DAXUESHENG ZHI YOU

概率统计

解题分析

概率统计解题分析

费荣昌 编

江苏科学技术出版社

特约编辑　吴大伟

概率统计解题分析

费荣昌

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：淮阴新华印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 12　字数 260,000

1984 年 4 月第 1 版　1984 年 4 月第 1 次印刷

印数 1-29,000 册

书号：13196·161　定价：1.26 元

责任编辑　沈绍绪

《大学生之友》丛书出版说明

大学理工科的学生，包括电视大学、职工大学的学生，在学习过程中往往要演算大量的习题，以加深对课程内容的理解和记忆。但在解题时，经常会遇到各种各样的困难。《大学生之友》丛书就是为了帮助他们提高解题能力，熟练演算技巧，牢固地掌握学科知识而出版的。

丛书以解题分析为主。为了便于阅读，每节首先简要介绍有关的概念、定律和公式。然后，用较大的篇幅选择有代表性的例题进行剖析，讲述解题的思路，归纳解题的规律，指出必须注意的事项。最后，附以适量的习题，并提供答案或提示。

丛书内容密切配合大学教材，选题以数理化基础课和专业基础课为主，兼顾各专业课。各书的出版时间，也基本上按此顺序安排，逐步配套。

我们的愿望，想使这套丛书成为大学生喜爱的“朋友”。能否如愿，还有待于广大师生的检验。我们诚恳地欢迎读者对每一本书提出宝贵意见，使它们成为名副其实的“大学生之友”。

江苏科学技术出版社

前　言

目前，综合性大学、高等师范院校、工科院校、电视大学普遍开设了“概率论与数理统计”这门课程。学生在学习的时候，往往感到演算习题比较困难，解题方法不易掌握，而在现有的教材中，例题和解题方法的指导又较少。基于这些原因，我们编写了本书。作为高等院校的学生学习概率统计的辅助读物。

本书在选题过程中，注意配合理工科教材的内容，尽量做到例题类型和解题方法具有典型性和广泛性，其中对某些例题，解题前先作分析，解后又作了必要的说明。练习题的选配，力求做到与例题的类型一致，以便揣摩比较，熟练解题方法。书末附有答案和提示。

全书每节的内容提要，仅对有关概念、定理和公式作简要介绍，凡需进一步了解的读者可阅读洪再吉编的《概率统计》(江苏科学技术出版社，1984)。解题中需要使用概率统计用表时，可查阅中国科学院数学研究所概率统计室编的《常用数理统计表》(科学出版社，1979)。

南京大学夏定中、钟瑚绵副教授审阅了本书的初稿，并提出了宝贵的修改意见。编写过程中，还得到华宏祖、李中、吴大伟等同志的帮助，在此一并表示衷心的感谢。

编　　者　1984年1月

目　　录

第一章 事件与概率

第一节 事件的运算

一、内 容 提 要

1．事件的概念

在随机试验中，某一次试验可能发生也可能不发生，但大量重复试验却具有统计规律性，这样的试验结果称为随机事件，简称事件，常用大写字母A，B，C等表示．其中，每一个可能发生但不能再分的基本结果叫做基本事件．由多个基本事件所组成的事件叫做复合事件．

在试验中必然发生的事件叫做必然事件，用Ω来表示；必然不发生的事件叫做不可能事件，用ϕ来表示．

用集合论的语言来说，基本事件叫做样本点，用ω来表示．事件就是样本点组成的某个集合．而必然事件就是样本点的全体，叫做样本空间Ω．不可能事件就是空集ϕ．

2．事件之间的关系与事件的运算规律

（1）事件之间的关系

如果事件A发生必然导致事件B发生，那末，称事件A含于事件B，或称事件B包含事件A，记为$A\subset B$．

如果$A\subset B$，并且$B\subset A$，那末称事件A与事件B相等，记为$A=B$．

在事件A与事件B中至少有一个发生，这本身也是一个

事件，这一事件叫做事件A与事件B的并，记为$A\bigcup B$。与此相类似，在n个事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生，叫做A_1，A_2，…，A_n的并，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。在可列无穷多个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…中至少有一个发生，叫做$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的并，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

事件A与事件B同时发生，这一事件叫做事件A与事件B的交（也叫做积），记为$A\bigcap B$，或AB。与此相类似，n个事件A_1，A_2，…，A_n同时发生，叫做A_1，A_2，…，A_n的交，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。可列无穷多个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…同时发生，叫做$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的交，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

事件A发生而事件B不发生，这一事件叫做事件A与事件B的差，记为$A-B$。

如果事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\phi$，那末称事件A与事件B是互不相容的。这时，称$A\bigcup B$为A与B的和，记为$A+B$。当A_1，A_2，…，A_n两两互不相容时，称$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$为$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的和，记为$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$。当$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…两两互不相容时，称$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$为$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的和，记为$\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

如果事件A与事件B中必然有一个发生，但不能同时发生，即

$$A\cup B=\Omega,\ AB=\phi,$$

那末称A与B互为逆事件，也称B是A的逆事件（或A是B的逆事件），并把B记为$\overline{A}$（或把A记为$\overline{B}$）。

用集合论的语言来说，所谓$A\subset B$是指A中的每一个样本点都属于B。所谓$A=B$，是指A中的每一个样本点都属于B，B中的每一个样本点也都属于A。$A\cup B$是指至少属于A或B中的一个的所有样本点的集合。$A\cap B$是指同时属于A及B的所有样本点的集合。$A-B$是指属于A而不属于B的所有样本点的集合。$\overline{A}$是指不属于A的所有样本点的集合。所谓A与B互不相容是指A与B没有公共的样本点。

(2) 事件的运算规律

①交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

②结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

③交对并的分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$，并对交的分配律　$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$；

④重迭律　$A\cup A=A$，$AA=A$；

⑤两次求逆律　$\overline{\overline{A}}=A$；

⑥互逆律　$A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\phi$；

⑦差化积　$\underline{A-B=A\overline{B}}$；

⑧吸收律　如果$A\subset B$，那末$A\cup B=B$，$AB=A$；作为特殊情况，有

$$A\cup\Omega=\Omega,\ A\Omega=A;$$

$$A+\phi=A,\ A\phi=\phi;$$

⑨反演律（莫根定理）

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B};$$

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}.$$

（3）事件运算的顺序

用运算符号把事件联结起来的算式叫做事件式。在事件式中，运算的顺序规定如下：第一“逆”，第二“交”，第三“并（加）”或“差”，但如有括号，则优先执行括号里的运算. 例如 $AB\cup\overline{A}\overline{B}$ 的运算次序是首先求 A 的逆事件 $\overline{A}$ 及 B 的逆事件 $\overline{B}$；其次求 A 与 B 的交 AB 及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的交 $\overline{A}\overline{B}$；最后求 AB 与 $\overline{A}\overline{B}$ 的并 $AB\cup\overline{A}\overline{B}$. 根据事件运算的顺序，$(AB)\cup(\overline{A}\overline{B})$ 可以写成 $AB\cup\overline{A}\overline{B}$，$A\cup(\overline{B\cup C})$ 可以写成 $A\cup\overline{B\cup C}$，但是 $(A\cup B)(C\cup D)$ 不能写成 $A\cup BC\cup D$.

二、例 题 分 析

例 1 设 A，B，C 是三个事件，试用 A，B，C 的事件式分别表示下列各事件：（1）A，B，C 中至少有一个发生；（2）A，B，C 中恰有一个发生；（3）A，B，C 中不多于一个发生.

解 （1）因为 A，B，C 中至少有一个发生就是 A，B，C 的并，因此可以用 $A\cup B\cup C$ 表示.

（2）因为 A，B，C 中恰有一个发生，就是 A 发生，B，C 不发生，或 B 发生，C，A 不发生，或 C 发生，A，B 不发生，因此可以用 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$ 表示.

（3）因为 A，B，C 中不多于一个发生，就是 A，B，C 中恰有一个发生，或 A，B，C 都不发生，因此可以用 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 表示. 由于

$$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$
$$=(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C})$$

用与满图

$$\cup(\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$ （重迭律）

$$=\overline{B}\,\overline{C}(A+\overline{A})\cup\overline{C}\,\overline{A}(B+\overline{B})\cup\overline{A}\,\overline{B}(C+\overline{C})$$ （分配律）

$$=\overline{B}\,\overline{C}\,\Omega\cup\overline{C}\,\overline{A}\,\Omega\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\Omega$$ （互逆律）

$$=\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}\cup\overline{A}\,\overline{B},$$ （吸收律）

因此也可以用$\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}\cup\overline{A}\,\overline{B}$表示。

例 2 在五个数字 1,2,3,4,5 中任取一数，以$A=\{1,2,3\}$表示取得 1，或 2，或 3，$B=\{2,3,4\}$表示取得 2，或 3，或 4。试问下列各事件式：(1) $\overline{A}B$；(2) $\overline{A}\cup B$；(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$ 分别表示什么？

解 (1) 因为

$$\overline{A}=\{4,\ 5\},\qquad B=\{2,\ 3,\ 4\},$$

所以

$$\overline{A}B=\{4\}.$$

(2) $\overline{A}\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

(3) 因为

$$\overline{A}=\{4,\ 5\},\qquad \overline{B}=\{1,\ 5\},$$

有

$$\overline{A}\,\overline{B}=\{5\},$$

所以

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

或由反演律，得

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

例 3 化简$(A\cup B)(A\cup\overline{B})$.

解 $(A\cup B)(A\cup\overline{B})=AA\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B}$ （分配律）

$$=A\cup A\overline{B}\cup BA\cup\phi$$

（重迭律、互逆律）

$$=A\cup A\overline{B}\cup BA \qquad\qquad （吸收律）$$

$$=A. \qquad\qquad （吸收律）$$

说明 本例运用了事件运算的分配律、重迭律、互逆律及吸收律，其中以吸收律为关键．由于

$$A\overline{B}\subset A, \qquad BA\subset A,$$

所以

$$A\cup A\overline{B}\cup BA=A\cup BA=A.$$

例 4 化简 $\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)\overline{AC}}$.

分析 所给事件式含有多重“逆”号，应多次运用反演律，层层脱去“逆”号．

解 $\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)\overline{AC}}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\cup C}\cup AC$ （反演律）

$$=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\,\overline{C}\cup AC \qquad\qquad （反演律）$$

$$=(A\cup B)\overline{C}\cup AC \qquad\qquad （反演律）$$

$$=A\overline{C}\cup B\overline{C}\cup AC$$

$$=A\overline{C}\cup AC\cup B\overline{C}$$

$$=A(\overline{C}\cup C)\cup B\overline{C}$$

$$=A\cup B\overline{C}.$$

例 5 如果 $A\subset B$，试证 $A\cup B=B$.

分析 根据事件相等的定义，只需证明

$$A\cup B\subset B, \qquad B\subset A\cup B.$$

也就是说，只需证明 $A\cup B$ 的样本点都属于 B，B 的样本点也都属于 $A\cup B$.

证 设 $\omega\in A\cup B$，那末 $\omega\in A$，或 $\omega\in B$，因为 $A\subset B$，必有 $\omega\in B$，于是 $A\cup B\subset B$．设 $\omega\in B$，因为 $A\subset B$，有 $\omega\in A$，或 $\omega\in B$，即 $\omega\in A\cup B$，于是 $B\subset A\cup B$．从而 $A\cup B=B$.

例 6 证明 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

证 设 $\omega\in\overline{A\cup B}$，那末 $\omega\overline{\in}A\cup B$，即 $\omega\overline{\in}A$，且 $\omega\overline{\in}B$，也即 $\omega\in\overline{A}$，且 $\omega\in\overline{B}$，即 $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$，于是 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。设 $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$，那末 $\omega\in\overline{A}$，且 $\omega\in\overline{B}$，即 $\omega\overline{\in}A$，且 $\omega\overline{\in}B$，也即 $\omega\overline{\in}A\cup B$，即 $\omega\in\overline{A\cup B}$，于是 $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$。从而 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

说明 以上证法通常用于证明事件的运算规律，至于其它事件等式的证明，可仿照事件式的化简法，以运用运算规律为宜。

例 7 证明 $(A-AB)\cup B=A\cup B$。

证法一

$$
\begin{aligned}
(A-AB)\cup B &= A\overline{AB}\cup B &&\text{（差化积）}\\
&= A(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B\\
&= A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup B\\
&= A\overline{B}\cup B\\
&= A\overline{B}\cup AB\cup B &&\text{（吸收律）}\\
&= A(\overline{B}\cup B)\cup B\\
&= A\cup B.
\end{aligned}
$$

证法二

$$
\begin{aligned}
(A-AB)\cup B &= A(\Omega-B)\cup B &&\text{（分配律）}\\
&= A\overline{B}\cup B\\
&= A\overline{B}\cup(A\cup\overline{A})B\\
&= A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B\\
&= (A\overline{B}\cup AB)\cup(AB\cup\overline{A}B) &&\text{（重迭律）}\\
&= A\cup B.
\end{aligned}
$$

例 8 试问 $(A\cup B)-A=B$ 是否成立？

解 $(A\cup B)-A=(A\cup B)\overline{A}=A\overline{A}\cup B\overline{A}=\overline{A}B$。

设 $\omega\in B$，那末当 $\omega\in AB$ 且 $AB\neq\phi$ 时，$\omega\overline{\in}\overline{A}B$，即 $B\subset\overline{A}B$ 不成立，所以 $\overline{A}B\neq B$，即

$(A\cup B)-A\neq B$。

三、练 习 题

1. 设A，B，C是三个事件，试用A，B，C的事件式分别表示下列各事件：(1) A，B，C都发生；(2) A，B，C中至少有两个发生；(3) A，B，C中不多于两个发生。

2. 设一个工人加工了四个零件，A_i表示第i个零件是合格品，试用A_1，A_2，A_3，A_4的事件式分别表示下列各事件：(1) 没有一个零件是废品；(2) 至少有一个零件是废品；(3) 恰有一个零件是废品；(4) 至少有三个零件不是废品。

3. 在十个数字1，2…，10中任取一数，以$A=\{2,3,4\}$表示取得2，或3，或4；$B=\{3,4,5\}$表示取得3，或4，或5，$C=\{5,6,7\}$表示取得5，或6，或7。试问下列各事件式：(1) $\overline{A}B$；(2) $\overline{A}\cup B$；(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$；(4) $\overline{A B C}$，(5) $\overline{A(B\cup C)}$分别表示什么？

4. 在区间[0，2]上任取一数，以$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$表示取得的数在$\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$上，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$表示取得的数在$\left[\frac{1}{4},\ \frac{3}{2}\right)$上。试问下列各事件式：(1) $A\cup B$；(2) $\overline{A}B$；(3) $A\overline{B}$；(4) $A\cup\overline{B}$分别表示什么？

5. 化简下列各式：

(1) $(A\cup B)(B\cup C)$；

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$；

(3) $ABC\cup\bar{A}\bar{B}C\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$;

(4) $A\bar{B}\cup A\bar{C}\cup BC$;

(5) $AB\cup\bar{A}C\cup BC$;

(6) $AB\cup A\bar{C}\cup\bar{B}C\cup BD\cup CDE$.

6．证明下列各等式：

(1) $A\Omega=A$;

(2) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$;

(3) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;

(4) $(A\cup B)-AB=A\bar{B}+\bar{A}B$;

(5) $\overline{A\bar{B}+\bar{A}B}=AB+\bar{A}\bar{B}$;

(6) $A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup B\cup C$.

7．试问 $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$ 是否成立?

第二节　古典概型与几何概率

一、内 容 提 要

1．概率的古典定义

如果某类随机现象具有下列两个特点：(1) 基本事件的个数是有限的，(2) 每个基本事件出现的可能性相等，那末这类随机现象的数学模型叫做古典概型.

在古典概型中，如果基本事件共有 n 个，而事件 A 所包含的基本事件有 m 个，那末事件 A 的概率 $P(A)$ 等于事件 A 中所包含的基本事件个数 m 与基本事件的总数 n 的比值，即

$$P(A)=\frac{A\text{中所包含的基本事件(样本点)个数}}{\text{基本事件(样本点)的总数}}=\frac{m}{n}.$$

这叫做概率的古典定义。

在古典概型的概率计算中经常运用组合分析的知识。

2. 组合分析

(1) 加法原理和乘法原理

①加法原理　如果完成一件事可有两种方式，第一种方式有 n_1 种方法，第二种方式有 n_2 种方法，那末完成这件事共有 n_1+n_2 种方法。

②乘法原理　如果完成一件事需要两个步骤，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，那末完成这件事共有 n_1n_2 种方法。

(2) 排列

从 n 个不同的元素中取出 k 个元素，按一定的顺序排成一列，叫做排列，用 A_n^k 表示所有这样的排列的种数。

①从 n 个元素中选取 k 个元素的排列（叫做选排列）的种数为

$$A_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

特别，从 n 个元素中全部取出的排列（叫做全排列）的种数为

$$A_n^n=n!=n(n-1)\cdots2\cdot1.$$

②如果每取一个元素就放回，那末从 n 个元素中选取 k 个元素的排列（叫做有重复的排列）的种数为 n^k.

(3) 组合

从 n 个不同的元素中取出 k 个元素构成一组，而不考虑它们的顺序，叫做组合，用 C_n^k 表示所有这样的组合的种数。

①从 n 个元素中取出 k 个元素的组合的种数为

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$