社

高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

解析几何讲义

辽宁教育学院数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是辽宁教育学院多年在函授中使用的解析几何讲义的基础上，根据原教育部制定的中学教师进修高等师范数学专业“解析几何”教学大纲精神编写而成的.

内容分两大部分：第一篇为平面解析几何，共六章：第一章讲二、三阶行列式，第二章讲点的坐标曲线与方程，第三章为直线，第四章为二次曲线(圆锥曲线)，第五章为坐标变换及一般二次曲线的研究，第六章讲极坐标方程和参数方程. 第二篇为空间解析几何，共五章：第七章为空间直角坐标系及向量代数初步，第八章为曲面方程与曲线方程，第九章讲空间的平面和直线，第十章为二次曲面，第十一章为空间坐标变换及一般二次曲面的研究.

本书可作为中学教师进修高等师范数学专业的教材，也适用于技术人员和青年自学者.

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)
解析几何讲义
辽宁教育学院数学系 编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本850×1168 1/32 印张14.75 字数370 000
1988年11月第1版 1989年2月第1次印刷
印数 0 001— 3 610
ISBN7-04-000906-4/O·647
定价3.35元

前　言

本书是在我系多年函授中使用的“解析几何讲义”的基础上，根据原教育部制定的中学教师进修高等师范数学专业“解析几何”教学大纲精神编写而成.

本书作为函授教材，我们在编写过程中，充分注意到函授、业余教育的特点，对概念和理论的阐述力求联系实际，总结规律，使本书深入浅出，通俗易懂，便于自学．每章开头有提要，末尾有小结，并配有较多的例题和习题，对疑难地方附以“注意”给出说明和解释.

本书共分两篇十一章，第一篇讲平面解析几何，共六章，第二篇讲空间解析几何，共五章.学习时数，函授面授约为60学时左右，函授自学约为180学时左右．书中带“*”号的内容，可根据教学实际情况决定取舍.

本书也适用于中学教师、技术人员和青年自学者.

在编写过程中，高等教育出版社的有关同志给予了指导，我们在此表示衷心感谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，我们诚恳地希望读者批评指正。

编　者
辽宁教育学院数学系
1986年4月

目　　录

第一篇　平面解析几何

第二篇　空间解析几何

第一篇　平面解析几何

解析几何是形数结合的典型学科，是从学习初等数学进入高等数学的转折点. 它不仅对中学几何的研究具有指导作用，而且为进一步学习高等数学打下必要的基础.

本课程的基本内容分成“平面”与“空间”两部分.

本篇的目的是在学习中学平面解析几何的基础上，进一步补充、加深已学过的平面解析几何知识，使之较全面、系统，以便更好地理解和掌握中学解析几何教材.

本篇主要内容包括：

1．直线方程；

2．二次曲线的一般理论；

3．极坐标方程与参数方程.

本课程中许多内容若借助行列式这一数学工具进行研究，则要方便得多. 因此，我们先介绍行列式.

第一章 二、三阶行列式

本章主要内容：

二、三阶行列式的概念、性质、算法及其应用.

本章基本要求：

1. 掌握二、三阶行列式的概念及其性质；

2. 能熟练地计算二、三阶行列式；

3. 会用行列式解二、三元一次方程组.

§ 1 二阶行列式

一、二阶行列式的概念

在初等代数中，对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法求解，得

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1, \\ (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \end{cases}$$

若 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，则(1.1)的解为

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{1.2}$$

可以看出，(1.2)的分子和分母都是形如 $ad-bc$ 这样的代数和. 我们不妨把 a、b、c 和 d 写成如下的方格表：

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}.$$

在这一方格表中，若左上角与右下角二数之积添正号，右上角与左下角二数之积添负号，则其代数和就是 $ad-bc$.

定义 代数和 $ad-bc$ 叫作**二阶行列式**. 记作

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

也就是

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc. \tag{1.3}$$

这样一来，(1.1)的解又可写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.4}$$

这种形式，便于记忆. 它的分母是 (1.1) 中 x 与 y 的系数按原位置排列而构成的二阶行列式，叫作**系数行列式**. 其中 x（或 y）的分子是把系数行列式中 a_1、a_2（b_1、b_2）依次换成常数项 c_1、c_2 的结果.

为叙述方便，我们还约定：

(1) (1.3)的右端也叫作二阶行列式的**展开式**.

(2) 组成行列式的数叫作行列式的**元素**. 如 a 是 (1.3) 的元素. 二阶行列式有 $2^2=4$ 个元素.

(3) 行列式的横排叫作**行**；竖排叫作**列**. (1.3)中四个元素排成两行、两列. 如 a 和 b 排成第一行；b 和 d 排成第二列.

(4) 不同行、不同列的元素的乘积叫作行列式的**项**. 如 ad 是 (1.3)的项. 二阶行列式有 $2!=2$ 项.

(5) (1.3)中由左（右）上角到右（左）下角的对角线叫作**主(副)对角线**. 如 b、c 在副对角线上.

(6) 求代数和 $ad-bc$ 得行列式(1.3)的值.

至此可得计算二阶行列式的**对角线法则：二阶行列式主对角线上二元素之积添正号，副对角线上二元素之积添负号，求其代数和即得二阶行列式的值.**

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\times3-1\times4=6-4=2$.

二、二阶行列式的基本性质

二阶行列式有下列基本性质：

性质 1 行与列对调，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

性质 2 对调两行(两列)，行列式的值变号. 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

性质 3 同一行(一列)各元素的公因子可提到行列式外面. 如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & \mu b \\ c & \mu d \end{vmatrix}=\mu\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

性质 4 若两行(两列)成比例，则行列式的值为零. 如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=\lambda(ab-ab)=0,$$

$$\begin{vmatrix} a & \mu a \\ c & \mu c \end{vmatrix}=\mu\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}=\mu(ac-ac)=0.$$

性质 5 若某一行(一列)的元素全为零，则行列式的值等于零. 如

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

上述性质读者可通过计算自行验证.

三、解二元一次方程组

运用二阶行列式解二元一次方程组，不仅方法简单，而且便于记忆.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 5x+2y=\ 5, \\ \ \ x-3y=18. \end{cases}$$

解 由(1.4)，得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 18 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{5\times(-3)-2\times 18}{5\times(-3)-2\times 1}=\frac{-51}{-17}=3,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{5\times 18-5\times 1}{-17}=-5.$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} y+3x-2=0, \\ 4x-5y-8=0. \end{cases}$$

解 原式可写成

$$\begin{cases} 3x+\ \ y=2, \\ 4x-5y=8. \end{cases}$$

由(1.4)，得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 8 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}}=\frac{-18}{-19}=\frac{18}{19},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}}=\frac{16}{-19}=-\frac{16}{19}.$$

注意 用(1.4)解二元一次方程组时，一般要将原方程组写成(1.1)形式．即在两个方程中，未知量 x 和 y 的顺序要相同，常数项要移到等号的另一边．即便不写成这种形式，公式(1.4)中的各个数值也要按这种形式时的各个数值代入．

我们知道，(1.1)的解可由(1.4)直接求得．不难看出，解的存在与否取决于有关行列式的值．下面分三种情况进行讨论．

(1) 当$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$时，(1.1)有唯一解．如例 1、例 2．

(2) 当$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，且$\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$与$\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$中至少有一个不为零时，(1.1)无解．

例 3 解方程组

$$\begin{cases}3x-2y=5,\\ 6x-4y=7.\end{cases}$$

解 由(1.4)，得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & -2\\ 7 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{vmatrix}}=\frac{-6}{0}.$$