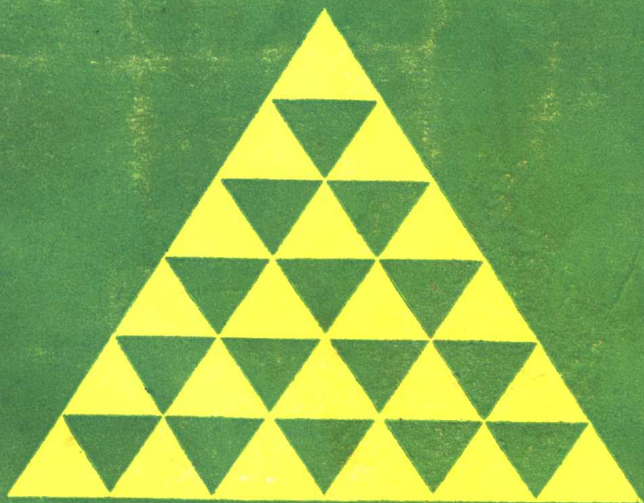


高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

解析几何讲义

辽宁教育学院数学系 编



高等教育出版社

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

解析几何讲义

辽宁教育学院数学系 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是辽宁教育学院多年在函授中使用的解析几何讲义的基础上,根据原教育部制定的中学教师进修高等师范数学专业“解析几何”教学大纲精神编写而成的。

内容分两大部分:第一篇为平面解析几何,共六章:第一章讲二、三阶行列式,第二章讲点的坐标曲线与方程,第三章为直线,第四章为二次曲线(圆锥曲线),第五章为坐标变换及一般二次曲线的研究,第六章讲极坐标方程和参数方程。第二篇为空间解析几何,共五章:第七章为空间直角坐标系及向量代数初步,第八章为曲面方程与曲线方程,第九章讲空间的平面和直线,第十章为二次曲面,第十一章为空间坐标变换及一般二次曲面的研究。

本书可作为中学教师进修高等师范数学专业的教材,也适用于技术人员和青年自学者。

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)
解 析 几 何 讲 义
辽宁教育学院数学系 编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张14.75 字数370 000

1988年11月第1版 1989年2月第1次印刷

印数 0 001—3 610

ISBN7-04-000906-4/O·647

定价3.35元

前 言

本书是在我系多年函授中使用的“解析几何讲义”的基础上，根据原教育部制定的中学教师进修高等师范数学专业“解析几何”教学大纲精神编写而成。

本书作为函授教材，我们在编写过程中，充分注意到函授、业余教育的特点，对概念和理论的阐述力求联系实际，总结规律，使本书深入浅出，通俗易懂，便于自学。每章开头有提要，末尾有小结，并配有较多的例题和习题，对疑难地方附以“注意”给出说明和解释。

本书共分两篇十一章，第一篇讲平面解析几何，共六章，第二篇讲空间解析几何，共五章。学习时数，函授面授约为60学时左右，函授自学约为180学时左右。书中带“*”号的内容，可根据教学实际情况决定取舍。

本书也适用于中学教师、技术人员和青年自学者。

在编写过程中，高等教育出版社的有关同志给予了指导，我们在此表示衷心感谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，我们诚恳地希望读者批评指正。

编 者

辽宁教育学院数学系

1986年4月

目 录

第一篇 平面解析几何

| | |
|-----------------------------|----|
| 第一章 二、三阶行列式 | 2 |
| § 1 二阶行列式 | 2 |
| 一、二阶行列式的概念 | 2 |
| 二、二阶行列式的基本性质 | 4 |
| 三、解二元一次方程组 | 5 |
| § 2 三阶行列式 | 7 |
| 一、三阶行列式的概念 | 7 |
| 二、三阶行列式的性质 | 9 |
| 三、解三元一次方程组 | 15 |
| 小结 | 22 |
| 习题 | 23 |
| 第二章 点的坐标、曲线与方程 | 26 |
| § 1 直线上点的坐标 | 26 |
| 一、有向直线与有向线段 | 26 |
| 二、直线上点的坐标 | 28 |
| 三、坐标轴上线段的值 | 29 |
| § 2 平面上点的直角坐标 | 33 |
| § 3 两个基本问题 | 35 |
| 一、两点间的距离 | 36 |
| 二、线段的定比分点 | 37 |
| § 4 曲线与方程 | 41 |
| 一、曲线方程的概念 | 45 |
| 二、曲线方程的建立 | 47 |

| | |
|-----------------------------|-----|
| 三、方程的曲线 | 48 |
| 四、两条曲线的交点 | 52 |
| 小结 | 54 |
| 习题 | 56 |
| 第三章 直线 | 59 |
| § 1 直线的点斜式方程与斜截式方程 | 59 |
| § 2 直线的两点式方程与截距式方程 | 62 |
| § 3 直线的一般方程 | 65 |
| § 4 直线与直线间的关系 | 67 |
| 一、两直线间的夹角 | 67 |
| 二、两直线平行与垂直条件 | 70 |
| 三、两直线的交点 | 73 |
| § 5 直线的法式方程及点到直线的距离 | 75 |
| 一、直线的法式方程 | 75 |
| 二、化直线的一般方程为法式方程 | 77 |
| 三、点到直线的距离 | 78 |
| 四、线性不等式的几何意义 | 81 |
| § 6 直线束 | 82 |
| 一、中心直线束 | 82 |
| 二、平行直线束 | 84 |
| 三、三直线交于一点的条件 | 86 |
| 小结 | 88 |
| 习题 | 90 |
| 第四章 二次曲线(圆锥曲线) | 94 |
| § 1 圆 | 94 |
| 一、圆的标准方程 | 94 |
| 二、圆的一般方程 | 96 |
| 三、圆的切线方程 | 101 |
| § 2 椭圆 | 104 |
| 一、椭圆的定义与标准方程 | 104 |

| | |
|---------------------------------|------------|
| 二、椭圆图形的性质 | 107 |
| 三、椭圆的焦点半径、离心率和准线 | 110 |
| 四、椭圆可作为圆的垂直投影 | 114 |
| § 3 双曲线 | 115 |
| 一、双曲线的定义与标准方程 | 115 |
| 二、双曲线图形的性质 | 119 |
| 三、双曲线的焦点半径、离心率和准线 | 125 |
| § 4 抛物线 | 129 |
| 一、抛物线的定义与标准方程 | 129 |
| 二、抛物线的性质 | 131 |
| 三、抛物线的离心率和二次曲线的统一定义 | 133 |
| § 5 二次曲线的切线和法线 | 136 |
| 一、二次曲线的切线方程 | 136 |
| 二、二次曲线的法线方程 | 138 |
| 小结 | 141 |
| 附录 I 二次曲线的生成 | 144 |
| 附录 II 用几何方法画出二次曲线上的点 | 145 |
| 附录 III 切线的几何作图法 | 146 |
| 习题 | 148 |
| 第五章 坐标变换及一般二次曲线的研究 | 153 |
| § 1 坐标变换 | 154 |
| 一、坐标轴的平移 | 154 |
| 二、坐标轴的旋转 | 156 |
| 三、一般的坐标变换 | 158 |
| 四、代数曲线与坐标系的选取无关 | 162 |
| § 2 二次曲线与直线的相关位置及渐近方向 | 163 |
| 一、直线的参数方程 | 164 |
| 二、二次曲线与直线的相关位置 | 164 |
| 三、二次曲线的渐近方向 | 166 |
| § 3 二次曲线的中心与渐近线 | 168 |

| | |
|----------------------------------|------------|
| § 4 二次曲线的直径、主直径与主方向 | 174 |
| 一、二次曲线的直径 | 172 |
| 二、二次曲线的主直径与主方向 | 177 |
| 三、主直径与主方向的求法 | 172 |
| § 5 用坐标变换化简二次曲线方程 | 180 |
| 一、移轴对二次曲线方程系数的影响 | 180 |
| 二、转轴对二次曲线方程系数的影响 | 182 |
| 三、一般二次曲线方程的化简 | 187 |
| § 6 通过主直径、主方向化简二次曲线方程 | 190 |
| § 7 二次曲线的不变量与半不变量 | 199 |
| § 8 用不变量、半不变量对二次曲线方程的化简与判别 | 203 |
| 一、用不变量、半不变量化简二次曲线方程 | 203 |
| 二、用不变量、半不变量判别二次曲线的类型 | 208 |
| 小结 | 209 |
| 习题 | 213 |
| 第六章 极坐标方程和参数方程 | 217 |
| § 1 极坐标 | 217 |
| 一、极坐标的概念 | 217 |
| 二、极坐标与直角坐标间的关系 | 220 |
| 三、曲线的极坐标方程 | 222 |
| § 2 曲线的参数方程 | 226 |
| 一、曲线参数方程的概念 | 236 |
| 二、几种主要曲线的参数方程 | 238 |
| 小结 | 247 |
| 习题 | 250 |

第二篇 空间解析几何

| | |
|---------------------------------|------------|
| 第七章 空间直角坐标系及向量代数初步 | 254 |
| § 1 空间直角坐标系 | 254 |
| § 2 向量和向量的线性运算 | 259 |

| | |
|----------------------------|------------|
| 一、向量的概念 | 259 |
| 二、向量的加法 | 260 |
| 三、向量的减法 | 262 |
| 四、数乘向量 | 264 |
| § 3 向量的分解 | 267 |
| § 4 向量的坐标 | 271 |
| 一、向量在轴上的投影与投影定理 | 271 |
| 二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标 | 273 |
| 三、向量的方向余弦 | 278 |
| § 5 向量的乘法 | 280 |
| 一、向量的数量积 | 280 |
| 二、向量的向量积 | 286 |
| 三、向量的混合积 | 293 |
| *四、向量的二重向量积 | 297 |
| 小结 | 300 |
| 问题与习题 | 303 |
| 第八章 曲面方程与曲线方程 | 306 |
| § 1 曲面方程的概念 | 306 |
| § 2 几种特殊曲面的方程 | 308 |
| 一、球面方程 | 308 |
| 二、母线平行于坐标轴的柱面方程 | 310 |
| § 3 空间曲线的方程 | 312 |
| § 4 投影柱面方程 | 315 |
| § 5 三曲面的交点 | 318 |
| 小结 | 320 |
| 习题 | 321 |
| 第九章 空间的平面和直线 | 323 |
| § 1 平面的点法式和一般式方程 | 323 |
| 一、平面的点法式方程 | 323 |
| 二、平面的一般式方程 | 326 |

| | |
|----------------------------|------------|
| § 2 平面一般方程的特殊情况 | 327 |
| § 3 平面的三点式和截距式方程 | 331 |
| 一、平面的三点式方程 | 331 |
| 二、平面的截距式方程 | 332 |
| § 4 平面的法线式方程和点到平面的距离 | 334 |
| 一、平面的法线式方程 | 334 |
| 二、化平面的一般方程为法线式方程 | 336 |
| 三、点到平面的距离 | 337 |
| § 5 两平面的相互关系 | 340 |
| 一、两平面的夹角 | 340 |
| 二、两平面垂直与平行的条件 | 341 |
| § 6 空间直线的方程 | 345 |
| 一、直线的一般方程 | 345 |
| 二、直线的标准方程 | 346 |
| 三、直线的参数方程与两点式方程 | 349 |
| 四、直线的向量式方程 | 351 |
| § 7 空间两直线的位置关系 | 351 |
| 一、两直线的夹角 | 351 |
| 二、两条直线垂直和平行的充要条件 | 351 |
| § 8 直线与平面的相互位置关系 | 353 |
| 一、直线与平面的夹角 | 353 |
| 二、直线与平面平行及垂直的充要条件 | 353 |
| § 9 点与直线及两条直线间的距离 | 355 |
| 一、点到直线的距离 | 355 |
| 二、两直线间的距离 | 356 |
| § 10 平面束方程 | 360 |
| 小结 | 364 |
| 习题 | 367 |
| 第十章 二次曲面 | 371 |
| § 1 二次曲面和它的标准方程 | 372 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| 一、椭球面 | 372 |
| 二、单叶双曲面 | 373 |
| 三、双叶双曲面 | 376 |
| 四、抛物面 | 378 |
| 五、二次锥面 | 381 |
| § 2 旋转曲面 | 384 |
| § 3 直纹面 | 388 |
| 一、单叶双曲面是直纹面 | 389 |
| 二、双曲抛物面是直纹面 | 391 |
| 小结 | 395 |
| 习题 | 400 |
| *第十一章 空间坐标变换及一般二次曲面的研究 | 402 |
| § 1 坐标变换 | 402 |
| 一、坐标轴的平移 | 403 |
| 二、坐标轴的旋转 | 404 |
| 三、一般坐标变换 | 406 |
| § 2 直线和一般二次曲面的相关位置 | 407 |
| § 3 一般二次曲面的径平面和中心 | 409 |
| § 4 以二次曲面中心(顶点)为坐标原点,化简中心二次曲面方程 | 412 |
| § 5 一般二次曲面的主方向 | 417 |
| § 6 利用二次曲面主方向性质化简二次曲面方程 | 419 |
| § 7 一般二次曲面方程的化简 | 426 |
| § 8 有关二次曲面的不变量 | 434 |
| § 9 利用不变量化二次曲面方程为规范式 | 439 |
| 小结 | 444 |
| 习题 | 447 |
| 习题答案 | 448 |

第一篇 平面解析几何

解析几何是形数结合的典型学科，是从学习初等数学进入高等数学的转折点。它不仅对中学几何的研究具有指导作用，而且为进一步学习高等数学打下必要的基础。

本课程的基本内容分成“平面”与“空间”两部分。

本篇的目的是在学习中学平面解析几何的基础上，进一步补充、加深已学过的平面解析几何知识，使之较全面、系统，以便更好地理解 and 掌握中学解析几何教材。

本篇主要内容包括：

1. 直线方程；
2. 二次曲线的一般理论；
3. 极坐标方程与参数方程。

本课程中许多内容若借助行列式这一数学工具进行研究，则要方便得多。因此，我们先介绍行列式。

第一章 二、三阶行列式

本章主要内容:

二、三阶行列式的概念、性质、算法及其应用.

本章基本要求:

1. 掌握二、三阶行列式的概念及其性质;
2. 能熟练地计算二、三阶行列式;
3. 会用行列式解二、三元一次方程组.

§ 1 二阶行列式

一、二阶行列式的概念

在初等代数中,对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

用加减消元法求解,得

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1, \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases}$$

若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 则(1.1)的解为

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (1.2)$$

可以看出, (1.2)的分子和分母都是形如 $ad - bc$ 这样的代数和. 我们不妨把 a, b, c 和 d 写成如下的方格表:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}.$$

在这一方格表中,若左上角与右下角二数之积添正号,右上角与左下角二数之积添负号,则其代数和就是 $ad-bc$.

定义 代数和 $ad-bc$ 叫作二阶行列式. 记作

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

也就是

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (1.3)$$

这样一来,(1.1)的解又可写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (1.4)$$

这种形式,便于记忆. 它的分母是 (1.1) 中 x 与 y 的系数按原位置排列而构成的二阶行列式,叫作**系数行列式**. 其中 x (或 y) 的分子是把系数行列式中 a_1, a_2 (b_1, b_2) 依次换成常数项 c_1, c_2 的结果.

为叙述方便,我们还约定:

(1) (1.3)的右端也叫作二阶行列式的**展开式**.

(2) 组成行列式的数叫作行列式的**元素**. 如 a 是 (1.3) 的元素. 二阶行列式有 $2^2=4$ 个元素.

(3) 行列式的横排叫作**行**;竖排叫作**列**. (1.3)中四个元素排成两行、两列. 如 a 和 b 排成第一行; c 和 d 排成第二列.

(4) 不同行、不同列的元素的乘积叫作行列式的**项**. 如 ad 是 (1.3)的项. 二阶行列式有 $2!=2$ 项.

(5) (1.3)中由左(右)上角到右(左)下角的对角线叫作**主(副)对角线**. 如 b, c 在副对角线上.

(6) 求代数和 $ad-bc$ 得行列式(1.3)的值.

至此可得计算二阶行列式的**对角线法则**: 二阶行列式主对角线上二元素之积添正号, 副对角线上二元素之积添负号, 求其代数和即得二阶行列式的值.

$$\text{例如, } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2.$$

二、二阶行列式的基本性质

二阶行列式有下列基本性质:

性质 1 行与列对调, 行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

性质 2 对调两行(两列), 行列式的值变号. 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

性质 3 同一行(一列)各元素的公因子可提到行列式外面.

如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & \mu b \\ c & \mu d \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

性质 4 若两行(两列)成比例, 则行列式的值为零. 如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \lambda(ab - ab) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & \mu a \\ c & \mu c \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = \mu(ac - ac) = 0.$$

性质 5 若某一行(一列)的元素全为零, 则行列式的值等于零. 如

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

上述性质读者可通过计算自行验证.

三、解二元一次方程组

运用二阶行列式解二元一次方程组, 不仅方法简单, 而且便于记忆.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 5x + 2y = 5, \\ x - 3y = 18. \end{cases}$$

解 由(1.4), 得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 18 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times (-3) - 2 \times 18}{5 \times (-3) - 2 \times 1} = \frac{-51}{-17} = 3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times 18 - 5 \times 1}{-17} = -5.$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} y + 3x - 2 = 0, \\ 4x - 5y - 8 = 0. \end{cases}$$

解 原式可写成

$$\begin{cases} 3x + y = 2, \\ 4x - 5y = 8. \end{cases}$$

由(1.4), 得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -5 \\ 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \\ 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{16}{-19} = -\frac{16}{19}.$$

注意 用(1.4)解二元一次方程组时,一般要将原方程组写成(1.1)形式. 即在两个方程中,未知量 x 和 y 的顺序要相同,常数项要移到等号的另一边. 即便不写成这种形式,公式(1.4)中的各个数值也要按这种形式时的各个数值代入.

我们知道,(1.1)的解可由(1.4)直接求得. 不难看出,解的存在与否取决于有关行列式的值. 下面分三种情况进行讨论.

(1) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时,(1.1)有唯一解. 如例 1、例 2.

(2) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 且 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 中至少有一个不

为零时,(1.1)无解.

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 6x - 4y = 7. \end{cases}$$

解 由(1.4),得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \\ 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{0}.$$