

高等学校试用教材

原子核理论

第二卷

胡济民 编

原子能出版社

0571
33
2:2

高等学校试用教材
原子核理论

第二卷

胡济民 编

B 原子能出版社
456014

内 容 提 要

本书是《原子核理论》的第二卷。全书共八章，内容包括：为低能核物理所用的散射理论，核力理论，光学模型与直接反应，复合核反应，核反应的共振理论，重离子核反应，核裂变及 α 衰变。

本书可作为核物理或理论物理专业的研究生、教师和科研人员的教材或参考书，可与第一卷分开使用。

高等学校试用教材

原子核理论

第二卷

胡济民 编

责任编辑 刘荣久

原子能出版社出版

(北京 2108 信箱)

国防科工委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本 787×1092 1/16 · 印张24.75 · 字数611千字

1987年12月北京第一版·1987年12月北京第一次印刷

印数1—1600 · 统一书号：15175·839

定价：4.05元

目 录

前 言	(1)
第一章 核反应过程的散射理论	(2)
§1 中心场作用下的散射问题	(2)
§2 自旋轨道耦合及张量力作用下的散射	(9)
§3 核反应截面的分波表示 S 矩阵	(14)
§4 散射的形式理论, T 矩阵	(20)
§5 双位能公式, 扭曲波Born近似	(25)
§6 全同粒子效应	(27)
§7 散射与核反应中的极化现象	(28)
§8 化学约束对中子散射的影响	(35)
思考题与习题	(41)
参考文献	(42)
第二章 核子-核子散射与核力	(44)
§1 引言	(44)
§2 低能核子-核子散射	(45)
§3 高能核子-核子散射	(52)
§4 相移分析和唯象核势	(64)
§5 核力的介子场理论	(72)
§6 核力的多体检验及等效核势	(93)
思考题与习题	(101)
参考文献	(102)
第三章 光学模型	(104)
§1 核反应机制与光学模型的引入	(104)
§2 光学模型与实验的比较 光学势参量	(109)
§3 光学模型的微观理论	(115)
§4 复合粒子的光学模型	(125)
思考题与习题	(139)
参考文献	(140)
第四章 直接反应	(142)
§1 非弹性散射	(142)
§2 迁移反应	(163)
§3 电荷交换反应及同位旋相似态	(181)
§4 直接反应的多步过程	(190)
思考题与习题	(199)

参考文献	(200)
第五章 复合核反应	(201)
§1 复合核反应理论基础	(201)
§2 出射粒子能谱和蒸发模型	(210)
§3 原子核的能级密度	(214)
§4 核反应的涨落现象	(226)
§5 中间结构与平衡前粒子发射	(238)
思考题与习题	(247)
参考文献	(248)
第六章 核反应的共振现象	(249)
§1 位场散射的共振现象	(249)
§2 单能级共振的 Breit-Wigner 公式 强度函数	(256)
§3 R 矩阵与多能级共振公式	(264)
思考题与习题	(273)
参考文献	(274)
第七章 重离子核反应	(275)
§1 引言	(275)
§2 弹性散射	(277)
§3 非弹性散射及少数核子迁移反应	(296)
§4 深度非弹性碰撞	(307)
§5 全熔合反应	(330)
思考题与习题	(338)
参考文献	(339)
第八章 原子核的裂变及 α 衰变	(341)
§1 裂变现象概述	(341)
§2 原子核的位能曲面	(351)
§3 惯性张量及粘滞性张量	(362)
§4 裂变几率	(368)
§5 裂变同质异能素及双峰位垒	(372)
§6 裂变的模型理论	(378)
§7 原子核的 α 衰变	(386)
思考题与习题	(391)
参考文献	(391)

前 言

研究核反应主要有三个目的：(一)通过核反应来研究原子核的结构，核的各种内部运动形态，如基态和激发态的性质等；(二)研究核反应的机制，即实现某种核反应所经历的物理过程以及反应截面的计算方法等；(三)为了某种应用的目的，如裂变和聚变反应以及有关同位素生产或活化分析的研究工作，就属于这一类。实验观测的核反应数据往往要通过理论分析才能获得关于核结构或反应机制方面的知识。

从理论的角度看，核反应就是一个广义的碰撞问题，原则上可以通过解定态薛定谔方程得到解决。本卷第一章将介绍核反应中常用的散射理论。核力是核反应中起重要作用的因素，这将在第二章中讨论。核反应往往是一个极复杂的多体问题，即使近似地去解薛定谔方程也很难找到恰当的方法。多年来在理论与实验密切结合的基础上，关于轻离子低能核反应的机制已经有了一个比较全面的、系统的了解。这些理论将在第三、四、五、六章中介绍。裂变和重离子核反应牵涉到原子核的大形变集体运动，属于核多体理论中最困难的部分，目前还缺乏比较成熟的理论模型。这些问题将在第七、第八两章中介绍。

阅读本卷需要具备大学物理系本科讲授的理论物理，特别是量子力学方面的知识，但并不需要有核结构方面的详细知识。大学原子核物理中所介绍的、有关壳模型和综合模型方面的知识，对于理解本书大部分内容是必要的。所需其它的核结构知识则在有关的章节中作了简单介绍。也就是说，如果读者只要求对本卷内容有一个基本了解，可以不必参考本书第一卷或翻阅其它参考资料。为了便于读者作深入地钻研，每章后面都有参考文献。一般地讲，阅读这些参考文献，将有助于对反应机制作深入地探讨，或者计算某些反应截面。为了进行这些研究工作，需要对核结构有较深入的理解，这将促进核结构的研究工作。本书第一卷可为研究低能核反应提供关于核结构及核衰变的一般知识。

核反应是一个范围广泛、发展迅速的学科领域。本书内容将限于低能核反应，也没有讨论少体核反应问题，这些都是需要在其它专著中讨论的问题。

第一章 核反应过程的散射理论

用经过加速的粒子轰击原子核，观察它所引起的变化，是人们研究原子核的主要手段。从量子力学的观点看，这种复杂的过程可以统称为散射或碰撞。这类问题能够严格计算的非常有限。所谓核反应理论，概括地讲，就是处理这类散射问题的各种近似方法。本章第一、二两节将讨论粒子在位场中的散射，这是可以严格解的散射问题。第三、四两节介绍散射的形式理论，适用于一般的核反应。以后的四节分别讨论扭曲波玻恩近似、核反应的全同粒子交换效应、冷中子为束缚原子核的散射以及散射的极化等四个问题。

量子力学中处理散射问题，可以采用两种不同的观点。可以把散射看成是体系的一种稳定态，也可以看成为一个跃迁过程。当然，两种方法的结果是相同的。从逻辑上讲，看成是跃迁过程可能更为合理，但作为稳定态来处理在数学上要方便一些。以下将主要把散射作为稳定态来处理。

§1 中心场作用下的散射问题

1.1 边界条件及截面表达式 一质量为 m 能量为 E 的粒子在位场 V 的作用下，其定态波函数满足薛定谔方程

$$(\nabla^2 + k^2 - U)\psi = 0 \quad (1.1.1)$$

式中 $U = \frac{2m}{\hbar^2}V$, $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ 。对于以位场 V 相互作用的两个粒子，其相对运动波函数同样满足式(1.1.1)，那时 m 为折合质量， E 为相对运动能量，即体系质心系的能量。因此本节及下一节讨论的结果同样适用于以位场相互

作用的两粒子散射问题。

对于散射问题，式(1.1.1)的解 ψ 应满足边界条件：

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi \rightarrow e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi) \quad (1.1.2)$$

这里假定当 $r \rightarrow \infty$ 时，能找到一个大于1的数 α ，使 $V(r)$ 满足

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^\alpha V(r) = 0 \quad (1.1.3)$$

库仑场不满足这条件，有关问题将在

1.4节中讨论。那时也将说明，为什么采用边界条件(2)时要对位场作式(1.1.3)的限制。

式(1.1.2)的物理意义如图1.1.1所示， e^{ikz} 为沿 z 轴方向入射的平面波， $\frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi)$

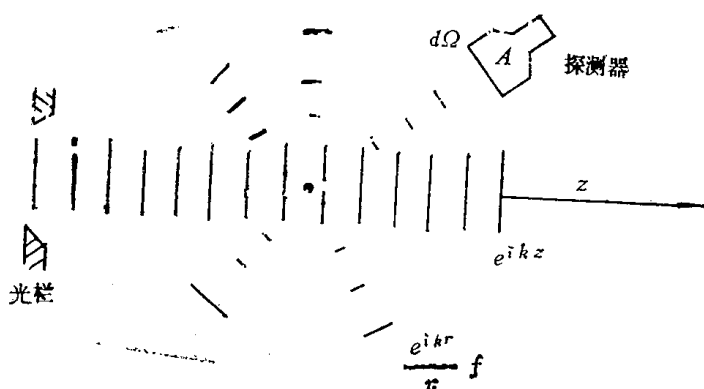


图1.1.1 散射实验示意图

为球面散射波。因此通过垂直于 z 方向的入射粒子流为 $\frac{\hbar k}{m}$, ($\frac{\hbar k}{m}=v$, 为粒子在距散射中心无限远处的速度)。如在图 1.1.1A 处放一探测器, 对散射中心所张立体角为 $d\Omega$, 距离为 R , 则其截面积为 $R^2 d\Omega$ 。单位时间射入该探测器的粒子数为

$$v \left| \frac{1}{R} f(\vartheta, \varphi) \right|^2 R^2 d\Omega = v |f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega \quad (1.1.4)$$

根据截面的定义, 粒子的微分截面 $\sigma(\vartheta, \varphi)$ 为当入射束流为 1 (即单位时间单位面积入射 1 粒子) 时, 单位时间散射进入单位立体角的粒子数。以公式来表示, 散射的微分截面 $\sigma(\vartheta, \varphi)$ 写成

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{v} |f(\vartheta, \varphi)|^2 = |f(\vartheta, \varphi)|^2 \quad (1.1.5)$$

$f(\vartheta, \varphi)$ 有时称为散射振幅。将微分截面对方向积分, 就得到总截面 σ_t ,

$$\sigma_t = \int \sigma(\vartheta, \varphi) d\Omega = \int |f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega \quad (1.1.6)$$

这些表达式, 只要稍加改变, 就可以适用于一般散射和核反应问题。上述讨论表明, 关于散射或反应的全部信息都包含在波函数的边界条件或渐近式中。由此可以得出两个结论: 第一、某种散射或反应的近似模型, 只要能给出正确的渐近表达式, 就可以获得与实验相符的散射或反应截面, 这在一定程度上解释了为什么某些表面上看来很简单的模型却取得了很大的成功; 第二、这在另一方面又表明, 在散射问题上取得成功, 不一定表示内部波函数也比较精确, 因此一个模型往往要从很多方面加以检验。

1.2 分波法 对于中心力场, V 仅是 r 的函数, 轨道角动量守恒, 波函数 ψ 可按角动量分波展开

$$\psi = \frac{1}{kr} \sum f_l(r) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.1.7)$$

这时 f_l 满足径向波方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] f_l(r) = 0 \quad (1.1.8)$$

在式 (1.1.7) 中, 只选用了磁量子数为零的态。这是因为入射波沿 z 方向, 各分波的磁量子数均为零, 根据角动量守恒原理, ψ 中亦不含磁量子数不为零的分波。

当 $U(r)=0$ 时, 式 (1.1.8) 的解为球贝塞尔函数 $j_l(kr)$ 及 $n_l(kr)$

$$r \rightarrow 0, \quad j_l \rightarrow (kr)^l / (2l+1)!!, \quad n_l \rightarrow (2l+1)!! (kr)^{-l}$$

$$(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad j_l \rightarrow \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi\right), \quad n_l \rightarrow \cos\left(kr - \frac{l}{2}\pi\right)$$

(有些书上定义 $j_l(r)/r$, $n_l(r)/r$ 为球贝塞尔函数。) 因此, 当 r 较大, $U(r) \rightarrow 0$ 时,

$$f_l(r) \rightarrow A_l (\cos \eta_l j_l + \sin \eta_l n_l) \rightarrow A_l \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \eta_l\right) \quad (1.1.9)$$

式 (1.1.9) 中 η_l 由径向波方程式 (1.1.8) 决定, 而 A_l 则为待定常数。显然, 当 $U(r)=0$ 时, $\eta_l=0$, 因为 n_l 在 $r=0$ 处是发散的, $U(r)$ 为零的解不能包含 n_l 项。因此 η_l 是在位场作用下引起的位相变化, 称为 l 波的相移, 式 (1.1.9) 还可写成

$$A_l \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \eta_l\right) = -\frac{A_l}{2i} e^{-i\eta_l} [e^{-i(kr - \frac{l}{2}\pi)} - S_l e^{i(kr - \frac{l}{2}\pi)}] \quad (1.1.10)$$

式中右方两项分别表示球面入射波和出射波。 $S_l = e^{i\eta_l}$ 为散射矩阵 S 的 l 分波矩阵元。对于中心场的散射, S 矩阵只有对角元 S_{ll} , 简称为 S_l 。在一般散射理论中 S 矩阵是一个很重要的量, 以后还要讨论它的性质。对于实位场, 粒子数守恒, 出射波的振幅应该和入射波相同, 故 $|S_l| = 1$, 即相移 η_l 一定是实数。

式 (1.1.10) 还可以写成

$$A_l \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \eta_l\right) = B_l \left[\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right) + \frac{(S_l - 1)}{2i} e^{ikr - i\frac{\pi}{2}l} \right]$$

将上面的 $f_l(r)$ 的渐近式代入式 (1.1.7), 稍加整理, 得

$$\psi \rightarrow \sum \frac{1}{kr} B_l \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right) P_l(\cos\theta) + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \quad (1.1.11a)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum B_l e^{-i\frac{\pi}{2}l} (S_l - 1) P_l(\cos\theta) \quad (1.1.11b)$$

将式 (1.1.11a) 与 (1.1.2) 比较, 可见如能确定 B_l 使式 (1.1.11a) 箭头右方第一项组合成平面波, 则式 (1.1.11b) 就给出了散射振幅。平面波的展开式为

$$e^{ikr} = \frac{1}{kr} \sum (2l+1) e^{i\frac{\pi}{2}l} j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (1.1.12a)$$

$$\rightarrow \frac{1}{kr} \sum (2l+1) e^{i\frac{\pi}{2}l} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right) P_l(\cos\theta) \quad (1.1.12b)$$

与式 (1.1.11a) 右方第一项比较, 得

$$B_l = (2l+1) e^{i\frac{\pi}{2}l}$$

代入 (1.1.11b), 得

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum (2l+1) (S_l - 1) P_l(\cos\theta) \quad (1.1.13a)$$

$$\text{或} \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum (2l+1) e^{i\eta_l} \sin\eta_l P_l(\cos\theta) \quad (1.1.13b)$$

由此可见, 处理散射问题的步骤是, 解方程式 (1.1.8) 求得 η_l , 再由式 (1.1.13a) 或 (1.1.13b) 算得 $f(\theta)$, 微分截面为

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum (2l+1) e^{i\eta_l} \sin\eta_l P_l(\cos\theta) \right|^2 \quad (1.1.14)$$

$$\text{或} \quad \sigma(\theta) = \frac{1}{4k^2} \left| \sum (2l+1) (S_l - 1) P_l(\cos\theta) \right|^2$$

对角度积分, 可得总截面 σ_t

$$\sigma_t = \int \sigma(\theta) d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2\eta_l \quad (1.1.15)$$

$$\text{或} \quad \sigma_t = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2$$

比较 (1.1.13b) 与 (1.1.15), 可得

$$\text{Im}f(\theta) = \frac{1}{k} \sum (2l+1) \sin^2\eta_l = \frac{k}{4\pi} \sigma_t \quad (1.1.16)$$

上式称为弹性散射的光学定理, 式中 Im 表示取复数的虚数部分 (用 Re 表示取实数部分)。

这一定理表明, 可以从实验测得的总截面推得向前散射振幅的虚部。这个关系式常用在某些高能散射近似计算中。

1.3 短程力的散射 虽然在原则上可以用式 (1.1.13a, b), (1.1.14), (1.1.15) 来计算散射截面, 但如要计算很多的相移, 那也是很繁琐的, 往往要采用各种近似方法。在核物理中, 经常遇到的是短程力, 当 r 大于某一给定的长度 b (通常在 10^{-12}cm 到 $3 \times 10^{-13}\text{cm}$ 之间) 时, V 即完全可以忽略。对于这种力, 只有有限的分波对散射有贡献。可以用经典图象, 对有贡献分波的上限 l_m 作一估计。从经典力学看, 粒子的角动量 L 是粒子在无穷远处的动量 P 与碰撞参量 a 的乘积 (碰撞参量为无穷远处粒子运动的直线轨迹与散射中心的垂直距离)。因此, $a = L/P \approx l/k$ 。粗略地说, 可以认为粒子受到散射的条件为 $a < b$, 即 $l < kb$, 因此 l 的上限 l_m 为

$$l_m \approx bk \quad (1.1.17)$$

$l > bk$ 的分波, 对散射贡献较小, 一般可以忽略。

也可以由方程式 (1.1.8) 讨论 f_l 的一般行为, 从而取得相移随 l 变化的定性知识。在原点附近的变化如图

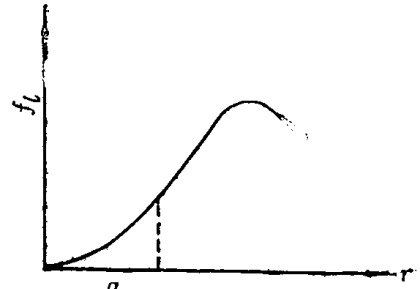


图1.1.2 径向波函数 f_l 在原点附近变化的示意图

1.1.2所示。如图中, a 为拐点, $\left(\frac{d^2}{dr^2}f_l\right)_{r=a} = 0$
即

$$\frac{l(l+1)}{a^2} - k^2 + U(a) = 0 \quad (1.1.18a)$$

$r < a$, f_l 向上弯, $r > a$, f_l 向下弯。在 $r < a$ 的区域 f_l 通常比较小。由式 (1.1.18a) 可见, l 越大, a 也越大, 拐点离原点也越远。如 $a > b$, 则 $U(a) \approx 0$; 式 (1.1.18a) 给出

$$a = \sqrt{l(l+1)}/k \approx L/P \quad (1.1.18b)$$

由此可见, 经典的碰撞参量即对应于自由粒子波函数 f_l 拐点的位置。当 $a > b$ 时, 作用位能不能显著地改变拐点的位置, 也不能引起较大的相移。一般地讲, l 越大, a 也越大, U 对拐点位置的影响也越小。所以, 通常 η_l 随 l 的增加而减小。由式 (1.1.18a) 还可以看到, 对于吸引力, $U(r) < 0$, 其作用是减小 a 的值, 即使径向波函数向原点移动, 因此引起的相移是正的。相反, 排斥作用, $U(r) > 0$, 则引起负的相移。

当入射粒子能量很低, $kb < 1$ 时, 只有 $l=0$ 的分波 (s 波) 对散射作主要贡献, 这相当于经典力学的对心碰撞。这时, 散射在质心系是各向同性的, 其总截面为

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \eta_0 \quad (1.1.19)$$

这种散射常称为 S 波散射, 其特征为在质心系中角分布各向同性。这种情况在低能核物理中常常遇到。现在比较详细地讨论一下这种散射的规律。

先讨论能量特别低, $kb \ll 1$ 的情况^[1]。这时, 在 $r \geq b$ 处

$$f_0(r) \approx A[(\cos \eta_0)kr + \sin \eta_0] = B\left[-\frac{r}{a} + 1\right] \quad (1.1.20)$$

式中 $\frac{1}{a} = -k \cot \eta_0$, 为 $k \rightarrow 0$ 时 $-k \cot \eta_0$ 的极限值。

$$\frac{1}{a} = -\lim_{k \rightarrow 0} k \cot \eta_0 \quad (1.1.21)$$

取 $k=0$, 解 (1.1.20), 即可求得 a 。在低能极限下的总散射截面 σ_t 为

$$\sigma_t = 4\pi \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \eta_0}{k^2} = 4\pi \alpha^2 \quad (1.1.22)$$

总散射截面是一个常数，正比于 α^2 ，所以 α 称为散射长度。

如位场是吸引力，而且在它的作用区间里，对应于 $k=0$ 的解， f_0 只有 $r=0$ 处一个零点，则在这样的位场内有无束缚态和 α 的符号有简单的关系： $\alpha > 0$ ，位场内可以有一个束缚态，如 $\alpha < 0$ ，则位场内没有束缚态，其理由如下。如存在结合能为 $-E$ 的束缚态，其径向波函数仍应满足 (1.1.20)，不过 k^2 应换成 $-\varepsilon^2$ ， $\varepsilon^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ 。当 $r > b$ 时， $f_0 = Ae^{-\varepsilon r}$ ，

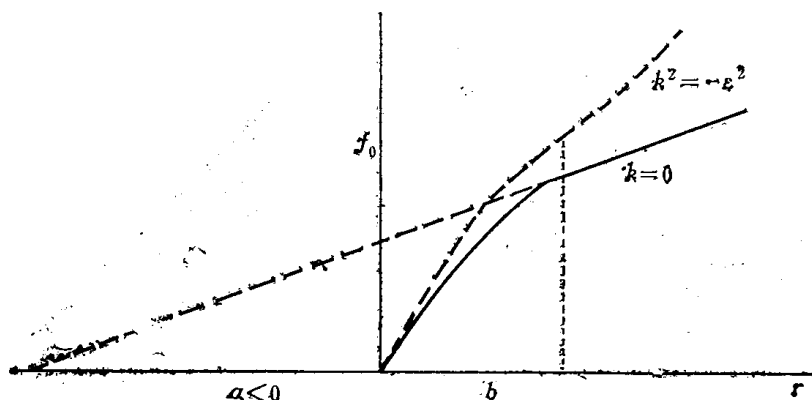
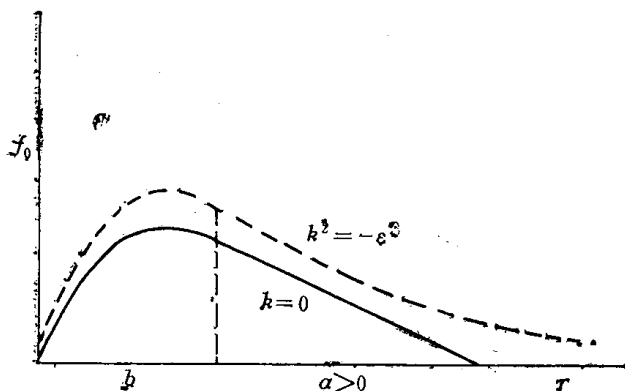


图1.1.3 $k=0$ 时 f_0 行为示意图

$\frac{1}{f_0} \frac{df_0}{dr} = -\varepsilon$ 。当 f_0 除 $r=0$ 处外没有零点时，由式(1.1.20)很

容易证明， $\frac{1}{f_0} \frac{df_0}{dr}$ 的值在 $r \sim b$ 处总是随 k^2 的减小而增加的。如图1.1.3b所示若 $\alpha < 0$ ，

在 $k=0$ 时 $\frac{1}{f_0} \frac{df_0}{dr} > 0$ ， k^2 变

成 $-\varepsilon^2$ ， $\frac{1}{f} \frac{df}{dr}$ 还要增加，不

可能满足 $\frac{1}{f_0} \frac{df_0}{dr} = -\varepsilon$ 的边界条件，因此没有束缚态（如图1.1.3b）。若 $\alpha > 0$ ，则在 k

$=0$ 时 $f_0^{-1} \frac{df_0}{dr} < 0$ ，因此总

可以求一个 ε ，使 f_0 满足束缚态的边界条件（如图1.1.3

a）。显然，只能有一个束缚态。

式 (1.1.20) 中只出现 k^2 项，而 $k \cot \eta_0$ 在 $k=0$ 时有极限值，故 $k \cot \eta_0$ 应为 k 的偶函数。对于小的 k 值，将 $k \cot \eta_0$ 按 k^2 展开，取到第二项，得

$$k \cot \eta_0 = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + O(k^4) \quad (1.1.23a)$$

式中 r_0 称为有效力程。 r_0 的近似表达式为（参看习题1）

$$r_0 = 2 \int_0^\infty [\varphi^2(r) - f_0^2(r)] dr \quad (1.1.23b)$$

式中 f_0 为 $k=0$ 时式(1.1.20) 的解，满足渐近式

$$f_0 \rightarrow \varphi = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)$$

式 (1.1.23b) 的被积函数在 $r=0$ 处为1， $r \geq b$ 处为零，从0到 b 的平均值约为 $1/2$ ，因此 $r_0 \sim b$ 。实际上除了方位阱以外，一个位场的力程是很难确切定义的，式 (1.1.23b) 可以作为对力程的一个定量的量度。式 (1.1.23a) 有时称为有效力程公式，对于短程力，近似

地适用于 $kr_0 \lesssim 1$ 的区域。

1.4 库仑场中的散射 两个带电荷 Z_1e 和 Z_2e 的原子核之间的相互作用位势可以写成

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + V_0$$

V_0 是核相互作用。由于库仑力是长程力，分波法要做一些相应的变化。先讨论纯库仑场的作用，然后再加上核相互作用。

在纯库仑场作用下，相对运动波方程式可写成

$$(\nabla^2 + k^2 - U_c) \psi = 0 \quad (1.1.24)$$

或者写成分波的径向方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - U_c \right] f_l = 0 \quad (1.1.25)$$

式中 $U_c = \frac{2k\rho}{r}$, $\rho = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 k}$, μ 为折合质量。

尽管当 $r \rightarrow \infty$ 时 $U_c \rightarrow 0$ ，它在 r 很大时，仍有影响。在库仑场的作用下，在 r 很大时， ψ 和 f_l 均不趋近于自由粒子的波函数。这是这种长程相互作用的一个主要特点。为了说明这一点，可求出 f_l 在 r 很大时的渐近式。设

$$f_l = v(r) e^{ikr}$$

代入式 (1.1.25)，得

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + 2ik \frac{d}{dr} - \left[U_c + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} v(r) = 0$$

设在 r 很大时， $v(r)$ 随 r 缓慢变化，忽略关于 $v(r)$ 的二次微分项，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln v &= -\frac{i}{2k} \left(U_c + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \\ \ln v &= -\frac{i}{2k} \int U_c dr - \frac{i}{2k} l(l+1) \int \frac{1}{r^2} dr \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

当 U_c 满足条件 (1.1.3) 时，上式中两个积分在 $r \rightarrow \infty$ 时是收敛的，故 v 趋近一常数， f_l 趋近自由粒子波函数。对于库仑场，式 (1.1.26) 右方两个积分很容易算出，当 $r \rightarrow \infty$ 时，

$$\ln v \rightarrow -\frac{i}{2k} 2\rho k \ln r + \ln C$$

$$v \rightarrow C e^{-i\rho \ln r}$$

由此可见，当 $r \rightarrow \infty$ 时， f_l 的渐近式一般可以写为

$$f_l \rightarrow A_l e^{ikr - i\rho \ln(2kr)} + B_l e^{-ikr + i\rho \ln(2kr)}$$

上式表明，当 $r \rightarrow \infty$ 时，库仑场对波函数仍有扭曲作用。

实际上，式 (1.1.25) 的解，经过简单的变换，可以表示为超比几何级数^[2]。可将其写成为 F_l 及 G_l 。当 $r \rightarrow \infty$ 时

$$F_l \rightarrow \sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_{lc} - \rho \ln(2kr) \right)$$

$$G_l \rightarrow \cos \left(kr - \frac{\pi}{2} l + \delta_{lc} - \rho \ln(2kr) \right)$$

式中, $\delta_{lc} = \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{\rho(l+1+i\rho)}{\rho(l+1-i\rho)} \right]$ 为库仑相移, Γ 为 Γ 函数。 F_l 及 G_l 称为库仑波函数, $r \rightarrow 0$,

$F_l \rightarrow 0$ 是规则解, G_l 为非规则解。因此, 对于纯库仑场

$$\psi_c = \sum B_l \frac{1}{kr} F_l P_l$$

参照1.2节的方法, 可取 $B_l = (2l+1) e^{i(\delta_{lc} + \frac{\pi}{2}l)}$ 。

这样,
$$\psi_c = \sum (2l+1) e^{i(\delta_{lc} + \frac{\pi}{2}l)} \frac{1}{kr} F_l P_l \quad (1.1.27a)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \sum (2l+1) (-1)^l \frac{(i)^l}{kr} \sin \left(kr - \rho \ln(2kr) - \frac{\pi}{2}l \right) P_l(\cos \theta) \\ &+ \frac{1}{2ikr} e^{ikr - i\rho \ln(2kr)} \sum (2l+1) (e^{2i\delta_{lc}} - 1) P_l \end{aligned} \quad (1.1.27b)$$

与式(1.1.12)及(1.1.13)比较, 不难看出(1.1.27b)箭头右方第一项为经过扭曲的平面波, 而第二项为球面出射波。式(1.1.27a)虽然在原则上给出了库仑散射的波函数, 并不便于实际计算。通过直接解方程式(1.1.24), 可以证明^[2], 当 $r \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \psi_c &\rightarrow \left(1 - \frac{\rho^2}{ik(r-z)} \right) \exp \{ ikz + i\rho \ln[k(r-2)] \} \\ &+ \frac{1}{r} \exp[ikr - i\rho \ln(2kr)] f_c(\theta) \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

$$f_c(\theta) = \frac{\rho}{2k} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp \left[-i\rho \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + i\pi + 2i\delta_{oc} \right] \quad (1.1.29)$$

将式(1.1.28)与(1.1.27b)比较, 并令 $r \rightarrow \infty$, 不难看出两式相互对应, 因此

$$\frac{1}{2ik} \sum (2l+1) (e^{2i\delta_{lc}} - 1) P_l = \frac{\rho}{2k} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp \left[-i\rho \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + i\pi + 2i\delta_{oc} \right]$$

上式是可以直接证明的, 不过计算比较复杂。由(1.1.29)可得库仑散射的微分截面,

$$\sigma(\theta) = |f_c(\theta)|^2 = \frac{\rho^2}{4k^2} \sin^{-4} \frac{\theta}{2} = \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \right]^2 \quad (1.1.30)$$

和经典力学所得公式一致。式(1.1.28)的箭头右方第一项不完全是平面波, 但是可以证明, 在离散射中心很远, $\theta \neq 0$ 的地方探测到的粒子沿 r 方向飞行, 并且由球面波部分提供。

当有核作用时, f_l 满足方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - U_c - U_n \right] f_l = 0 \quad (1.1.31a)$$

式中 U_n 为与核作用相对应的 U 函数。 f_l 的渐近式可写成

$$f_l \rightarrow B_l \sin \left(kr - \frac{\pi}{2}l - \rho \ln(2kr) + \delta_{lc} + \delta_{ln} \right) \quad (1.1.31b)$$

式中 δ_{ln} 为由核作用引起的附加的相移。取

$$b_l = (2l+1) \exp \left[i \left(\delta_{l,c} - \delta_{l,a} + \frac{\pi}{2} l \right) \right]$$

我们得到

$$\begin{aligned} \psi &= \sum \frac{1}{kr} f_l P_l \\ &\rightarrow \psi_c + \frac{1}{r} \exp[i(kr - \rho \ln(2kr))] f_a \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

$$f_a = \frac{1}{2ki} \sum (2l+1) e^{i\delta_{l,c}} (e^{i\delta_{l,a}} - 1) P_l \quad (1.1.33)$$

总的散射振幅为 $f(\theta) = f_a(\theta) + f_c(\theta)$ 。当然，把散射振幅分为两项，并不意味着两种作用互无影响。实际上低能核散射常常受到库仑场很大的影响。

对于低能散射，也可以求得类似式 (1.1.23a) 的有效力程公式^[3],

$$2\rho k \left[\frac{\pi \cot \eta_{a0}}{e^{2\pi\rho} - 1} + h(\rho) \right] = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} k^2 r_0 \quad (1.1.34)$$

$$h(\rho) = \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + \rho^2)} - \ln \rho - \gamma$$

式中 γ = 尤拉常数, 0.57722

$$r_0 = 2 \int_0^{\infty} (\varphi^2 - f_a^2) dr$$

式中 f_a 为 $k=0, l=0$ 时式 (1.1.31a) 的解, φ 为 V_a 也为零时式 (1.1.31a) 的解。在核力作用力程以外, $f_a = \varphi$, 且 $\varphi(0) = 1$ 。和没有库仑场时比较, 如其他情况相同, 则 r_0 差别很小, 但相移 δ_{a0} 及散射长度 α 则变化较大。由于库仑排斥作用, 在同样核位阱作用下, 相移可以小很多。

§2 自旋轨道耦合及张量力作用下的散射

在第一节里没有考虑粒子的自旋。如果力与自旋无关, 散射不改变粒子的自旋态, 一般除了全同粒子的散射外, 不必考虑自旋态。如果作用仍为中心场, 不过体系的总自旋态不同, 则作用不同 (例如两个自旋为 $1/2$ 的粒子, 自旋平行和反平行时作用不同), 则对这类散射问题, 前一节的讨论只要稍加改变, 仍然适用。如果相互作用包含了自旋与轨道运动的耦合, 会引起自旋态的变化, 情况要复杂一些。本节将讨论两种最常见的情况, 自旋轨道耦合力和张量力。

2.1 自旋轨道耦合力^[4] 自旋轨道耦合力的形式为

$$V_{so} = \frac{1}{\hbar^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} V_s(r) \quad (1.2.1)$$

$\mathbf{S}$ 为粒子自旋或体系的总自旋算符, $\mathbf{L}$ 为相对运动角动量算符, 这是一种在核子与核子相互作用和核子与核相互作用中普遍存在一种位能形式。当 $V_s(r)$ 取负值时, 这种力的作用倾向于使自旋方向与轨道角动量相一致, 而当 $V_s(r)$ 取正值时则倾向于使自旋方向与轨道角动量反向, 总之它的作用会改变自旋的取向, 引起散射粒子的极化。

在这种力的作用下体系的哈密顿量可写成

$$H = \frac{1}{2\mu} p^2 + V_c + V_{so}$$

一般地讲, 自旋轨道耦合力总是伴随着中心力起作用的, 因此上式中也包含了 V_c 一项。 H 显然和 $\mathbf{J}(=\mathbf{L}+\mathbf{S})$, L^2, S^2 交换, 因此 j, m (总磁量子数), l, s 都是好量子数。可按这些量子数来分波。令

$$\psi = \sum_{l, m} \frac{1}{kr} f_{ll}(r) F_{ll}^m \quad (1.2.2a)$$

$$F_{ll}^m = \sum_{m'} \langle l, m-m', s, m' | jm \rangle Y_{l, m-m'} x_{s, m'} \quad (1.2.2b)$$

式中 $x_{s, m}$ 为自旋波函数。以 ψ 代入薛定谔方程, 得 f_{ll} 的方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U_{ll} \right] f_{ll} = 0 \quad (1.2.3a)$$

式中

$$U_{ll} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{2} [j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)] V_c + V_{so} \right\} \quad (1.2.3b)$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时

$$f_{ll} \rightarrow B_{ll} \left\{ \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) + \frac{1}{2i} (S_{ll} - 1) \exp \left[i \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

式中 $S_{ll} = \exp(2i\eta_{ll})$, η_{ll} 为由式(1.2.3)所确定的相移。由上式可得 ψ 的渐近式

$$\psi \rightarrow \frac{1}{kr} \sum_{ll} B_{ll} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) F_{ll}^m + \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{ll} B_{ll} e^{-i\frac{l\pi}{2}} (S_{ll} - 1) F_{ll}^m \quad (1.2.4)$$

入射平面波亦可按 j, l 分波展开, 得

$$\begin{aligned} e^{ikz} x_{s, m} &= \frac{1}{kr} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) e^{i\frac{\pi}{2}l} Y_{l, 0} X_{s, m} \\ &= \frac{1}{kr} \sum_{ll} \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\frac{\pi}{2}l} j_l(kr) \langle l, 0, s, m | jm \rangle F_{ll}^m \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

与式(1.1.4)比较, 得

$$B_{ll} = \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\frac{\pi}{2}l} \langle l, 0, s, m | jm \rangle$$

代入式(1.2.4)的右方第二项, 得散射振幅 $f_m(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{2ik} \sum_{ll} \sqrt{4\pi(2l+1)} \langle l, 0, s, m | jm \rangle (S_{ll} - 1) F_{ll}^m \\ &= \sum_{m'} f_{mm'} X_{s, m'} \end{aligned} \quad (1.2.6a)$$

$$f_{mm'} = \frac{1}{2ik} \sum_{ll} \sqrt{4\pi(2l+1)} \langle l, 0, s, m | jm \rangle \langle l, m-m', sm' | jm \rangle (S_{ll} - 1) Y_{l, m-m'} \quad (1.2.6b)$$

$f_{mm'}$ 为经过散射, 自旋取向由磁量子数为 m 变为 m' 的散射振幅, 相应的微分截面为

$$\frac{d\sigma_{mm'}}{d\Omega} = |f_{mm'}|^2 \quad (1.2.7a)$$

把微分截面写成 $\sigma_{mm'}(\theta)$ 或 $\frac{d\sigma_{mm'}}{d\Omega}$ ，不过是书写形式的差别，以后将更多采用后一形式。如用非极化束打非极化靶，散射后也不区分不同的自旋取向，则微分截面应对始态的自旋取向求平均，对末态的自旋取向求和，得

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2s+1} \sum_{m,m'} |f_{mm'}|^2 \\ &= \frac{\pi}{k^2} \frac{1}{2s+1} \sum_{m,m'} \left| \sum_{j,l} \sqrt{2l+1} \langle l,0,s,m | jm \rangle \langle l,m-m',s,m' | jm \rangle (s_{jl}-1) Y_{l,m-m'} \right|^2 \end{aligned} \quad (1.2.7b)$$

对方向积分，得总截面 σ_t

$$\sigma_t = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{(2s+1)k^2} \sum_{j,l} |s_{jl}-1|^2 \sum_m (2l+1) |\langle l,0,s,m | jm \rangle|^2$$

利用耦合系数 $\langle l,0,s,m | jm \rangle$ 的对称性质，很容易证明

$$\sum_m (2l+1) |\langle l,0,s,m | jm \rangle|^2 = (2j+1) \sum_m |\langle s,m,j-m | l,0 \rangle|^2 = 2j+1$$

故

$$\sigma_t = \frac{\pi}{k^2} \frac{1}{2s+1} \sum_{j,l} (2j+1) |S_{jl}-1|^2 \quad (1.2.8)$$

不难证明，当 S_{jl} 与 j 无关时，上式简化为(1.1.15b)，即和不考虑自旋时相同。

2.2 张量力作用下的散射^[5] 首先在核力中发现核子与核子相互作用中存在着如下形式的位能

$$V_{12} = S_{12} V_t(r); \quad S_{12} = 3 \frac{(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_2 \cdot r)}{r^2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (1.2.9)$$

式中 σ_1, σ_2 为两核子的泡利自旋算符。如取 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ ，则 S_{12} 又可写成如下的形式

$$\begin{aligned} S_{12} &= 6(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 / r^2 - 2S^2 \\ &= \frac{16\pi}{5r^2} \sum_m (-1)^m Y_{2m} S_{2,-m} \end{aligned} \quad (1.2.10a)$$

上式中 Y_{2m} 和 S_{2m} 均为2阶球张量，其定义为在坐标轴转动下变换性质和角动量本征函数相同的算符，因此含算符 S_{12} 的力称为张量力。 Y_{2m} 和 S_{2m} 的具体表式如下

$$\left. \begin{aligned} Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3z^2 - r^2) & S_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3S_z^2 - S^2) \\ Y_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} z(x \pm iy) & S_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} [S_z(S_x \pm iS_y) + (S_x \pm iS_y)S_z] \\ Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x \pm iy)^2 & S_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (S_x \pm iS_y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.10b)$$

既然核子核子相互作用中包含这种力, 那么, 其它复合粒子和核的相互作用也会含有这种张量力。例如, 氘核和原子核的相互作用就含有这种力的成分。这种力使相互作用位能和径矢 $\mathbf{r}$ 与自旋 $\mathbf{S}$ 的相对取向有关, 不再是中心力场。因此这种力有时又称为非中心力。

在这种力的作用下 j, m, s 仍然是好量子数, 但 l 不再是好量子数。对给定的 j, l 的值可从 $|j-s|$ 变到 $|j+s|$ 。实际上将只用到 $s=1$ 的情况。这时, 除 $j=0$ 外, l 可取 $j \pm 1, j$ 三个值, 但是 $l=j$ 的态与 $l=j \pm 1$ 的态宇称不同, 不相混合。采用式 (1.2.2) 的 ψ , 代入薛定谔方程, 得到 f_{jl} 所满足的方程式组

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j-1)}{r^2} + k^2 - U_c - A_{j-1,j-1} U_t \right) f_{j,j-1} - A_{j-1,j+1} U_t f_{j,j+1} = 0 \quad (1.2.11a)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} + k^2 - U_c - A_{j+1,j+1} U_t \right) f_{j,j+1} - A_{j+1,j-1} U_t f_{j,j-1} = 0 \quad (1.2.11b)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} + k^2 - U_c - A_{j,j} U_t \right) f_{j,j} = 0 \quad (1.2.11c)$$

上式中 $U_c = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_c$, $U_t = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_t$, $A_{ll'} = \langle j l s | S_{12} | j l' s \rangle$, 当 $s=1$ 时

$$\begin{aligned} A_{j+1,j+1} &= -\frac{2(j+2)}{2j+1} \\ A_{j,j} &= 2 \\ A_{j-1,j-1} &= -\frac{2(j-1)}{2j+1} \\ A_{j+1,j-1} &= A_{j-1,j+1} = 6\sqrt{j(j+1)}/(2j+1) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

方程式 (1.2.11c) 不与其他两式耦合, $f_{j,j}$ 的渐近式为

$$f_{j,j} \rightarrow \frac{a_j}{2i} \left\{ -\exp \left[-i \left(kr - \frac{\pi}{2} j \right) \right] + S_{jj} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi}{2} j \right) \right] \right\} \quad (1.2.13)$$

$S_{jj} = \exp(2i\delta_{jj})$, 由式 (1.2.11c) 所决定。 $f_{j,j-1}$ 和 $f_{j,j+1}$ 由联立方程组 (1.2.11a) 和 (1.2.11b) 所决定。这组微分方程式有四个线性独立的解, 但只有两组解满足 $f_{j,j-1}(0) = f_{j,j+1}(0) = 0$ 的条件。因此一般的正规解应包含两个待定常数, 其渐近式可写成

$$\begin{aligned} f_{j,j-1} &\rightarrow \frac{1}{2i} \left\{ -a_{j-1} \exp \left[-i \left(kr - \frac{j-1}{2} \pi \right) \right] + b_{j-1} \exp \left[i \left(kr - \frac{j-1}{2} \pi \right) \right] \right\} \\ f_{j,j+1} &\rightarrow \frac{1}{2i} \left\{ -a_{j+1} \exp \left[-i \left(kr - \frac{j+1}{2} \pi \right) \right] + b_{j+1} \exp \left[i \left(kr - \frac{j+1}{2} \pi \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

上式中可取 a_{j-1} 及 a_{j+1} 为待定常数, 则 b_{j-1} , b_{j+1} 即由 $a_{j \pm 1}$ 及方程组 (1.2.11a, b) 所决定。由于方程组 (1.2.11a, b) 是线性的, 因此 $b_{j \pm 1}$ 与 $a_{j \pm 1}$ 之间也存在着线性关系。令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 分别为矢量

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ a_{j+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{j-1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix}$$

则可引入矩阵 S 来表示 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之间的关系

$$S\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (1.2.15)$$

S 的矩阵元 $S_{j \pm 1, j \pm 1}^{\pm}$, 由方程组 (1.2.11a, b) 所决定。例如, 可以解方程组 (1.2.11a, b) 求得