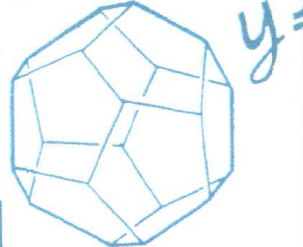
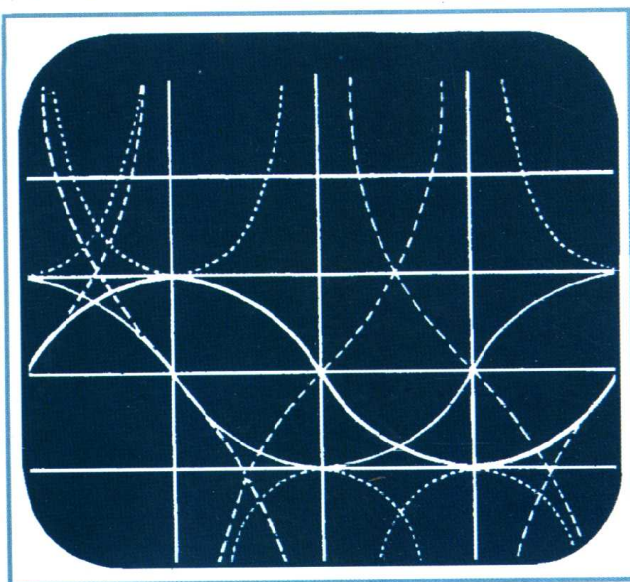


$l(b-c) \Leftrightarrow l \equiv c \pmod{a}$
 $W_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = W_1^k$
 0.618

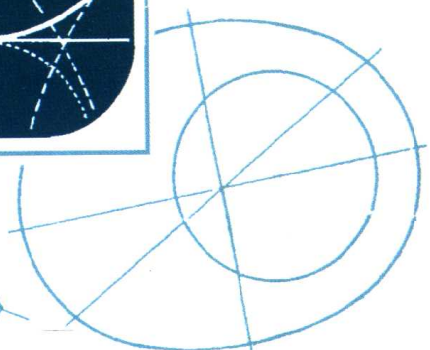
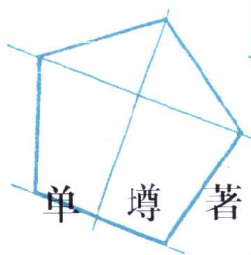
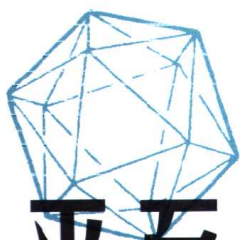


0.618
 $a+bi$
 x^2
 $y=$



$a+bi$
 $y = x^2$
 $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} R$

0.618



单 尊 著

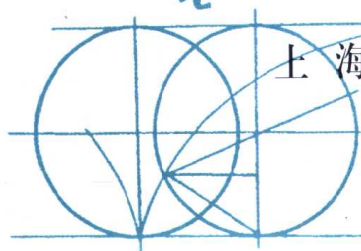
$y = x^2$
 0.618

平面几何中的小花

$y = \sin x$

上海教育出版社

$y = x^2$



$W_k =$
 $a+bi$

平面几何中的小花

单 樽

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面几何中的小花/单增著. —上海:上海教育出版社,2002.5

ISBN 7-5320-8236-9

I. 平... I. 单... III. 平面几何-普及读物
N. 0123.1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 031084 号

平面几何中的小花

单 增

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路 123 号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 苏州永新印刷包装有限责任公司印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 129,000

2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月第 1 次印刷

印数 1~5,150 本

ISBN 7-5320-8236-9/G·8291 定价:8.50 元

前 言

数学大花园里,几何是最美丽的部分.我们从平面几何中撷取几朵小花,供大家欣赏,其中有我们近期遇到的问题,也有著名的经典结果.

各节之间没有特别紧密的联系.内容较为接近的,归入一章.本来没有章名,后来写了两首歪诗,权当章名.一首是:

“数学花园大,
几何算一家.
春日兴致好,
请来看小花.”

作 者

目 录

(一)数学花园大	1
1. 帕普斯定理	1
2. 帕斯卡定理	2
3. 无穷远点	4
4. 笛沙格定理	6
(二)几何算一家	7
5. 对称	7
6. 多么奇妙的一颗星	8
7. 面积问题(一)	9
8. 面积问题(二)	11
9. 中心对称	12
10. 部分与整体相似	13
11. 对角线的中点与面积	14
12. 处处留心皆学问	15
13. 圆规作图	17
14. 闭折线的长	18
15. 正方形中的四个点	20
16. 跳出框框	23
17. 海外称王	25
18. 整齐与对称	26
(三)春日兴致好	29
19. 昂蒂费尔师傅的奇遇	29
20. 重心	31

21. 塞瓦定理	32
22. 爱因斯坦认为优雅的证明	34
23. 三角形的五心	36
24. 垂心的一个性质	37
25. 逐步推广	38
26. 垂心乎? (一)	40
27. 垂心乎? (二)	41
28. 位似、欧拉线	42
29. 九点圆	44
30. 西摩松线	44
31. 欧拉公式	45
32. 拿破仑定理	47
33. 蝴蝶定理	49
34. 平方差与根轴	51
(四)请来看小花	53
35. 完全不用三角	53
36. 掩卷一思	54
37. 意料之外	55
38. 平行四边形	56
39. 边界形状	57
40. 求角的值(一)	59
41. 求角的值(二)	62
42. 求角的值(三)	63
43. 求角的值(四)	64
44. 一道习题的编制	66
45. 相切的圆串	67
46. 阿基米德的一个定理	69

47. 平分周长	70
48. 学校选址(一)	72
49. 学校选址(二)	74
50. 黄蓉分饼(一)	77
51. 黄蓉分饼(二)	78
52. 垂心?	79
53. 寻找简单的证明	82
(五)学海无涯	85
54. 加法定理	85
55. 余弦	86
56. 角平分线与外接圆	87
57. 又是角平分线	89
58. 注意几何意义	91
59. 得用三角	94
60. 2000年中国数学奥林匹克试题	95
(六)乐作舟	98
61. 吴伟朝先生的问题	98
62. 圆的位似中心	99
63. 马尔法提问题	101
64. 叶中豪先生的问题	102
65. 国际会议上的问题	103
66. 孙斌勇同学的问题	104
67. 寺庙里的几何题(一)	109
68. 寺庙里的几何题(二)	110
69. 寺庙里的几何题(三)	116
70. 五圆定理与四圆定理	124
71. 俄罗斯杀手	126

(七)逍遥自在	130
72. 一道波兰竞赛题	130
73. 直角三角形内一点	131
74. 平方和	132
75. 六点共圆	133
76. 三线共点与三点共线	135
77. 比	136
78. 何时 $OH=2R$?	138
79. 直线与圆相切	139
80. 圆内接四边形对边之差	140
81. 等角共轭点	142
82. 凸六边形	144
83. 直线与圆相切	145
84. 三个四边形的面积	147
85. 俄罗斯竞赛题(一)	148
86. 俄罗斯竞赛题(二)	150
(八)任我游	154
87. 逆平行线	154
88. 共轭重心(一)	156
89. 共轭重心(二)	158
90. 塔克圆	159
91. 莱莫恩圆	160
(九)已觉此处景物好	162
92. 四点间的距离	162
93. 笛卡儿关于圆的定理	164
94. 笛沙格定理的证明	165
95. 五点确定二次曲线	167

96. 帕斯卡定理的证明	170
(十)更有好景.....	173
97. 格点多边形	173
98. 直线的条数	174
99. 两人博弈	174
100. 同色的等腰三角形	176
101. 折纸穿针	177
102. 先猜后证	179
103. 距离为有理数	180
104. 覆盖	181
(十一)在前头.....	184
105. 问题征解(一)	184
106. 问题征解(二)	184

(一) 数学花园大

1. 帕普斯定理

数学,是一门博大精深的学问.学习它的最好方法是自己去发现它.

很多几何定理,可能就是在随便画画当中产生的.

如果你有直尺,随意画两条直线 l_1, l_2 (图 1). 然后在 l_1, l_2 上轮流地各取 3 个点. 即 A_1, A_3, A_5 在 l_1 上; A_2, A_4, A_6 在 l_2 上. 这六个点构成一个自身相交的六边形 (闭折线), 即如图连接 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$. A_1A_2 与 A_4A_5 相交于 D , 我们简记作

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 = D.$$

同样, $A_2A_3 \cap A_5A_6 = E, A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$.

D, E, F 三点的位置有什么特点?

它们似乎在一条直线上. 用直尺比划一下, 果真如此!

这是偶然的吗?

如果你再画一个图, 情况仍然如此. 于是你就发现了一个定理:

定理 在直线 l_1 上任取三点 A_1, A_3, A_5 , 在直线 l_2 上任取三点 A_2, A_4, A_6 , $A_1A_2 \cap A_4A_5 = D, A_2A_3 \cap A_5A_6 = E, A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$, 那么 D, E, F 三点共线.

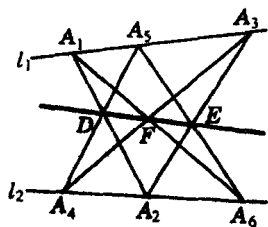


图 1

不过这一定理早已有人发现过. 它称为帕普斯(Pappus)定理. 帕普斯是公元 3 世纪时希腊的数学家.

虽然你发现的定理早已有人发现, 不必为此沮丧. 我国大数学家华罗庚在自学的过程中就常常重复别人的发现(如复变函数中的柯西定理). 他觉得自己能独立发现这些定理, 正说明自己与历史上著名的数学家有同样的水平, 因而对前途充满了信心.

从本节至第 4 节, 我们将介绍三个几何定理(帕普斯定理是第一个). 这些定理是著名的, 因此学习几何的人都应当知道. 这些定理是优美的, 我们应当多加欣赏. 这些定理有不少应用, 但在中学阶段(包括数学竞赛)却很少用到. 不过, 如果能够用上, 问题多半迎刃而解(这就好像核武器, 几乎派不上用场, 但二战末期偶尔一用, 日本鬼子就举手投降了). 这些定理的证明往往都不容易, 但在有关书中不难查到. 所以这里我们也不急于给出证明. 不过, 如果你有兴趣看到本书最后一节, 也会找出一种证明.

2. 帕斯卡定理

“人只不过是一根苇草, 是自然界最脆弱的东西;但他是一根能思想的苇草. 我们全部的尊严就在于思想. 由于思想, 人囊括了宇宙, 思想形成人的伟大.”

——帕斯卡《思想录》

任作一个圆(图 2). 在圆上任取六点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. 设 $A_1A_2 \cap A_4A_5 = D$, $A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$, $A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$,

则有

D, E, F 三点共线.

类似的结论,对于椭圆、双曲线、抛物线也同样成立.而在双曲线蜕化成两条相交直线(或抛物线蜕化成两条平行直线)时,上述结论就变成帕普斯定理.

于是,我们有如下定理:

定理 如果一个六边形内接于一条二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线),那么它的三对对边的交点在同一条直线上.

这一定理称为帕斯卡定理.

布莱斯·帕斯卡(1623. 6. 19—1662. 8. 19),是一位天才.在 16 岁左右(约 1639 年)就发现了上述定理.

帕斯卡是概率论的奠基人之一.他 18 岁时,发明并制造了历史上第一架计算机.25 岁左右,发现了物理学中关于液压传递的帕斯卡原理.他还是一位杰出的文学家,他的《思想录》与《致外省人的信》是法国文学的宝藏.但从 31 岁起,他的主要精力用于神学,沉缅于宗教狂热之中.

帕斯卡定理中的六边形,可以是图 2 中自身相交的六边形,也可以是图 3 中的常见的简单多边形.

帕斯卡定理有种种特殊的情况.例如 A_1 与 A_2 重合, A_5 与 A_6 重合,就得到(图 4):

圆内接四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 对边 A_1A_5, A_3A_4 的交点 F, A_1 处切线与 A_4A_5 的交点 D, A_5 处切线与 A_1A_3 的交点 E , 三点共线.

如果图 3 中 A_1 与 A_2 重合, A_3 与 A_4 重合, A_5 与 A_6 重

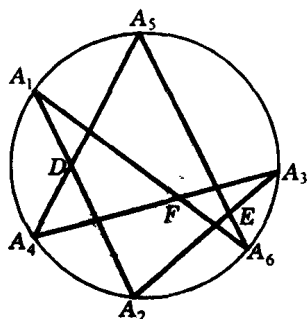


图 2

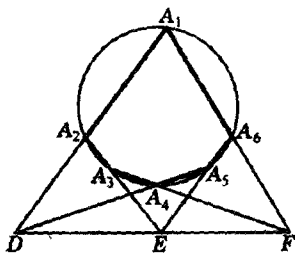


图 3

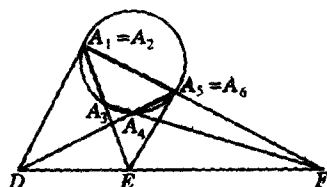


图 4

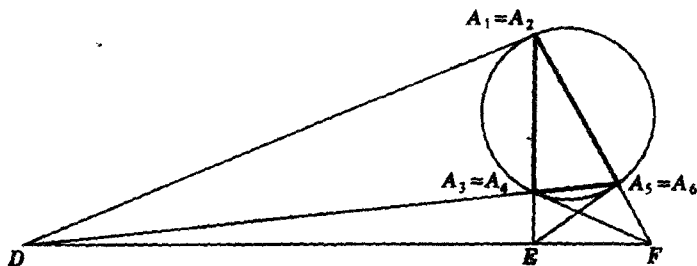


图 5

合,就得到(图 5):

圆内接三角形,每一顶点处的切线与对边的交点,这三点共线.

70年代,国内曾有人在杂志上发表了一些“新”定理,以为是“前贤所未曾发现的”.其实都是帕斯卡定理的特殊情况.

3. 无穷远点

“数学的统一性及简单性都是极为重要的.因为数学的目的,就是用简单而基本的词汇去尽可能多

地解释世界. 归根结底, 数学仍然是人类的活动而不是计算机的程序. 如果我们积累起来的经验要一代一代传下去的话, 我们就必须不断地努力地把它们加以简化和统一.”

——M·阿蒂亚《数学的统一性》

清晨, 一束阳光照进了教室.

光线是平行的, 但它们来自于同一个光源——太阳, 也就是它们相交于同一点(太阳).

当然, 太阳并不是几何学中的没有形状大小, 只有位置的点. 光线也不是严格意义上的平行直线. 但与日、地之间的距离相比, 太阳的半径显得很小, 可以将太阳当作一个点. 并且, 可以说平行直线相交于无穷远点.

通常几何中, 平面上的两条直线或者相交, 或者平行. 引入无穷远点, 就可以将这两种说法统一起来:

平面上任意两条直线有且仅有一个交点.

如果交点是无穷远点, 那么两条直线就是平行直线.

通常还约定:

一组平行线(一束光线)相交于同一个无穷远点. 另一组平行线, 相交于另一个无穷远点. 过两个无穷远点的直线称为无穷远线. 所有的无穷远点都在这条无穷远线上.

引进无穷远点带来许多便利. 例如在帕斯卡定理中, 如果边 $A_1A_2 \parallel A_4A_5$, 那么图 3 中的 D 就是无穷远点. 这时帕斯卡定理仍然成立, 其中直线 EF 过无穷远点 D , 也就是 $EF \parallel A_1A_2$. 如果不用无穷远点, 就需要将这些“例外”情况一一列出, 弄得支离破碎, 十分乏味. 而有了无穷远点, 全可以统一成一种叙述, 即上节的帕斯卡定理.

4. 笛沙格定理

如果 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的对应顶点的连线 A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 交于同一点 O , 那么对应边的交点必定共线, 即: 设 A_2A_3 与 B_2B_3 交于 C_1 , A_3A_1 与 B_3B_1 交于 C_2 , A_1A_2 与 B_1B_2 交于 C_3 , 则 C_1, C_2, C_3 三点共线(图6).

这个定理称为笛沙格(Desargues)定理.

定理中的 O 点称为透视中心, 处于定理所说位置的 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 称为透视的.

笛沙格定理在证明三点共线时很有用处(如第76节). 它的证明很多, 本书将在第94节给出一个证明.

笛沙格定理的逆也是正确的.

即:

如果 $\triangle A_1A_2A_3, \triangle B_1B_2B_3$ 的对应边的交点 C_1, C_2, C_3 共线, 那么这两个三角形是透视的.

笛沙格定理的逆可以用同一法来证. 但更简单的办法是注意 $\triangle A_1B_1C_3$ 与 $\triangle A_3B_3C_1$, 它们是透视的, 透视中心是 C_2 . 因而根据笛沙格定理, 对应边的交点 A_2, B_2 及 A_1B_1 与 A_3B_3 的交点 O , 三点共线. 换句话说, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 三线共点, $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 是透视的.

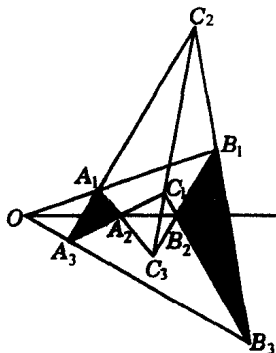


图 6

(二) 几何算一家

5. 对 称

几何学是优美的. 对称, 就是一种美.

一圆的竖直位置的直径向右移 a 厘米, 水平直径向上移 b 厘米. 这两条直线将圆分成四份. 考虑最大一份与最小一份的面积之和及其他两部分面积的和. 求这两个和的差.

显然左下的一份最大, 右上的一份最小.

为了计算差, 最好利用对称.

从 I 中去掉一块等于 III, 从 IV 中去掉一块等于 II. 这样只需计算 V 比 VI 大多少.

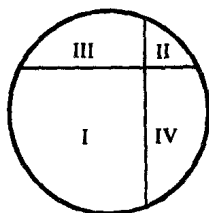


图 7

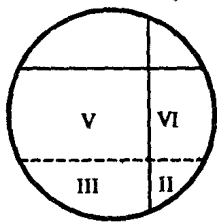


图 8

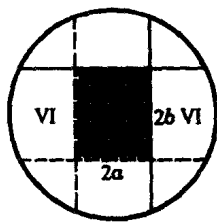


图 9

再从 V 中去掉一块等于 VI. 剩下一个长方形, 长为 $2a$, 宽为 $2b$, 面积为

$$2a \times 2b = 4ab.$$

即所求的差为 $4ab$.

6. 多么奇妙的一颗星

你打过弹子球(台球)吗?

即使自己没有打过,多半也看过别人打台球.电视里也常有台球比赛的实况转播.

台球的原理是反射定律,即当球击到球台的边缘时,球按照
“反射角等于入射角”

的规律而反弹,如图 10 所示.

图中与桌面垂直的虚线称为法线.入射线与法线的夹角 α 称为入射角;反射线与法线的夹角 β 称为反射角.

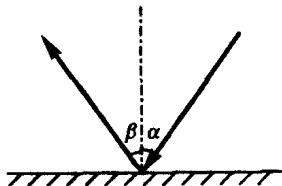


图 10

道理虽然简单,运用起来却不容易.一个高手可以打出许多花样,得出意料不到的效果.球的轨迹可以形成美妙的曲线,例如正三角形、

五角星等等.台湾一位小说家夏烈在他的短篇名著《多么奇妙的一颗星》中,通过一位台球高手的两次击球写出了人生的况味(他还写过一个脍炙人口的短篇《白门》.夏烈先生的母亲就是写《城南旧事》的林海音女士).

通常的台球桌是长方形的.现在(请设想一下)有一个正三角形的台球桌.一位台球高手夸耀说:

“我曾这样的球桌上,将球从桌边击出,沿三个不同方向通过同一点,然后回到出发点.”

这位选手说的事情能否发生?他有没有说牛?

如果这件事不可能发生,多半要用反证法来证明(假定这件事发生,如何如何,最后导出矛盾).如果这件事可能发生,