成人高等教育系列教材

经济应用数学
微积分

张广沅 袁萍 主编

天津人民出版社

前　言

《经济应用数学》是由国家教委规定为财经类各专业公共必修的核心课程之一。此著按照教委审定的《微积分》教学大纲，根据"以应用为目的"、"以必须够用为度"的精神编写，适合高等财经专业学生学习使用。

本教材编写中，既注意了使广大经济工作者在专业知识学习中打好数学基础，以达到较好地运用数学方法实现经济管理科学化、现代化的目的，又注意了数学本身的科学性和系统性，兼顾教学上和应用上的必要性和灵活性。因此，本教材对大纲规定的必须理解和熟练掌握的基本概念和方法，努力做到讲细讲清，但不过分追求严谨的叙述和严密的推导，使学生既能够正确理解所学的基本概念和方法的实质，又不致陷入繁琐的理论证明。注意了突出重点，以满足学习后续课程或专科起点升本科学习的需要。

根据我们长期从事经济应用数学教学的经验，本教材既能适用于普通高等教育，也能适应成人高等教育，特别注意了便于自学。在内容安排上力求由浅入深；在叙述上力求深入浅出、通俗易懂。对某些主要概念和定理有较详细的介绍和分析，在严密性和通俗性的关系处理上有较好的兼顾，对重点内容通过较多的例题来帮助读者，以加深理解概念、掌握方法、提高解题能力。

本教材的显著特点是注重了数学理论与经济实际相联系，涉及了商品需求、成本效益、边际分析、价格弹性等经济概念，便于经济工作者更好地明确学习高等数学的目的性。

本书由张广沅、袁萍共同编写，其中第四至七章由张广沅编写，第一章至三章由袁萍编写。

本书的编写和出版，应该衷心感谢有关各方，特别是山东财

政学院成人教育处的各位领导及诸位同事。

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处，恳请专家和读者不吝指出缺点和错误。

作　者

1997年7月

目　录

第一章 一元函数的极限与连续

初等数学主要研究的是事物相对静止状态的数量关系；而高等数学则主要研究的是事物运动、变化过程的数量关系．从初等数学发展到高等数学，其研究对象发生了根本变化，从而引起了研究方法的变化．极限就是为了适应这种变化而产生的新的方法．极限是微积分学最基本的概念，微积分的一些基本性质和运算法则是通过极限法推导出来的．

本章在对读者已有的函数知识进行系统复习的基础上，学习极限的概念、运算法则、极限的求法和连续函数的有关知识．

§1·1 实数与绝对值

一、实数

人们对数的认识是逐步发展的，先是自然数，继而是有理数，再进一步是无理数．有理数与无理数统称为实数，通常用字母 $\mathbf{R}$ 表示．有理数包括整数和分数，任何一个有理数均可以表示为分数$\frac{p}{q}$的形式（其中 $q\neq0$，p、q 是互质的整数），也可以表示为有限小数或无限循环小数的形式．无理数只能用无限不循环小数表示．

任一实数都可以用数轴上的点唯一地表示出来；反之，数轴上任意一点，都有唯一的一个实数与之对应．就是说，实数与数

轴上的点有一一对应的关系．为简便起见，以后我们常将实数和在数轴上与它对应的点不加区别，并且用相同的字母表示，如实数 a 也可以说成是点 a（或 a 点）．

实数一般有如下几个主要性质，这里只给予叙述，证明从略．

（1）有序性：设有任意 a、$b\in\mathbf{R}$（"$\in$"表示"属于"），则 a、b 一定满足下述关系之一，即

$$a<b,\qquad a=b,\qquad a>b$$

（2）稠密性：设 a、$b\in\mathbf{R}$，则在 a、b 之间存在无限多个有理数和无理数．

（3）连续性：由于实数与数轴上的点是一一对应的，从而，所有与实数对应的点填满了整个数轴而没有空隙．这种性质称为实数的连续性．

（4）封闭性：设有任意 a、$b\in\mathbf{R}$，则对 a、b 施行加、减、乘、除（除数不为零）四则运算后，其结果仍然是实数．

二、实数的绝对值

在微积分中，常常用到实数绝对值的概念，因此，我们给出实数绝对值的定义，并对绝对值的主要性质作一介绍．

（一）实数绝对值的定义

定义 1·1　任意实数 x 的绝对值用符号 $|x|$ 表示，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}\\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

由此可知，x 的绝对值 $|x|$ 总是正数或零．

例如：当 $x=6$ 时，　$|x|=|6|=6$

当 $x=0$ 时，　$|x|=|0|=0$

当 $x=-6$ 时，$|x|=|-6|=-(-6)=6$

注意：利用绝对值的概念有：

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

例如：$\sqrt{8^2}=8, \sqrt{(-8)^2}=|-8|=-(-8)=8$

$|x|$的几何意义：在数轴上，$|x|$表示点 x 到原点之间的距离．点 x 可能在原点的左边，也可能在原点的右边．

（二）绝对值的性质

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x|\geqslant 0$；

(2) $|-x|=|x|$；

(3) $|x|=\sqrt{x^2}$；

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(5)当 $a>0$ 时，$|x|<a$ 等价于 $-a<x<a$；

(6)当 $b>0$ 时，$|x|>b$ 等价于 $x<-b$ 或 $x>b$；

(7) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$；

(8) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$；

(9) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；

(10) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y\neq 0$

例 1：解不等式 $|x-3|<0.1$

解　由绝对值性质 5，它等价于不等式

$$-0.1<x-3<0.1$$

解得　$2.9<x<3.1$

例 2：解不等式 $|2-7x|>5$

解　由绝对值性质 6，它等价于不等式

$$2-7x<-5 \quad 或 \quad 2-7x>5$$

解得　$x>1$　或　$x<-\frac{3}{7}$

三、区间和 δ 邻域

(一)区间

今后在讨论问题的过程中，我们常常要限制一个变数在一部分实数范围内变化．为了既明确又简单地表示这部分实数，下面说明区间的概念与记号．

定义 1·2　介于某两个实数之间的所有实数 x 的集合称为区间，称这两个实数为该区间的端点．

区间是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，可分为有限区间和无限区间．

1．有限区间

设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$

(1)数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b)，在数轴上表示介于 a 与 b 两点间的全体实数，但不包括 a 与 b 在内．见图 1-1(a)．

(2)数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a、b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，在数轴上表示介于 a 与 b 两点间的全体实数，且包括 a 与 b 在内．见图 1-1(b)．

(3)数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 称为以 a、b 为端点的半开区间，分别记作 $(a,b]$、$[a,b)$ 在数轴上表示，见图 1-1(c)、(d)．

以上区间称为有限区间．有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$，称为区间的长．

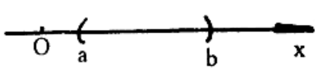

图 1-1(a)

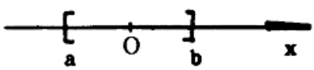

图 1-1(b)

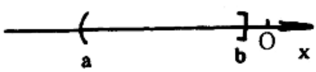

图 1-1(c)

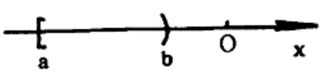

图 1-1(d)

2. 无限区间

还有以下几种区间称为无限区间：

(1) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$；

(2) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；

(3) $(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$

(二)数轴上的 δ 邻域

数集 $\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 在数轴上表示为开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称其为点 x_0 的 δ 邻域，x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径．通常用符号 $N(x_0,\delta)$ 表示．

邻域 $N(x_0,\delta)$ 在数轴上表示如图 1-2(*a*)．

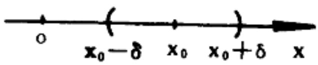

图 1-2(*a*)

例如：不等式 $|x-1|<\frac{1}{2}$ 表示以点 $x_0=1$ 为中心，$\delta=\frac{1}{2}$ 为半径的邻域，即开区间(0.5,1.5)．

又如，开区间(−3,3)表示以原点 $x_0=0$ 为中心，$\delta=3$ 为半径的邻域．

在邻域 $N(x_0,\delta)$ 中去掉中心 x_0，即 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为空心邻域(或去心邻域)．并称 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的左邻域，$(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右邻域．在数轴上表示如图 1-2(*b*)

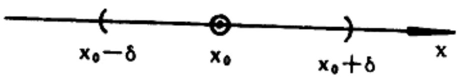

图 1-2(*b*)

例如，不等式 $0<|x-2|<3$ 表示空心邻域 $(-1,2)\cup(2,5)$．

§1·2　一元函数

一、一元函数的概念及其基本性质

（一）一元函数的概念

在自然科学和经济研究中，经常要遇到各种不同的量．其中有的量在某一过程的进行中不起变化，就是始终保持同一数值的量，称之为**常量**；有的量在过程的进行中，可以取不同数值，称之为**变量**．例如，在某一生产过程中，一定数量的厂房和设备一般是常量，而产品产量、原材料消耗量一般是变量．需要说明的是，一个量在某一过程中是常量，在另一过程中有可能又是变量，如为了扩大再生产的需要增加厂房和设备时，那么厂房和设备则被视为变量．常量也称做常数，在数轴上就是一个定点；变量也称做变数，可以想像为数轴上的一个动点．

现实世界中各种不同的变量不是孤立的，是相互联系相互制约的，一元函数就是描述两个变量之间的依赖关系，它反映了经济现象中量的变化规律．

1. 一元函数的定义

定义 1·3　设 $\mathbf{D}$ 是一个非空的实数集，若存在一个对应规则 f，使得对每一个 $x\in\mathbf{D}$，按照对应规则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 $\mathbf{D}$ 上的一元函数，或称变量 y 是变量 x 的一元函数，简称为函数．记作：

$$y=f(x),x\in\mathbf{D}$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，集合 $\mathbf{D}$ 称为函数 $f(x)$ 的定义域，通常记作 $\mathbf{D}(f)$.

如果 $x_0\in\mathbf{D}$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；如果 $x_0\overline{\in}\mathbf{D}$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义．对于每一个 $x_0\in\mathbf{D}$，函数

$f(x)$相应的取值 y_0，称为自变量 x_0 所对应的函数值，记作 y_0 或 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$；当 x 遍取 $\mathbf{D}$ 内的所有实数时，相应的函数值的集合称为函数 $f(x)$的值域，记作 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}(f)$.

应用函数概念时，必须注意以下几点：

(1)函数概念反映了自变量和因变量之间的依从关系，自变量 x 在函数关系中是起主动作用的，因变量 y 是被动的，它的变化依赖于 x.

(2)对每一个实数 $x\in\mathbf{D}$，通过 f 都有唯一的实数 $y\in\mathbf{Z}$ 与之对应；反之，对 $y\in Z$，可以有不同的 x 与之对应．定义 1·3 所确定的函数是单值函数，本教材着重讨论单值函数．例如 $y=\pm\sqrt{x}$ 不符合函数定义，若拆成单值支 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$，则它们在区间$(0,+\infty)$内是完全符合函数定义的．又如 $y=x^2$，当 $y=a^2\in Z$ 时，有 $x=a$ 与 $x=-a$ 与之对应，这是符合函数定义的．

(3)对应规则 f 和定义域 $\mathbf{D}$ 是确定函数的两要素．只要两个函数的定义域和对应规则相同，这两个函数就是相同的函数；只要定义域和对应规则之一不相同，这两个函数就不同．

(4)还须强调的是，对应规则 f，它不依赖于采用的记号，还可以用 g,φ,h,F 等表示，那么函数也就记作 $g(x),\varphi(x),h(x),F(x)$等．当同时考虑几个函数时，就需取不同的符号来表示不同的函数，以免混淆．有时为简化符号，函数关系也可记作 $y=y(x)$，此时等号左边 y 表示函数值，右边的 y 表示对应规则．

下面我们就函数概念方面的问题再深入地讨论几个例子．

例 1：$y=\sqrt{\sin x-2}$不是一元函数．

对任何实数x，都没有按给定规则与之对应的y值，就是 $\mathbf{D}(f)=\phi$，所以 $y=\sqrt{\sin x-2}$不是一元函数．

例 2：$y>x$ 不是一元函数．

按这个规则，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应，不符

函数定义，所以 $y>x$ 不是一元函数.

例 3：函数 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\frac{x\sin x}{x}$ 是两个不同的函数.

因为它们的定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\frac{x\sin x}{x}$ 是两个不同的函数.

例 4：$f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数.

因为 $f(x)$、$g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $f(x)$ 的对应规则也相同，所以它们是两个相同的函数.

2. 函数定义域的确定

函数 $y=f(x)$ 的定义域 $\mathbf{D}(f)$，就是自变量 x 允许取值的集合，任何函数一定要有定义域. 当定义域是一个区间时，则将此区间称为定义区间.

确定函数的定义域，一般可从下面两个方面来考虑. 一方面，当所讨论的函数是反映实际问题时，定义域由实际意义来确定，例如：已知某厂每月生产某种商品 x 个单位的总费用是 $\mathbf{C}(x)=150+3x$（元），这个函数的定义域 $x\geqslant0$，就是由 x 表示商品数这个实际意义来确定的. 另一方面，如果函数只由算式给出，并且没有附加规定，那么这个函数的定义域由函数式子本身具有意义来确定.

例 5：函数 $f(x)=ax+b$（其中 a、b 为常数），它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 6：求函数 $f(x)=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域.

解　对于分子，必须满足 $2-x>0$；对于分母，必须满足 $x^2-1>0$. 解不等式组

$$\begin{cases}2-x>0,\\ x^2-1>0,\end{cases}\qquad 即\begin{cases}x<2,\\ x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$$

求交集即得所求定义域 $\mathbf{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(1,2)$

例 7：求函数 $y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域．

解　要使 $\sqrt{2+x-x^2}$ 有意义，必须 $2+x-x^2\geqslant 0$

即：　$x^2-x-2\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 2$

又因要使 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 有意义，必须有 $-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1$

即：　$-3\leqslant x\leqslant 4$

所以，定义域 $\mathbf{D}(f)=[-1,2]\cap[-3,4]=[-1,2]$

3．函数符号 $f(x)$ 的使用

函数 $f(x)$ 中的"f"表示函数关系中的对应规则．$f(x)$ 表示将规则 f 施用于 x，如果把 $f(x)$ 中括号内的 x 转换成定义域 $\mathbf{D}(f)$ 中的某个具体数值或表示数值的字母或是表达式，则表示将规则 f 施用于那个具体数值或表示数值的字母以及那个数学式子．

例 8：　已知 $f(x)=1+x^2$，求 $f(2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f[f(x)]$．

解　$f(2)=1+2^2=5$；　　$f(0)=1+0^2=1$；

$f(a)=1+a^2$；　　$f(-x)=1+(-x)^2=1+x^2$；

$f(x+1)=1+(x+1)^2=x^2+2x+2$；

$f[f(x)]=1+[f(x)]^2=1+(1+x^2)^2=x^4+2x^2+2$

4．一元函数表示法

常用的函数表示法有三种．列表法：将一系列自变量的值与对应的函数值列成表格，这种函数表示法称为列表法．如三角函数表、生产统计表、邮资价格表等．图示法：在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，即把自变量 x 和函数 y 当作坐标平面内点的横坐标和纵坐标，这些点所描出的平面曲线就表示了 y 和 x 的函数关系，这种表示函数的关系称为图示法．如例 9 用图 1-3 表示 y 与 x 的函数关系，

公式法：用公式(或解析表达式)直接表示自变量 x 和因变量 y 之间的函数关系，这种方法称为公式法．按照公式的形式分类，常见的函数主要有以下几种：

(1)显函数：自变量 x 与因变量 y 的函数关系是由自变量 x 的明显表达式 $y=f(x)$ 表示出来，称为显函数．例如：$y=ax^2+bx+c$，$y=\sqrt{4-x^2}$ 等．

(2)隐函数：自变量 x 与因变量 y 的函数关系是由方程 $F(x,y)=0$表示的，称为隐函数，例如：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$a^y=xy(a>0)$等．

(3)分段函数：自变量 x 和因变量 y 的函数关系是由两个或两个以上的公式所表示，称为分段函数．例如：

$$y=\begin{cases} -\frac{1}{2}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \frac{1}{2}, & x>0. \end{cases}$$

函数的三种表示法可以结合使用．

下面我们对分段函数作进一步研究．

(二)分段函数

在经济应用中经常碰到上面已提到的分段函数．例如：

若公共汽车在 A、B 两地间行驶，已知旅客携带行李不超过 10 公斤者，不收行李费；超过 10 公斤至 25 公斤者，每公斤收运费 0.18 元，超过 25 公斤至 100 公斤者，每公斤收运费 0.23 元，试列出行李收费表达式．

解　设 x 表示旅客行李的重量(公斤)，依题意得行李收费表达式为：

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x\leqslant 10, \\ 0.18(x-10), & 10<x\leqslant 25, \\ 0.23(x-25)+2.7, & 25<x\leqslant 100. \end{cases}$$

就是说，在其定义域的各个不相交的子集上，分别用不同的分析表达式表示的一类函数，称为分段函数．分段函数的定义域是所有表达式定义域的并集，但要注意在交接点处是否有定义．求分段函数的函数值，是将自变量的值代入相应范围的式子去求得．

例 9：设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x>0. \end{cases}$ 确定 $f(x)$的定义域，并画出图形．

解　$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$．其图形如图 1-3 所示．

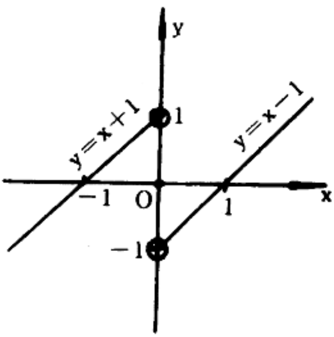

图 1-3

例 10：设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & -1\leqslant x<0 \\ 1, & 0\leqslant x<1 \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$

写出函数的定义域，并求函数值 $f(-\frac{1}{2})$，$f(0)$，$f(\frac{2}{3})$，$f(1)$，$f(\frac{3}{2})$，$f(x-1)$．

解　定义域 $\mathbf{D}(f)=[-1,2]$

$$f(-\frac{1}{2})=1-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2};$$

$$f(0)=1; \qquad f(\frac{2}{3})=1; \qquad f(1)=1^2=1$$

$$f(\frac{3}{2}=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4};$$

$$f(x-1)=\begin{cases}1-(x-1), & -1\leqslant x-1<0\\ 1, & 0\leqslant x-1<1\\ (x-1)^2, & 1\leqslant x-1\leqslant 2\end{cases}$$

即
$$f(x-1)=\begin{cases}2-x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\\ x^2-2x+1, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

这个分段函数的图形如图 1-4 所示．

注意：分段函数是用几个解析表达式合起来表示一个函数，不是表示几个函数．

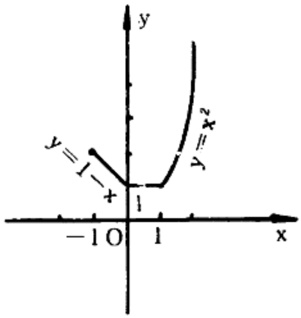

图 1-4

（三）一元函数的基本性质

掌握了函数的基本性质，会给我们以后的分析讨论带来方便．

1. 函数的奇偶性

定义 1·4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 **D** 上有定义，对任意的 $x\in \mathbf{D}$

(1) 如果恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数．

奇函数的图形关于原点对称（图 1-5(a)），偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1-5(b)）．