对策论及其应用

张盛开　编著

华中工学院出版社

内 容 简 介

全书共分十一章，前三章是矩阵对策，第四章至第八章为连续对策，第九章至第十一章为多人对策。学过线性代数和概率论的人即可看懂前三章，本科生即可看懂全书。

本书可作为高等学校数学专业和管理专业试用教材，特别是与系统工程及运筹学等学科有关的研究人员和工程技术人员均可参考使用此书。

对策论及其应用

张盛开 编著

责任编辑 李立鹏

*

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行

华中工学院出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7.875 字数：177,000

1985年6月第一版 1985年6月第一次印刷

印数：1—5,000

统一书号：13255—033 定价：1.75

目　录

前　言

《对策论及其应用》终于与广大读者见面了．它是作者在过去的讲稿基础上写成的。

我国开始有人搞对策论的研究是在1959年．当时虽是刚刚起步，但由于当时的历史条件和参加的人员较多，因此在短短的几年中就得到了一些好的结果，如[12]、[13]等．然而，在六十年代中期以后的十几年时间里，我国的对策论研究几乎是停滞不前．近些年来，我国的对策论研究又开始回生，并得到了一些新的成果．特别可喜的是有的学校已经招收了这方面的研究生或给研究生开设这门课程．然而，要找到一本较合适的对策论教材确实很困难，有的书内容过于陈旧，有的内容过于简单，与当前的研究相差太大，作者编写此书的目的就是为解决这个问题尽微薄之力．当然，由于作者才疏学浅，因此很可能达不到预期的目的，但能为对策论的研究做一点贡献，这是作者感到欣慰的。

全书共分十一章，第一章至第三章为矩阵对策，第四章至第八章为连续对策，第九章至第十一章为多人对策。

这里要提到的是一些友人的帮助．李为政、江嘉禾、刘德铭、张嗣瀛等同志都为此书的编写提供过宝贵的资料，美国的 **Max Mintz** 教授也为本书的编写提供了资料．书中有的内容是让叶田祥和赵景柱帮助整理的．林群、杜钟铨和关世忠等同志为本书的编写给予了大力支持．在此对各位一并表示感谢．

由于作者水平有限，缺点错误在所难免，敬希读者不吝指教。

作　者

1984．

序

谈到“对策”，人们必然会想到斗争，谈到“博奕”，人们必然会想到游戏。至于斗争是否会胜利，游戏会有什么结果，我们以后再说.在此先把这些说法统一起来,叫做对策(**Game**).

早在1912年，**E.Zermelo** 用集合论的方法研究过下棋，他著有《关于集合论在象棋对策中的应用》。法国数学家 **Borel** 在1921年，也用数学方法研究过下棋时的一些个别现象，并且引入了“最优策略”的概念。本世纪四十年代以来，由于生产与战争的需要。运筹学（**Operational research**）的各学科纷纷出现，特别是战争中兵力的调配、军队的部署、监视对方、侦察对方兵器等活动，迫切要求战争的指挥者拿出最好方案，用已有的条件去取得较大的胜利，于是方案对策论的数学模型很快就形成了。当时，各参战国组织了大批的科学家参加了这方面的研究工作。

伴随着对策论的研究，经济科学的研究也奋起直追，很快与对策论的研究结合到一起，为对策论的应用提供了广泛的场所。同时，也加快了对策论体系的形成。

1944年，**J.Von, Neumann** 和 **Q.Morgenstern** 把对策论与经济数学的研究进行了总结，从而把这一工作提高到一个新水平。他们合著了《对策论与经济行为》(**Theory of Games and Economic Behavior**)。从此，对策论的研究才系统化与公理化。

我国古代劳动人民和学者很早就认识了对策的问题，虽然

没有完整的数学体系，没有得出一套完整的数学方法，然而这种模型的初级阶段早就出现了。所谓的“齐王赛马”就是一个非常典型的例子。再如，很早就出现的“棋谱”，也都是研究对策的萌芽，只不过没有系统化与数学化罢了。

近几年来，对策论的发展很快，应用也很广泛，很多应用数学的书籍都包含着这些内容。如随机微分对策，已被应用到航天技术上。当然，对策论某些理论上的研究成果目前在生产与技术方面有的还用不上，在矩阵对策里，这种情况不多，在无穷对策中，这种现象就很多，如列紧对策，生产上就不易找到应用的模型。尽管如此，对策论的研究并未因此而受到影响，相反，由于理论上这部分内容较完整，因而发展的速度更快，甚至研究出不少新的意想不到的成果。

本书是作者为研究生讲课的讲义。鉴于我国的特点，作者在书中举了大量的例题，既照顾到数学系学生与研究生的需要，也照顾到工程管理系统方面的工作者的需要。有一些例题就是直接来自生产的，还有一些例题取自于其他书刊。见书末的参考文献。

第一章　矩阵对策的一般情形

§1. 基本概念

首先，我们介绍对策论的最基本内容，即矩阵对策。它是整个对策论的基础，不管是理论研究，还是生产实践的应用，都不能越过矩阵对策这个“第一道大门”。近代对策论的研究，其结果再深入，理论再抽象，都无法摆脱矩阵对策这个母体。因此，每一位读者，要学好对策论，都必须首先学好矩阵对策。矩阵对策以研究二人零和对策为主，策略的选取主要是研究有限情况。所以，人们常称矩阵对策为**有限二人零和对策**。

在日常生活中，人们经常看到一些互相之间的竞争、比赛等性质的现象。如下棋、打扑克、球类比赛，以至战争等等。竞争的各方，都各有长处，各有不足，即各有对方所不具备的特点。在竞争或竞赛的过程中，双方都想方设法发挥自己的长处，攻击对方的弱点。尽最大可能去取得较好的结果。

战争是一场你死我活的斗争，这当然是一种斗争现象。此外，还有一些现象，也可以看成是一种竞争。如在运输方面，由于运输工具的不同，能够服务的项目也不同，从而创造的价值也不同。作为生产的指挥者，在安排工作计划时，必然是希望充分发挥现有的运输能力，最大限度地减少消耗，以创造更大的价值。

在这里，对运输部门的指挥者(或运输主管单位)我们看成是竞争的一方，而被服务的单位可以看成是竞争的另一方。对

被服务单位来说，他们希望付出较少的代价，得到满意的服务。

又如，在工业生产方面，工厂中拥有一定数量的设备，能加工不同类型的产品。不同类型的设备在单位时间内创造的价值不一样，消耗的费用也不一样。从企业管理的角度来看，就是如何充分发挥其设备的能力，减少费用消耗，去创造更多的价值。

在这里，对工厂的指挥者我们可以看成是一方，各种费用的消耗、成本及损失等则可看成是另一方。这样，两者之间也可以看成是竞争的双方。

再如，在资金管理方面。计划内的诸资金使用者看成是一方，控制资金使用的主要部门看成是另一方。这也可以人为的看成是双方在竞争。

诸如此类问题还很多，如在农业方面，人与大自然的斗争，田间管理，合理施肥，配制农药除虫害等等，都可以找出"竞争"的双方，看成是对策现象。

在形形色色的斗争或竞争现象中，我们可抽象出如下的几个本质性概念。

1．首先，竞争或斗争总有对立面(或对手)，例如象棋比赛，参加对奕的两位象棋运动员即是比赛(或说是竞争)的对立面；一场战争中，利益根本冲突的双方就是斗争的对立面；在生产斗争中，常常是人类与大自然形成了对立面。我们把介入竞争的对立面双方，称之为参入对策的**局中人**。如果参入对策的各方(多于两方时)相互之间的利益是独立的，这时也称参入对策的各方为局中人。

2．各局中人在竞争的过程中总希望自己取得尽可能大的胜利，这样，各方都在想方设法选择对付他方的"办法"，或者说在挑选自己能实现的"办法"。我们把这种"办法"(或"着法")称为该局中人的**策略**。

这里所谓的策略，是指局中人在整个竞争过程中对付他方的一个完整的办法。并非指竞争过程中某一步所采用的局部办法。例如，在下象棋时，对于一盘棋来说，某一步走"当头炮"只是作为一个策略的一个组成部分，并非一个完整的策略。

局中人的一切可能的策略，组成了该局中人的**策略集合**或**策略集**。策略集可以是有限的，也可以是无限的。在矩阵对策中将研究有限情况。

3．竞争的结局，或是表现为胜负（输赢），或是表现为得失。这种结局都用数字或函数来描绘，我们称它为一种"**赢得**"（或"**支付**"）。

这里，赢得的理解是广义的。在二人零和对策中，其赢得数值会有负的，这与通常意义下所理解的赢得是不一致的。

我们所说的竞争问题正是对策论所要研究的问题，以上所述的3条称为对策的**三要素**。它是对策的基本条件，缺少任何一条都不能构成完整的对策。

4．在参入对策过程中只有两方时，而且双方的利益是根本对立的，其中一方的赢得等于另一方的输出时，称这类对策为**二人零和对策**。赢得的数值称为**对策的值**，或简称为**值**。

球类比赛是一个二人对策，但是他们的对策不是零和的。因为一方的赢球数不等于另一方的输球数。如果把输赢重新规定一下，规定输者必须付给赢者一定数量的代价，此种情况下的对策就是二人零和对策了。又如，有两个赌徒在赌钱，他们的对策是一个二人零和对策。再如，一场只有两方参加的战争，任何一方都把对方的损失看成是自己的赢得，任何一方的赢得虽然不象赌徒那样有明显的收益，但是，他们各方都拼命给对方造成更大损失，来使自己达到胜利。这类对策也是二人零和对策。

对策过程中，局中人如何选取策略是很重要的。我们举一个有名的“齐王赛马”的例子。

战国时期，齐国的国王与国内一个名叫田忌的大将进行赛马。双方约定，各自出三匹马，分别为三个等级即一等马(好的)、二等马(中等的)、三等马(差的)各一匹。比赛时，每次双方各从自己的三匹马中任选一匹来比，输者得付给胜者一千两黄金，一回赛三次，每匹马都参加。这里，局中人自然是齐王和田忌，两局中人的策略集合则为各自三等级马的全排列，结局是某一局中人赢得黄金一千两或三千两。

当时，三种不同等级的马相差非常悬殊，而同等级的马中，齐王的马比田忌的马要强。这样，如果齐王和田忌都是一、二、三等马依次参赛的话(即策略同为：一等马先参赛，其次二等马参赛，最后三等马参赛)，田忌就得输三千两黄金。这时，田忌的朋友给他出了个主意，让田忌用三等马去与齐王的一等马比赛，一等马对齐王的二等马，二等马对齐王的三等马。即田忌的策略是三等马先参赛，一等马次之，二等马最后，用以对付齐王的一、二、三等马依次参赛。这样，结局是齐王非但没有赢得，反而输了一千两黄金。这个例子说明，局中人选取一个好策略至关重要。至于这种好策略是否能找得到？运用什么方法去找？这都是对策论里所要解决的问题，本书也将适当予以介绍。

此例即是一个二人零和对策的例子。

§2. 矩阵对策的数学模型

矩阵对策的模型在我国出现的很早，至今已有两千多年的历史。

我们继续讨论齐王赛马的例子. 以 $\alpha_1(1, 2, 3)$ 表示齐王先用一等马，再用二等马，最后用三等马参赛. 于是，齐王共有如下六个策略：

$$\alpha_1(1,2,3),\ \alpha_2(1,3,2),$$
$$\alpha_3(2,1,3),\ \alpha_4(2,3,1),$$
$$\alpha_5(3,2,1),\ \alpha_6(3,1,2);$$

同理，田忌也有六个策略：

$$\beta_1(1,2,3),\ \beta_2(1,3,2),$$
$$\beta_3(2,1,3),\ \beta_4(2,3,1),$$
$$\beta_5(3,2,1),\ \beta_6(3,1,2).$$

齐王的策略集合 S_1 含有六个元素，记为：

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_6\};$$

田忌的策略集合 S_2 也含有六个元素，记为：

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_6\}.$$

列一个表，表示齐王的赢得(单位：千两黄金)：

表1—1

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	3	1	1	1	1	-1
α_2	1	3	1	1	-1	1
α_3	1	-1	3	1	1	1
α_4	-1	1	1	3	1	1
α_5	1	1	-1	1	3	1
α_6	1	1	1	-1	1	3

如果只考虑数字表，写成如下形式：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

这样一来，各种结局的数字构成了一个六阶方阵。由于矩阵中的数字是表示齐王的赢得数字。因此，这个矩阵也就称为齐王的赢得矩阵。当然，田忌的赢得(输掉的)数字也同时可由这个矩阵所确定。

为方便起见，我们把齐王叫做该对策的局中人Ⅰ，把田忌叫做局中人Ⅱ。一般情况下，**赢得矩阵**都是指局中人Ⅰ的赢得矩阵。当一个对策的赢得矩阵给定之后，两个局中人就要考虑如何选取它的最好策略，以达到赢得最大。

给出一个对策。便有局中人，局中人各自又有策略，每个局中人各选取一个策略参入对策时、描述对策的结果又唯一确定，我们说这个对策是给定的。对于二人对策来说，用S_1表示局中人Ⅰ的策略集合，它含有m个**纯策略**，记为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$。用$S_2$表示局中人Ⅱ的策略集合，它含有$n$个纯策略，记为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$。若对于局中人Ⅰ与局中人Ⅱ分别采用$\alpha_i \in S_1$与$\beta_j \in S_2$进行对策，用$(\alpha_i, \beta_j)$来表示，并且称$(\alpha_i, \beta_j)$为一个**纯局势**。每一个局势都唯一地对应着一个数字。这些数字共有$m \times n$个，对应的矩阵是

$$
\begin{array}{c}
 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix},
\end{array}
$$

称此矩阵为局中人Ⅰ的赢得矩阵。并表示为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$. 我们把这个对策记为：

$\Gamma=\langle \text{Ⅰ}, \text{Ⅱ}; S_1, S_2, \boldsymbol{A}\rangle$ 或 $\Gamma=\langle S_1, S_2, \boldsymbol{A}\rangle$。这里，Ⅰ与Ⅱ分别代表局中人Ⅰ与Ⅱ，它们的策略集合分别是 S_1 与 S_2。当一个局势 (α_i, β_j) 确定之后，对应Ⅰ的赢得是 a_{ij} 时，而局中人Ⅱ此时的赢得是 $-a_{ij}$ 时，即

$$a_{ij}+(-a_{ij})=0.$$

这表示两个局中人的赢得之和是零。所以对策 Γ 称为二人零和对策。

下面我们举例说明参入对策的双方应当如何选取策略，方能保证取得胜利，即争取最稳妥的结果。

例 1 给定一个矩阵对策 $\Gamma=\langle \text{Ⅰ}, \text{Ⅱ}; S_1, S_2, \boldsymbol{A}\rangle$，其中 $S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$，$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

解 由 A 可以看出，局中人Ⅰ的最大赢得是 9，就是说局中人Ⅰ总希望自己取得 9，就得出 α_3 参入对策。然而，局中人Ⅱ也是在考虑，因为局中人Ⅰ有出 α_3 的心理状态，于是局中人Ⅱ就想出 β_3 参入对策，这样不仅不能使Ⅰ得到9，反而得输10

(即赢得-10)。同样，I也会这样想，II有出β_3的心理状态，于是I就会出α_4，结果II不但得不到10，反而要输6。

这样一来，双方都必然要考虑，不冒风险，考虑到对方会设法使自己得到最小收入。所以就应当从最坏的方案着手，去争取最好的结果。

对于局中人I来说，所有最坏的结果，即A中每一行的最小数分别是：

$$-8, 2, -10, , -3,$$

在这些最坏的情况中，最好的结果又是2。于是，局中人I要是出α_2参加对策，至少可以保证收入不会少于2。同样道理，对于局中人II来说，所有最坏的结果(即A中每一列的最大数，也是最多输掉的数)分别是：

$$9,\ 2,\ 6,$$

这些最坏的结果中，最好的结果(输得最小)是2。于是，局中人II要是出β_2参入对策，那么它最多输2。

在这里局中人I选取纯策略α_2是最稳妥的；局中人II选取纯策略β_2是最稳妥的，局势(α_2, β_2)能使双方满意，若对策的值用V表示则$V=2$。为明确起见，有时可将V写成V_r。把这个求解过程用数学式子表达出，就是：从每一行里求出最小数，可写成

$$\min\{-6, 1, -8\} = -8,$$
$$\min\{3, 2, 4\} = 2,$$
$$\min\{9, -1, -10\} = -10,$$
$$\min\{-3, 0, 6\} = -3;$$

再从这些最小的数中取最大的，可写为

$$\max\{-8, 2, -10, -3\} = 2.$$

对于局中人Ⅱ来说，从每一列里取最大的，可写为

$$\max\{-6,3,9,-3\}=9,$$

$$\max\{1,2,-1,0\}=2,$$

$$\max\{-8,4,-10,6\}=6;$$

再从这些最大的数中取最小的，就是

$$\min\{9,2,6\}=2。$$

一般地，如果对策 Γ 的赢得矩阵 $\mathbf{A}$ 为：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对局中人Ⅰ来说，对 $\mathbf{A}$ 的每一行取其中的最小值 $\min\limits_j a_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，再从这些最小值中取最大值，得

$$\max_i \min_j a_{ij};$$

对局中人Ⅱ来说，对 $\mathbf{A}$ 的每一列取其中的最大值 $\max\limits_i a_{ij}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，再从这些最大值中取最小值，得

$$\min_j \max_i a_{ij}。$$

如果

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^*j^*}, \tag{1}$$

则 α_{i^*}、β_{j^*} 分别为局中人Ⅰ、Ⅱ的最优策略，且这一对策的值 V_Γ 即为

$$V_\Gamma=\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}。 \tag{2}$$

对于能使上式成立的纯策略(不一定唯一，不唯一时取任何一对纯策略都可以)，对应于第 i^* 行 j^* 列的 α_{i^*}、β_{j^*} 构成的局势 $(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$ 称为**对策的解**，而 α_{i^*}、β_{j^*} 分别称为局中人Ⅰ与Ⅱ

的**最优纯策略**。显然，在例 1 中，对策的解为(α_2,β_2)，对策的值为 $V=2$。

例 2 某公社计划种茄子、辣椒、大葱、大白菜等十一种蔬菜，种植面积为 1300 亩，但感到水、肥均不足，根据各种蔬菜的收获量及市场价格，应怎样安排各种蔬菜的种植面积，使既能满足市场供应，又保证公社能获得最大的收入。

解 首先，把问题适当简化，以利归结为一个数学问题，我们可以把水分成两种情况：足与不足，把肥分成三种情况：足够、稍缺、甚缺，这样投入每一块田的水、肥结合起来便有六种不同情况。另外，根据市场实际需要和种植情况，将各种蔬菜的种植面积分成五种不同方案，并按市价算出总收入数字(单位：元)列成下表：

表 1—2

方案	自然条件					
	一	二	三	四	五	六
甲	192460	235120	278200	156360	197520	242840
乙	189560	231700	273630	155620	196600	239710
丙	192060	234799	277095	158235	198580	243280
丁	194370	237218	280751	158475	199813	245362
戊	194360	238990	281385	157835	199750	246020

这就把问题归结为二人零和对策，局中人分别为人和大自然，人有五种策略，大自然有六种策略，把上表数字抽象出来就是人的**赢得矩阵**。

上述赢得矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$是一个有五行、六列的矩阵，可求得

$$\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}=158475,$$