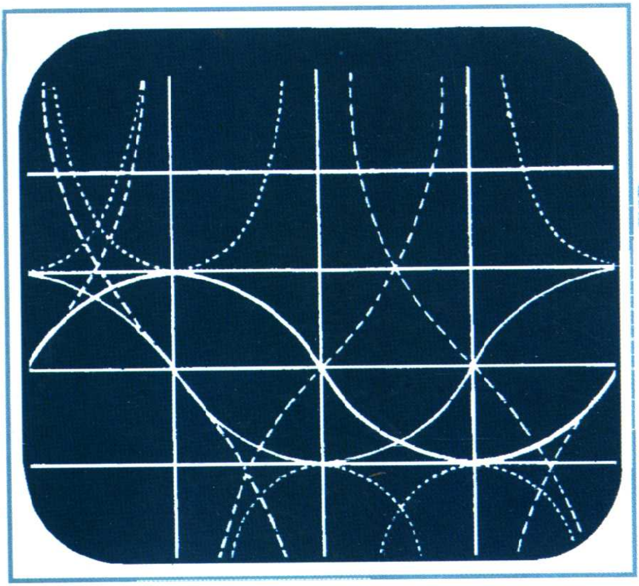

单墫 著

平面几何中的小花

上海教育出版社

平面几何中的小花

单 墫

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面几何中的小花/单墫著. —上海:上海教育出版社,2002.5

ISBN 7-5320-8236-9

Ⅰ.平... Ⅱ.单... Ⅲ.平面几何-普及读物
Ⅳ.O123.1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 031084 号

平面几何中的小花

单 墫

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路 123 号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 苏州永新印刷包装有限责任公司印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 129,000

2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月第 1 次印刷

印数 1～5,150 本

ISBN 7-5320-8236-9/G·8291 定价:8.50 元

前　　言

数学大花园里，几何是最美丽的部分．我们从平面几何中撷取几朵小花，供大家欣赏，其中有我们近期遇到的问题，也有著名的经典结果．

各节之间没有特别紧密的联系．内容较为接近的，归入一章．本来没有章名，后来写了两首歪诗，权当章名．一首是：

“数学花园大，
几何算一家．
春日兴致好，
请来看小花．”

作　者

目　录

（一）数学花园大

1. 帕普斯定理

数学，是一门博大精深的学问.学习它的最好方法是自己去发现它.

很多几何定理，可能就是在随便画画当中产生的.

如果你有直尺，随意画两条直线 l_1，l_2(图 1). 然后在 l_1，l_2 上轮流地各取 3 个点. 即 A_1，A_3，A_5 在 l_1 上；A_2，A_4，A_6 在 l_2 上. 这六个点构成一个自身相交的六边形（闭折线），即如图连接 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5A_6，A_6A_1. A_1A_2 与 A_4A_5 相交于 D，我们简记作

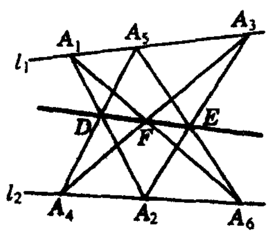

图 1

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 = D.$$

同样，$A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$，$A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$.

D，E，F 三点的位置有什么特点？

它们似乎在一条直线上. 用直尺比划一下，果真如此！

这是偶然的吗？

如果你再画一个图，情况仍然如此. 于是你就发现了一个定理：

定理　在直线 l_1 上任取三点 A_1，A_3，A_5，在直线 l_2 上任取三点 A_2，A_4，A_6，$A_1A_2 \cap A_4A_5 = D$，$A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$，$A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$，那么 D，E，F 三点共线.

不过这一定理早已有人发现过．它称为帕普斯(Pappus)定理．帕普斯是公元3世纪时希腊的数学家．

虽然你发现的定理早已有人发现，不必为此沮丧．我国大数学家华罗庚在自学的过程中就常常重复别人的发现(如复变函数中的柯西定理)．他觉得自己能独立发现这些定理，正说明自己与历史上著名的数学家有同样的水平，因而对前途充满了信心．

从本节至第4节，我们将介绍三个几何定理(帕普斯定理是第一个)．这些定理是著名的，因此学习几何的人都应当知道．这些定理是优美的，我们应当多加欣赏．这些定理有不少应用，但在中学阶段(包括数学竞赛)却很少用到．不过，如果能够用上，问题多半迎刃而解(这就好像核武器，几乎派不上用场，但二战末期偶尔一用，日本鬼子就举手投降了)．这些定理的证明往往都不容易，但在有关书中不难查到．所以这里我们也不急于给出证明．不过，如果你有兴趣看到本书最后几节，也会找出一种证明．

2. 帕 斯 卡 定 理

> “人只不过是一根苇草，是自然界最脆弱的东西；但他是一根能思想的苇草．我们全部的尊严就在于思想．由于思想，人囊括了宇宙，思想形成人的伟大．”
>
> ——帕斯卡《思想录》

任作一个圆(图2)．在圆上任取六点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$．设 $A_1A_2 \cap A_4A_5 = D$，$A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$，$A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$，

则有

D,E,F 三点共线.

类似的结论，对于椭圆、双曲线、抛物线也同样成立. 而在双曲线蜕化成两条相交直线（或抛物线蜕化成两条平行直线）时，上述结论就变成帕普斯定理.

于是，我们有如下定理：

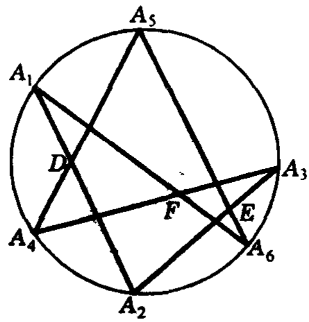

图 2

定理 如果一个六边形内接于一条二次曲线（椭圆、双曲线、抛物线），那么它的三对对边的交点在同一条直线上.

这一定理称为帕斯卡定理.

布莱斯·帕斯卡(1623.6.19—1662.8.19)，是一位天才. 在 16 岁左右（约 1639 年）就发现了上述定理.

帕斯卡是概率论的奠基人之一. 他 18 岁时，发明并制造了历史上第一架计算机. 25 岁左右，发现了物理学中关于液压传递的帕斯卡原理. 他还是一位杰出的文学家，他的《思想录》与《致外省人的信》是法国文学的宝藏. 但从 31 岁起，他的主要精力用于神学，沉缅于宗教狂热之中.

帕斯卡定理中的六边形，可以是图 2 中自身相交的六边形，也可以是图 3 中的常见的简单多边形.

帕斯卡定理有种种特殊的情况. 例如 A_1 与 A_2 重合，A_5 与 A_6 重合，就得到（图 4）：

圆内接四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 对边 A_1A_5，A_3A_4 的交点 F，A_1 处切线与 A_4A_5 的交点 D，A_5 处切线与 A_1A_3 的交点 E，三点共线.

如果图 3 中 A_1 与 A_2 重合，A_3 与 A_4 重合，A_5 与 A_6 重

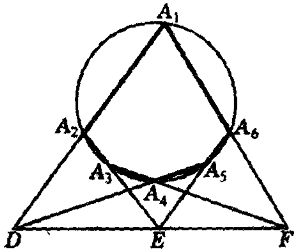

图 3

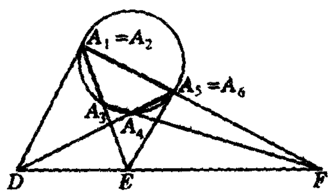

图 4

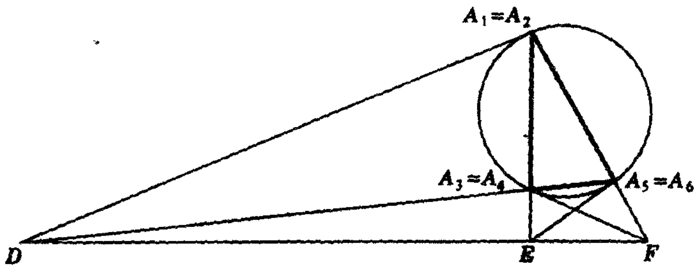

图 5

合，就得到(图 5)：

圆内接三角形，每一顶点处的切线与对边的交点，这三点共线.

70 年代，国内曾有人在杂志上发表了一些“新”定理，以为是“前贤所未曾发现的”. 其实都是帕斯卡定理的特殊情况.

3. 无穷远点

“数学的统一性及简单性都是极为重要的. 因为数学的目的，就是用简单而基本的词汇去尽可能多

地解释世界. 归根结底,数学仍然是人类的活动而不是计算机的程序. 如果我们积累起来的经验要一代一代传下去的话,我们就必须不断地努力地把它们加以简化和统一."

——M·阿蒂亚《数学的统一性》

清晨,一束阳光照进了教室.

光线是平行的,但它们来自于同一个光源——太阳,也就是它们相交于同一点(太阳).

当然,太阳并不是几何学中的没有形状大小,只有位置的点. 光线也不是严格意义下的平行直线. 但与日、地之间的距离相比,太阳的半径显得很小,可以将太阳当作一个点. 并且,可以说平行直线相交于无穷远点.

通常几何中,平面上的两条直线或者相交,或者平行. 引入无穷远点,就可以将这两种说法统一起来:

平面上任意两条直线有且仅有一个交点.

如果交点是无穷远点,那么两条直线就是平行直线.

通常还约定:

一组平行线(一束光线)相交于同一个无穷远点. 另一组平行线,相交于另一个无穷远点. 过两个无穷远点的直线称为无穷远线. 所有的无穷远点都在这条无穷远线上.

引进无穷远点带来许多便利. 例如在帕斯卡定理中,如果边 $A_1A_2 /\!/ A_4A_5$,那么图 3 中的 D 就是无穷远点. 这时帕斯卡定理仍然成立,其中直线 EF 过无穷远点 D,也就是 $EF /\!/ A_1A_2$. 如果不用无穷远点,就需要将这些"例外"情况一一列出,弄得支离破碎,十分乏味. 而有了无穷远点,全可以统一成一种叙述,即上节的帕斯卡定理.

4. 笛沙格定理

如果$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$的对应顶点的连线A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3交于同一点O，那么对应边的交点必定共线，即：设A_2A_3与B_2B_3交于C_1，A_3A_1与B_3B_1交于C_2，A_1A_2与B_1B_2交于C_3，则C_1，C_2，C_3三点共线(图 6).

这个定理称为笛沙格(Desargues)定理.

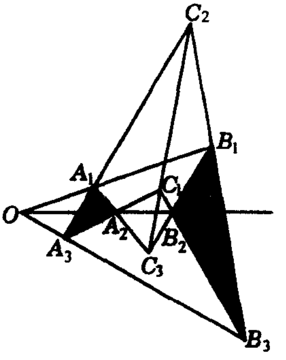

图 6

定理中的O点称为透视中心，处于定理所说位置的$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$称为透视的.

笛沙格定理在证明三点共线时很有用处(如第 76 节). 它的证明很多,本书将在第 94 节给出一个证明.

笛沙格定理的逆也是正确的. 即：

如果$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle B_1B_2B_3$的对应边的交点C_1,C_2,C_3共线,那么这两个三角形是透视的.

笛沙格定理的逆可以用同一法来证. 但更简单的办法是注意$\triangle A_1B_1C_3$与$\triangle A_3B_3C_1$,它们是透视的,透视中心是C_2. 因而根据笛沙格定理,对应边的交点A_2,B_2及A_1B_1与A_3B_3的交点O,三点共线. 换句话说,A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3三线共点,$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$是透视的.

（二）几何算一家

5. 对　　称

几何学是优美的. 对称，就是一种美.

一圆的竖直位置的直径向右移a厘米，水平直径向上移b厘米. 这两条直线将圆分成四份. 考虑最大一份与最小一份的面积之和及其他两部分面积的和. 求这两个和的差.

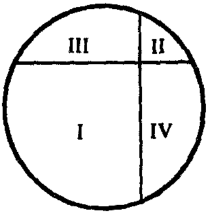

图　7

显然左下的一份最大，右上的一份最小.

为了计算差，最好利用对称.

从 I 中去掉一块等于 III，从 IV 中去掉一块等于 II. 这样只需计算 V 比 VI 大多少.

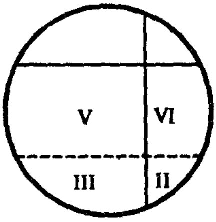

图　8

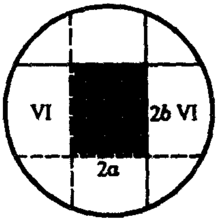

图　9

再从 V 中去掉一块等于 VI. 剩下一个长方形，长为 $2a$，宽为 $2b$，面积为

$$2a\times 2b=4ab.$$

即所求的差为 $4ab$.

6. 多么奇妙的一颗星

你打过弹子球(台球)吗?

即使自己没有打过,多半也看过别人打台球.电视里也常有台球比赛的实况转播.

台球的原理是反射定律,即当球击到球台的边缘时,球按照

“反射角等于入射角”

的规律而反弹,如图 10 所示.

图中与桌面垂直的虚线称为法线.入射线与法线的夹角 α 称为入射角;反射线与法线的夹角 β 称为反射角.

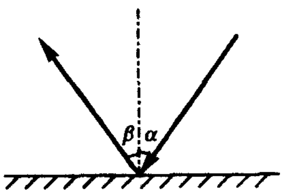

图 10

道理虽然简单,运用起来却不容易.一个高手可以打出许多花样,得出意料不到的效果.球的轨迹可以形成美妙的曲线,例如正三角形、五角星等等.台湾一位小说家夏烈在他的短篇名著《多么奇妙的一颗星》中,通过一位台球高手的两次击球写出了人生的况味(他还写过一个脍炙人口的短篇《白门》.夏烈先生的母亲就是写《城南旧事》的林海音女士).

通常的台球桌是长方形的.现在(请设想一下)有一个正三角形的台球桌.一位台球高手夸耀说:

“我曾在这样的球桌上,将球从桌边击出,沿三个不同方向通过同一点,然后回到出发点.”

这位选手说的事情能否发生?他有没有说牛?

如果这件事不可能发生,多半要用反证法来证明(假定这件事发生,如何如何,最后导出矛盾).如果这件事可能发生,