微分几何学

（新一版）

苏步青　原著　　姜国英　改写

高等教育出版社

本书为原著者于1931～1947年在浙江大学的授课讲义，前后共16年，经过五六次增补和修改而成，于1948年出版．书中收集了当时的一些新成果，内容非常丰富．在1985年的几何、拓扑编审组会上，与会专家认为这部教材体现了教学与科研相辅相成的精神，理科数学系的学生和研究生都能从书中得到启发和提高．本版（新一版）是由姜国英博士将该书改写（小部分由原著者本人改写）成语体文，并把其中的符号改为现在常用的符号后出版．

全书内容分曲线论、曲面论和线汇论三章，共42节．主要从局部叙述有关的内容，同时也有一些初等的整体性质．各个问题都叙述了其简史，定理、引理、例题、习题等都指出了得到该成果的年代及人名．本书是一本很好的参考书，可供学习微分几何的学生、研究生和教师在学习、研究和教学中参考．

微分几何学

（新一版）

苏步青 原著 姜国英 改写

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 290 000

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷

印数 0 001—2,880

ISBN 7-04-000815-7/O·318

定价4.40元

（平装本）

新 版 序

新版《微分几何学》是从旧版改写成书的．在改写中，将原来的文言改为现代用语，将过去用坐标法表达的方式都换成向量分析法，而且对部分记号也改为现在常用的形式，但是对原著的内容丝毫未予更动．这项工作基本上是姜国英博士一个人做的，只是后来由于他的健康关系，§ 36 以后的部分不得不由原著者自己来足成．

在 1985 年理科数学、力学教材编审委员会几何、拓扑编审组会议上，与会专家提出了改写旧版《微分几何学》的建议，理由是：旧著内容比较丰富，把当时认为是新的一些成果也收进本文或习题里，尤其是第三章线汇论，是建国以来同类教材中所不收进的．会议认为，这部教材体现了教学与科研相辅相成的精神，对高等院校高年级学生和研究生会起到启发和提高的作用，因而决定由高等教育出版社把这本新版作为参考教材公诸于世．

为了改进这本书的内容，以利于现代发展的需要，原著者曾经打算用现代的方式进行改编，把较难的习题改为本文的一段，或者给它附上启发性解答，使读者能够更多地受益，但是限于时间和精力，这个设想可惜未能实现．此外，全书原稿虽然都经过原著者的校阅，但错误之处仍在所不免，希望读者随时提出改正的意见．

最后，对于姜国英同志十分周至而严密的改写，原著者表示衷心的感谢．高等教育出版社张爱和同志为本书的出版尽了最大的努力，在此也表谢意．

苏步青

1987 年元月于上海复旦大学

旧版序

本书系集著者1931年至1947年在国立浙江大学所授之讲义而成，其间曾窜改增补五六次之多，记号务求简易，行文务求浅近．参考英、美、德、法、意、日等国几何学者名著不下十种，所收习题较难者加上星号，并附原著者姓名及年份，俾读者可获查考之径路．

微分几何学一门占数学之一重要地位．尤以近年来相对论、电机学等方面需要绝对微分学殊殷，该学之运算与夫空间概念之推广殆有不可分离之势．故本书内特添一节(§25)，作为导引．兹当国内高等数学参考书缺乏之际，本书如能有助于教学研究，亦著者之荣也．自愧学识谫薄，虽经十六年间之删补，而错误之处仍应不免，尚祈海内学者教而正之．

吴俊传、金福临、杨忠道三学士协助本书校对，且杨君为绘插图，对于三君特申谢意．正中书局总编辑吴士选先生多方协理本书出版，尤深感激．

一九四七年六月苏步青志于杭州浙大．

目　　录

第二章 曲面论

第三章 线 汇 论

绪　论

依照 F. Klein(1872)的定义，我们是可以用几何学变换群对几何学进行分类的. 详细地说，当已知一个几何学变换群G时，所谓属于G的几何学，就是研究图形在此群作用下的不变性质.

几何学的研究对象是图形. 按照所研究图形的性质，可分成两种情况进行讨论. 第一种是关于全图形所具有的性质。例如，决定一条直线与一条圆锥曲线交点的问题就属于此类性质的问题，因为所求的交点是由直线与曲线的整体位置决定的. 第二种是关于图形的局部性质. 例如，在曲线上一点引曲线的切线就与这种性质有关，因为大家知道，切线仅仅涉及到曲线在切点附近一阶展开的状况，而与曲线在其他部分的更改毫无关系. 对后一性质的研究便属于经典微分几何的范畴.

因为微分几何学是为了研究图形在其元素近旁性质而发展起来的一门学科，所以必然要运用函数及微积分学作为工具. 自古以来，Euler(1744)，Monge(1807)，Lagrange(1813)，Cauchy(1826)等著名数学家把微积分学应用于曲线、曲面的研究，这也是微分几何学的开端. 然而微分几何这门学科的系统化，则是与C. F. Gauss(1826)的努力分不开的. 另外，十九世纪时的几何学家，如Ossian Bonnet, Sophus Lie, E. Beltrami, E. Cesàro, J. Weingarten, G. Darboux 等人对于微分几何学的发展都作出相当的贡献. 详细情况可参看Knoblauch 著的《Grundlagen der Differentialgeometrie(Leipzig, 1913).

从 Klein 的分类方法来看，经典的微分几何学应隶属于运动

群，所以经典微分几何学也称为运动几何学或初等微分几何学. 如果我们用别的基本变换群来替代运动群，那么就能得到其他种类的微分几何学. 这个想法的具体化便是二十世纪以来几何学的一系列新发展. 例如 G. Fubini (1916) 的射影微分几何学，W. Blaschke (1916) 的仿射微分几何学，G. Thomsen 与 W. Blaschke (1923)的保角微分几何学等都是在 Klein 的这个具有深远影响的思想指导下产生的.

如上所述，要创立新的几何学，改变基本变换群是一条途径，但是更可以推广图形所在的空间，即推广普通的三维欧氏空间或更一般的 n 维欧氏空间. 1854 年，B. Riemann 把欧氏空间推广成更一般的空间，创立了现代通称为黎曼几何学的新几何学科. 接着，G. Ricci-Curbastro (1900) 发现了绝对微分学，A. Einstein (1916) 首先把它应用于相对论，第二年(1917) 又有了 T. Levi-Civita 的平行概念. 微分几何学发展到这里，获得了长足的进步. 后来，J. A. Schouten (1924) 首先发现几十年来指导几何学发展的 Klein 分类法思想有缺陷，而就此作出了改进. 现代所盛行的联络理论便是黎曼几何学更进一步的推广. 这方面的详细情况可参考 D. J. Struik 著的《Theory of Linear Connections》(1934).

由此可见，初等微分几何学是一门古老陈旧的学科，固然无须多言，但它形成了现代微分几何学的基础，也是毋庸置疑的. 初等微分几何学所用的研究工具大部分是微积分学，但必须指出，我们研究的目标并非分析学，而是几何学. 所以在学习时必须尽量避免繁复演算的影响，重视对象的几何学意义.

尤其值得注意的是，近年来实函数论发展异常迅速. 将这方面的思想应用于微分几何学，以求改进和推广，大有其人. 这也是不容忽视的动向.

第一章 曲 线 论

§1. 挠曲线的解析表示

设 x,y,z 为一点的直交坐标.对于坐标轴的正方向有下列规定,即当我们头朝 z 轴正向且面向 x 轴正向时,y 轴正向在左边(参照图 1).

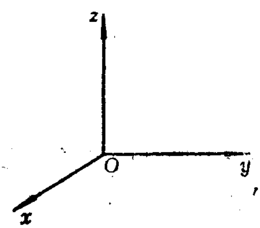

图 1

如果点 P 的坐标 x,y,z 都是同一个参数 t 的函数,即

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t), \tag{1}$$

则由于 t 的变动,点 P 所画的轨迹称为一条**空间曲线**或**挠曲线**.反过来,已知一条挠曲线时,可把其上任何一点的坐标表示为形式(1)的方程.因此,(1)称为这条曲线的**解析表示**.今后常把(1)式写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)), \tag{2}$$

并假设三个函数 $x(t),y(t)$, $z(t)$的第一、第二、第三阶导数均存在且为 t 的连续函数.简言之,所讨论的曲线属于 C^3 级.曲线上参数为 t 的点 P 有时就简称为 t 点或 $P(t)$ 点.

例 1 设一直角三角形纸片的一个锐角为 θ.现在把这纸片卷在一圆柱上,使 θ 的一边与圆柱的一个**法截圆**重合,求另一边所卷成的曲线.

以圆柱轴为 z 轴且取 x, y 二轴如图 2,则容易知道所求曲线的解析表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,at\operatorname{tg}\theta),$$

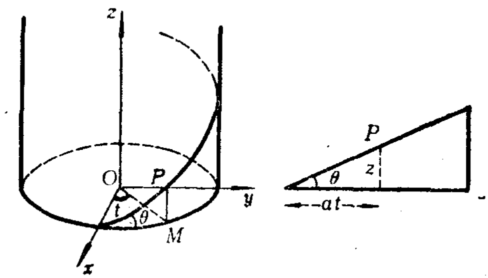

图　2

式中 a 是圆柱的半径. 此曲线称为**螺线**.

例 2　证明:曲线(2)在一定平面上的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))=0,\ 即\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

这里“$'$”,“$''$”,“$'''$”分别表示一阶,二阶,三阶导数.

证明　设曲线(2)在一平面上, 如记 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ 为此平面的法方向,则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)=d,$$

这里的 a,b,c,d 皆为常数,且 a,b,c 不全为零. 关于 t 微分上式,依次得到

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''(t)=0,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'''(t)=0. \qquad (4)$$

(4)是关于 a,b,c 的线性方程组,由于 a,b,c 中至少有一个不等于零,所以(3)式成立是必要条件.

反之, 如果(3)成立. 则必有三个函数 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ 使 $\boldsymbol{n}(t)=(a(t),\ b(t),\ c(t))$满足(4)式. 对(4)的前两式关于 t 微分并利用(4)化简后得到

$$\boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0,\boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)=0,$$

这说明 $\boldsymbol{n}'(t)$与 $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$平行，但从(4)知 $\boldsymbol{n}(t)$亦有同一性质,故

$$\frac{a'(t)}{a(t)}=\frac{b'(t)}{b(t)}=\frac{c'(t)}{c(t)}.$$

把这比例因子记为 $\varphi'(t)$,积分后有

$$a=a_0e^{\varphi},b=b_0e^{\varphi},c=c_0e^{\varphi},$$

其中 a_0,b_0, c_0 都是常数. 代入(4)的第一个等式，约去非零因子 e^{φ} 并再积分,即知曲线(1)是**平面曲线**.

1. 切线

从一曲线(2)上取两点,设其参数值为 t 及 $t+\Delta t$，则两点连线的方向与 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$相平行. 然而依照平均值定理,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\\&\quad=(\Delta t\cdot x'(t+\theta_1\Delta t),\Delta t\cdot y'(t+\theta_2\Delta t),\Delta t\cdot z'(t+\theta_3\Delta t)).\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2,\theta_3<1$,于是连线的方程是

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t)=\lambda(x'(t+\theta_1\Delta t),y'(t+\theta_2\Delta t),z'(t+\theta_3\Delta t)),$$

式中 $\boldsymbol{\rho}=(\xi,\eta,\zeta)$表示直线上动点的坐标，$\lambda$ 则是参数. 当 $\Delta t\to 0$ 时,若此直线有极限位置,则其方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t)=\lambda\boldsymbol{r}'(t),\tag{5}$$

所得直线称为曲线在点 t 的**切线**.

如果在点 t，三个导数 x',y',z' 皆取零值,则在这点的切线就无法确定. 这种点称为曲线的**奇点**,不在讨论范围之内.

2. 曲线弧

已知一曲线 C 的解析表示是(1)或(2)时，必须知道这种表示不仅随所参考的坐标系的不同而更改，而且与参数的选择也有联系. 换句话说，在变换坐标系时，点的直交坐标应当受到直交变

换，即

$$x^* = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a,$$
$$y^* = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b, \quad (6)$$
$$z^* = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c,$$

式中 $a_{ik}(i,k=1,2,3)$；a,b,c 皆为常数，并且

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ki}^2 = 1 \quad (i=1,2,3);$$
$$\sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj} = 0 \quad (i \neq j, i, j=1,2,3). \quad (7)$$

这时(2)式就化为

$$\boldsymbol{r}^*(t) = (x^*(t), y^*(t), z^*(t)). \quad (2^*)$$

又对于给定的坐标系更可以变换参数 t 为 τ，即

$$t = f(\tau), \quad (8)$$

式中 $f(\tau)$ 是 τ 的递增函数．于是 x，y，z 皆为 τ 的函数．所以对于同一曲线，它的表示方法则有无数种．

然而应该用什么方法来表示挠曲线，使它与直交坐标系及参数的变换都无关呢？凡是对于(6)不变的图形性质称为**不变性质**，而对于(8)不变的称为**内在性质**．从而对于挠曲线我们要研究的乃是它的不变且内在性质．

为了决定曲线的一种本有参数，取曲线 C 上的两点 t 及 $t+\Delta t$，且设其间距离为 Δs，则

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2\{x'^2(t+\theta_1\Delta t) + y'^2(t+\theta_2\Delta t) + z'^2(t+\theta_3\Delta t)\}.$$

于是当 $\Delta t \to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限值应为

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = |\boldsymbol{r}'(t)|. \quad (9)$$

因此，曲线在其上两点 t_0 及 t 之间的弧长 s 等于

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt. \tag{10}$$

对于参数变换(8)，弧长 s 并不受影响，这是因为

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right|d\tau. \tag{11}$$

由(11)知函数 s 是曲线 C 的内在参数. 不但如此，而且 s 对于直交变换(6)也是不变的，即有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2=\left|\frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt}\right|^2, \tag{12}$$

所以 s 是曲线的积分不变量.

弧长 s 是参数 t 的函数，所以 t 也为 s 的函数，于是可把曲线表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s)). \tag{13}$$

这时有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^2=1, \tag{14}$$

所以 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 是单位向量；$\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ 是曲线切线的方向余弦.

现在规定 s 的增加方向为切线的正方向，并用 α,β,γ 表示它的方向余弦，且记 $\boldsymbol{T}=(\alpha,\beta,\gamma)$，则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\\ &\alpha=\frac{dx}{ds},\ \beta=\frac{dy}{ds},\ \gamma=\frac{dz}{ds}\end{aligned} \tag{15}$$

都是 s 的函数.

在曲线的一点 $P(s)$ 引切线的垂线，其全体在一平面上，称此平面为**法平面**，它的方程是

$$\boldsymbol{T}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0, \tag{16}$$

即

$$\frac{dx(s)}{ds}(\xi-x(s))+\frac{dy(s)}{ds}(\eta-y(s))+\frac{dz(s)}{ds}(\zeta-z(s))=0,$$

式中的 $x(s), y(s), z(s)$ 表示点 $P(s)$ 的坐标.

3. 曲率

在曲线的一点 s 引切线，它的方向余弦 α, β, γ 都是 s 的函数且满足

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

以原点 O 为中心，作半径为 1 的球面. 以后为方便起见，就称它为**单位球面**. 对于曲线上的点 $P(s)$，取单位球面上的一点 $\bar{P}$，使 $O\bar{P}$ 的方向与曲线在 $P(s)$ 的切线正向一致. $\bar{P}$ 的坐标应当是 (α, β, γ). 当 s 变动时，$\bar{P}$ 的轨迹称为原曲线的**切线象**.

对于曲线上的两点 s 及 $s+\Delta s$，切线象上有对应点 $(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s))$ 及 $(\alpha(s+\Delta s), \beta(s+\Delta s), \gamma(s+\Delta s))$. 设其间距离为 $\Delta\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}(\Delta\varepsilon)^2&=(\alpha(s+\Delta s)-\alpha(s))^2+(\beta(s+\Delta s)-\beta(s))^2\\&\quad+(\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s))^2\\&=(\Delta s)^2[\alpha'^2(s+\theta_1\Delta s)+\beta'^2(s+\theta_2\Delta s)\\&\quad+\gamma'^2(s+\theta_3\Delta s)],\end{aligned}$$

式中 $0<\theta_1, \theta_2, \theta_3<1$，于是

$$\frac{d\varepsilon}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}=\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}. \tag{17}$$

此极限值称为原曲线在点 s 的**曲率**，且其倒数 r 称为**曲率半径**. 由 (17) 计算曲率时，平方根有正负号. 为避免复杂计，常规定**挠曲线的曲率不小于 0**，即 $r\geqq 0$. 我们可把 (17) 改写为

$$\frac{1}{r^2}=\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^2. \tag{18}$$