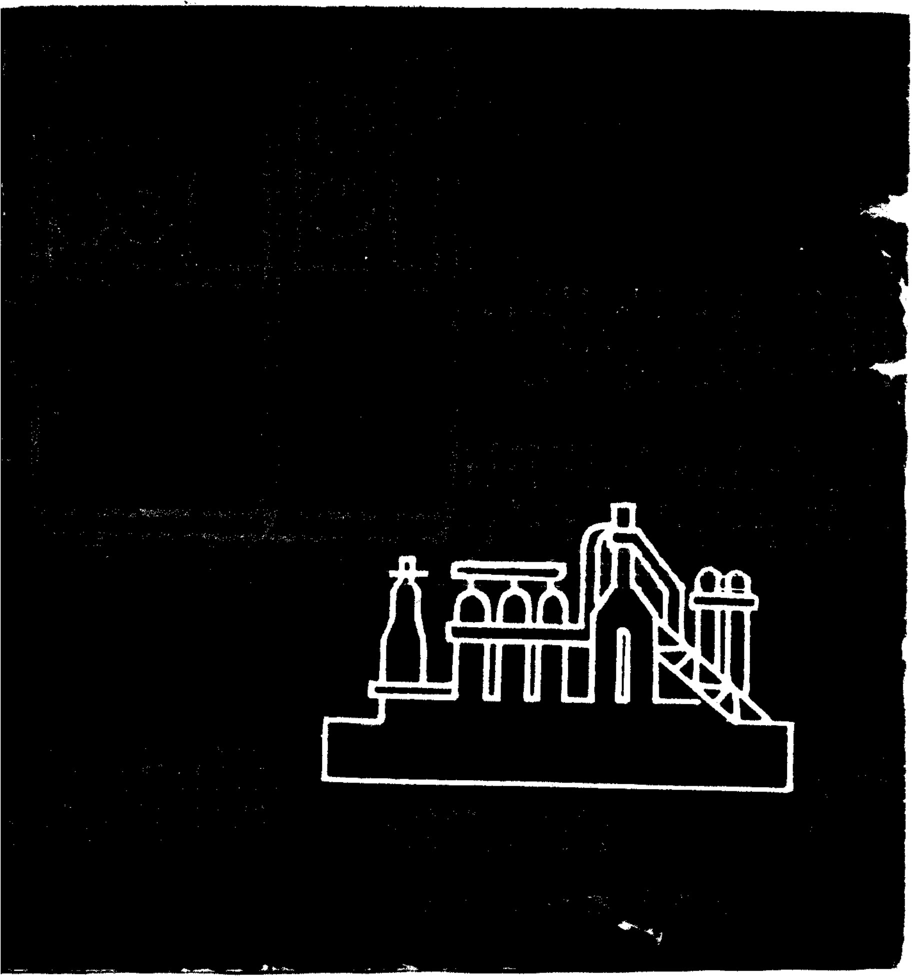
生产管理与电子计算机

——线性规划部分

贾凤和　谢　林　编著



生产管理与电子计算机
——线性规划部分
贾凤和　谢　林　编著
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　西安交大印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张13,5 插页1 字数290,000
1980年6月第1版　1980年6月第1次印刷
印数 1—5,100
统一书号：15202·17　定价：1.40 元

代　　序

线性规划是从廿世纪四十年代开始发展起来的一个新兴的数学分支，是运筹学的一部分。它研究如何通过数学的方法，最大限度地利用资源和设备条件，来完成尽可能多的任务，以及如何统筹安排，在最短的时间内，以最少的人力、物力和投资完成既定任务。近几十年来，它在军事、生产的组织管理、交通运输、邮电等各部门中都得到了广泛的应用，并取得了显著的成果。同时线性规划理论的发展和应用也为近年来国内外迅速发展起来的系统工程提供了重要的理论依据。

有的工业发达国家把先进的生产技术和先进的管理方法，称为经济"高度成长"的两个车轮，缺一不可。他们认为，管理不仅是一门科学，也是一种经济资源。在同样的生产技术条件下，如果采用科学的管理方法，就可以使经济发展取得更高的速度。他们把人的能力资源的开发、管理技能的发展，看作是廿世纪最迫切的问题。当前，我国人民正在为实现四个现代化而努力奋斗，借鉴这一宝贵经验，宣传和推广管理科学这一无价之宝，无疑是有重要意义的。

随着线性规划的建立，生产管理已经从一门艺术转变为一门科学。把线性规划应用到实践中，需要解决两个方面的问题：

一是计算问题。解线性规划的主要方法有作图法、表格

法、单纯形法等。其中单纯形法可以解决任何类型的线性规划，但是它的计算工作过于繁琐，用人工计算的方法难以解决复杂的实际问题。由于电子计算机的广泛应用，这一问题迎刃而解，使得线性规划“如虎添翼”。本书的第一部分为了解决线性规划的计算方法问题，不仅通俗地讲述了线性规划的单纯形法及具体计算时将会遇到的问题，而且给出了可供实用的单纯形法的电子计算机程序，这样就为用线性规划解决复杂的实际问题提供了必要的手段。

二是如何把各式各样的实际问题归纳成线性规划问题。本书的第二部分以生产管理和经济规划的一些问题为例，对此进行了阐述。它为如何选择和构成线性规划问题提供了思路和方法，因而对其它实际问题的解决也具有参考意义。

鉴于作者从事线性规划问题研究的实际经验，使得本书能够写的比较通俗易懂，深入浅出。尽管作者避开了一些数学上的论证，但讲述仍然系统严谨。因此，本书对于工厂的调度、生产管理人员，对于经济、企业管理的研究人员以及对于这类专业的院校师生，都有一定的参考价值。

游　兆　永

1979．11．17．

目　　录

第一部分　由实际问题引出线性规划

第一章　把实际问题归纳成线性规划问题……………………1
第二章　解线性规划问题的单纯形法……………………………10
第三章　求最大值的线性规划……………………………………32
第四章　线性规划的对偶问题及对偶单纯形法…………47
§1. 线性规划的对偶问题……………………………………47
§2. 对偶单纯形法………………………………………………58
第五章　人造基底………………………………………………………62
第六章　解的可靠性……………………………………………………77
§1. 存在着多个解的问题……………………………………77
§2. “退化”现象…………………………………………………84
第七章　用电子计算机解线性规划问题的原理…………93

第二部分　生产管理与电子计算机应用

第一章　如何提高生产效率……………………………………111
§1. 在生产配套的条件下确定机床的最大生产率……111
§2. 在生产配套的条件下确定工厂之间的最佳协作……………………………………………………126
§3. 在生产配套的条件下确定企业的最大生产率……133
§4. 电子计算机形成系数矩阵……………………………141
第二章　物资最佳调运问题…………………………………153
§1. 产销平衡的物资最佳调运问题………………………153
§2. 产大于销需要库存的物资最佳调运问题…………163

§3. 产小于销供不应求的物资最佳调运问题 ········ 172
§4. 车船合理调度问题 ································ 177
§5. 形成康脱洛维奇问题系数矩阵的子程序 ········ 181
第三章 怎样才能节约原材料 ························ 190
§1. 下料问题 ·· 190
§2. 再谈下料问题 ···································· 197
§3. 配料问题 ·· 209
§4. 形成系数矩阵的子程序 ···························· 220
第四章 降低成本问题 ······························ 226
§1. 各种运输工具的充分利用问题 ···················· 226
§2. 网络流程问题 ···································· 233
§3. 如何控制生产进度 ································ 255
§4. 如何安排对外加工 ································ 260
§5. 形成系数矩阵的子程序 ···························· 267
第五章 工厂合理布局问题 ·························· 283
第六章 指标的均衡确定及投入产出模型 ·············· 297
§1. 生产指标的均衡确定之一 ························ 297
§2. 生产指标的均衡确定之二 ························ 303
§3. 生产指标的均衡确定之三 ························ 313
§4. 形成指标确定问题系数矩阵的子程序 ·············· 323
§5. 博奕论简介 ······································ 332
§6. 最佳策略的确定 ·································· 339
§7. 投入—产出模型 ·································· 348
第七章 线性规划问题的通用程序 ···················· 365
附录 DJS-18 机算法语言简要说明 ·················· 403
结束语 ·· 423

第 一 部 分

由实际问题引出线性规划

第一章 把实际问题归纳成线性规划问题

搞生产，人们都希望在一定的人力、物力条件下，能创造出最大的产值，或在产值一定时，希望能消耗最少的人力、物力；搞运输，人们都希望在最短的时间内，让货物走最短的路程，即用最少的运费来完成一定的运输任务；搞调度，人们都希望让空车跑的路程越短越好，以便节约燃料、提高车辆的利用率；搞计划，人们都希望能统筹考虑各种条件，以便找到最佳方案。总之，在整个生产活动中，人们总是希望能合理使用人力、物力，做到“人尽其才”、“物尽其用”，在最短的时间内创造出最大量的财富。线性规划就是研究这一类问题的一种数学方法。在这个领域内所研究的问题，“因”、“果”是成正比关系。例如，若用1吨A原料可以生产0.7吨B产品，那么认为用2吨A原料就可以生产1.4吨B产品。也就是说“因”、“果”之间存在着线性关系。而且应该强调指出，我们所研究的不是如何执行和实施计划，而是如何制定计划，即如何“规划”，所以研究这类问题的学问就叫线性规划。

线性规划的应用范围相当广泛。概括起来，它研究两个方面的问题，一方面是给定了一定数量的人力、物力资源，研究如何运用这些资源才能完成最大量的任务；另一方面是，已给定了一项任务，研究如何统筹安排，才能以最小量的资源去完成这项任务。因此在生产活动的各个环节中，线性规划都有自己的用武之地。那么，如何用线性规划来解决实际问题呢？

自然，要想用线性规划来解决实际问题，首先必须把实际问题归纳成线性规划问题。我们通过下面的例子来说明如何用数学表达式来描述线性规划，又如何把实际问题归纳成线性规划问题。

例如某工厂生产A和B两种产品。已知制造1吨A产品要消耗8吨煤，电力10千瓦，技工4人；制造1吨B产品要消耗4吨煤，电力2千瓦，技工6人。又知制造1吨A产品，其产值为12万元，制造1吨B产品产值为8万元。

假定工厂有技工240人，限定用煤量不得超过360吨，要求在耗电量最少的情况下，产值不得小于500万元，那么应当生产多少吨A产品和多少吨B产品呢？

将上述条件和要求列成表(1-1)。

表 1-1

产品种类		A	B	条件限制
生产一吨产品所消耗各资源量	煤(吨)	8	4	$\leqslant 360$
	电力(千瓦)	10	2	—
	技工(人)	4	6	$\leqslant 240$
一吨产品产值(万元)		12	8	$\geqslant 500$

为了将上述条件和要求用数学表达式表示出来，我们用 x_1，x_2 分别表示生产 A 产品和生产 B 产品的数量，单位为吨。由于生产 1 吨 A 产品需要 8 吨煤，技工 4 人，所以生产 x_1 吨的 A 产品就需要 $8x_1$ 吨煤和 $4x_1$ 名技工。同样生产 1 吨 B 产品需要 4 吨煤和 6 名技工，那么生产 x_2 吨 B 产品就需要 $4x_2$ 吨煤和 $6x_2$ 名技工。因此可以把表(1-1)中的部分条件限制，列成下列不等式：

$$\left.\begin{aligned}8x_1+4x_2\leqslant 360\\4x_1+6x_2\leqslant 240\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

(1-1) 式表明，不论生产多少吨 A 产品，也不论生产多少吨 B 产品，即不论 x_1 为多少，x_2 为多少，但它们所消耗的煤不得大于 360 吨，所需技工人数不得超过 240 人。

假定不生产 A 产品，只生产 B 产品，则有

$$x_1=0,\qquad x_2>0$$

假定不生产 B 产品，只生产 A 产品，则有

$$x_2=0,\qquad x_1>0$$

但这两种情况中绝不会有生产“负产品”的情况，即 $x_1<0$ 或 $x_2<0$ 在这里是没有任何意义的。所以我们不允许有 $x_1<0$ 或 $x_2<0$，因此还要限制 x_1 和 x_2 不能为负值，即：

$$\left.\begin{aligned}x_1\geqslant 0\\x_2\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

生产 1 吨 A 产品可以创造产值 12 万元，生产 x_1 吨 A 产品便可创造 $12x_1$ 万元。生产 1 吨 B 产品可以创造产值 8 万元，生产 x_2 吨 B 产品便可创造 $8x_2$ 万元。那么生产 x_1 吨 A 产品和 x_2 吨 B 产品总共可创造产值 $(12x_1+8x_2)$ 万元，由表(1-1)中的限制条件知，它不能低于 500 万元，因此有：

$$12x_1+8x_2 \geqslant 500 \qquad (1\text{-}3)$$

把 (1-1)，(1-2)，(1-3) 式汇总起来，便是用数学表达式描述了表(1-1)中的各限制条件，为：

$$\left.\begin{aligned} 8x_1+4x_2 &\leqslant 360 \\ 4x_1+6x_2 &\leqslant 240 \\ 12x_1+8x_2 &\geqslant 500 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}4)$$

其中： $x_1 \geqslant 0$， $x_2 \geqslant 0$

因为研究不等式不如研究等式方便，所以在每个关系式中引进一个新的非负的辅助变量，使不等式组(1－4)变为一个等式方程组：

$$\left.\begin{aligned} 8x_1+4x_2+x_3 &= 360 \\ 4x_1+6x_2+x_4 &= 240 \\ 12x_1+8x_2-x_5 &= 500 \end{aligned}\right\} \qquad (1-5)$$

我们称引进的辅助变量 $x_i(i=3,4,5)$ 为“松驰变量”。在本问题中，x_3 表示没有被利用而剩余的煤的数量，单位为吨。x_4 表示没有分配工作而闲着的技工人数，x_5 表示多创造出的产值，单位为万元。显然，松驰变量也不可能为负数。因此，应将(1－2)式的下标范围扩大，有：

$$x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,5) \qquad (1\text{-}6)$$

方程组(1－5)中有 5 个未知量，而方程只有 3 个，一般地讲，这样的方程组可以有无数个解。现在我们要从这无数个解中选择对于某些准则最合适的 $x_i \geqslant 0(i=1, 2, \cdots, 5)$。这样的准则在本问题中，就是考虑要消耗最少的电力。由表(1-1)知，生产 1 吨 A 产品要耗电 10 千瓦，生产 x_1 吨 A 产品就要耗电 $10x_1$ 千瓦 。生产 1 吨 B 产品要耗电 2 千瓦 ，生产 x_2 吨 B 产品就要耗电 $2x_2$ 千瓦。假定用 S 表示生产 x_1 吨 A 产

品和 x_2 吨 B 产品的总耗电量，那么有：

$$S=10x_1+2x_2 \tag{1-7}$$

(1－5)式中，松弛变量 x_3，x_4，x_5 不允许同时都大于零，因为，若煤有剩余（即 $x_3>0$），有的技工闲着（即 $x_4>0$），而所创造的产值比定额500万元还要多（即 $x_5>0$），虽然这可能消耗较少的电量，但它与正常的生产规律和情理不相符合，一般不会这样安排生产。因此必须对这种情况加以限制，应当尽力挖掘一切人力（在此是技工）、物力（在此是煤）以创造更多的产值。在这一前提下，争取消耗最少的电力。所以应有 $x_3=0$ 或 $x_4=0$，或 $x_3=0$ 与 $x_4=0$ 同时存在，才与正常安排生产的规律相符合。为了对上述情况加以限制，我们给(1－7)式再加上一项，改为：

$$S_1=10x_1+2x_2+Mx_3 \tag{1-8}$$

其中 M 为一个相当大的正数。如果 $x_3=0$ 或 x_3 趋近于零，那么 Mx_3 也等于或趋近于零，这时(1-8)式与(1-7)式是等效的。否则若 x_3 是一个大于零的正数，M 又是一个相当大的正数，Mx_3 便是一个不能忽略的数，且随着 x_3 的增加而急剧的增加。此时，既使(1-7)式达到了极小值，(1-8)式也不可能达到极小值。因此 Mx_3 这一项便起到了对上述不合规律和情理的情况进行限制的作用。在本问题中，Mx_3 这一项表明，一定要将全部的煤用来生产 A 产品和 B 产品，不许有剩余。

这样一来，便把本问题变为，要寻求一组 $x_i(i=1,2,\cdots 5)$ 的值，使得满足：

$$\left.\begin{aligned}8x_1+4x_2+x_3&=360\\4x_1+6x_2+x_4&=240\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}12x_1+8x_2-x_5=500\\x_i\geqslant 0\\(i=1,2,\cdots,5)\end{array}\right\}\qquad(1\text{-}9)$$

并使：
$$S_1=10x_1+2x_2+Mx_3\qquad(1\text{-}10)$$

为最小的数学问题。该数学问题即是线性规划问题，称(1-9)式为线性规划问题的约束条件，称(1-10)式为线性规划问题的目标函数。(1-9)式是由(1-4)式变换来的，所以通常我们也称(1-4)式为约束条件。

通过上例也可以看出，要想把实际问题归纳成线性规划问题，一般来说，要考虑下述三方面的情况：

(1) 技术情况：如在(1-4)不等式组中，不等号左边x的系数就表示了一套已给定的技术情况；

(2) 限制条件：如在(1-4)不等式组中，不等号右边所列的数字，就表示了对各种可能的解答所给出的限制范围；

(3) 达到的目标：如(1-7)式所示，即目标函数，它表示了选择最优解的准则。

还需要指出二点：

(1) 必须将约束条件用数学形式表示为线性等式或线性不等式，并将目标函数表示为线性函数。

(2) 一定要有达到目标的不同方法，即必须有选择的可能。在数学上体现为有无数解，从无数解中选择最优解。

在上述例子中，(1)技术情况，就是生产1吨A产品和1吨B产品所需要的煤的数量、技工人数及创造的产值等诸情况；(2)限制条件，就是使用的煤和技工人数不能超过一定的限额，而所创造的产值不能低于一定的限额；(3)达到的目标，就是要求所耗用的电量为最小值。

由(1-4)、(1-7)式知约束条件和目标函数均是线性的。而且将(1-4)不等式组变换成(1-9)方程组后，有三个方程，却有五个未知量，因此，对解有各种选择的可能。

为了写出线性规划的一般表达式，我们将(1-4)的第三个不等式二边均乘以一个"-1"，便得到：

$$\left.\begin{aligned}&8x_1+4x_2\leqslant 360\\&4x_1+6x_2\leqslant 240\\&-12x_1-8x_2\leqslant -500\end{aligned}\right\}\tag{1-11}$$

其中： $x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$

用 a_{ij} 来表示(1-11)式中 x_j 的系数，不等式的顺序用 i 表示，变量 x_j 的顺序用 j 表示。即 $i=1$ 时，表示第一个不等式，$j=1$ 时表示 x_1 的系数，所以有：

$$a_{11}=8,\quad a_{12}=4,$$
$$a_{21}=4,\quad a_{22}=6,$$
$$a_{31}=-12,\quad a_{32}=-8。$$

用 b_i 表示(1-11)式右边的限制条件，即常数项。所以有：

$$b_1=360,\ b_2=240,\ b_3=-500$$

因此可将(1-11)式改写成：

$$\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_j\leqslant b_i\quad (i=1,2,3)\tag{1-12}$$

用 c_j 表示(1-7)式中 x_j 的系数，所以有：

$$c_1=10,\qquad c_2=2$$

便可将(1-7)式改写成：

$$S_1=\sum_{j=1}^{2}c_jx_j\tag{1-13}$$

故由(1-4)、(1-7)式构成的线性规划问题可以写成在约束条件：

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leqslant b_i \\ x_j \geqslant 0 \\ (i=1,\ 2,\ 3;\ \ j=1,\ 2)\end{array}\right\} \tag{1-14}$$

下，确定 x_j，使目标函数

$$S_1=\sum_{j=1}^{2} c_j x_j \tag{1-15}$$

为最小值。

推而广之，在一般情况下，假定不等式组中共有m个不等式，有n个未知数。那么问题就可以写成，在约束条件：

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \\ x_j \geqslant 0 \\ (i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n)\end{array}\right\} \tag{1-16}$$

下，确定 x_j，使目标函数

$$S_1=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-17}$$

为最小值。

不难看出，在上面讲的线性规划应考虑的三个方面中，a_{ij} 描述了(1)技术情况；b_i 描述了(2)限制条件；c_j 描述了(3)达到的目标。由(1-16)、(1-17)式知，约束条件和目标函数均是线性的，当引进松弛变量把(1-16)式变换成等式后，便有无数个解可供选择。因此，只要将实际问题归纳成(1-16)、(1-17)式所述的形式，便可以用线性规划的方法来求解。

换句话说，要想把实际问题归纳成线性规划问题来求解，必须首先确定三个方面的情况：(1) 技术情况，(2) 限制条件，(3)达到的目标。也就是必须首先确定(1) a_{ij}、(2) b_i、(3) c_j($i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$)的数值，并将其归纳成(1-16)和(1-17)式的形式，然后才可以按线性规划问题来解。

这里顺便提一句，若将(1-16)式中的“$\leqslant$”号换成“$\geqslant$”号仍然是线性规划问题，即(1-16)式中的不等号可以是“$\leqslant$”号，也可以是“$\geqslant$”号，均属线性规划问题。

第二章　解线性规划问题的单纯形法

在第一章中，我们把实际问题归纳成了线性规划问题，那么用什么方法来解线性规划问题呢？

解线性规划问题的方法有好几种。如图上作业法可以解决车船调度问题，表上作业法可以解决某些物资调运等一些特定的问题，但他们都不能解决一般的线性规划问题，然而任何线性规划问题却都可以用单纯形法来解决，所以单纯形法是一种十分有用的方法。用单纯形法来求解线性规划问题，并不需要高深的数学知识，只需要加、减、乘、除四则运算。虽然计算时手续较繁琐，但它有一定的“规则”，掌握起来并不难。尤其在今天，电子计算机得到了广泛的应用，对单纯形法来说，很容易用电子计算机来代替人工计算，在第七章中将对此做一介绍。这就使得单纯形法成为解决线性规划问题最强有力的方法。

在本章里，我们通过解第一章的例子来介绍单纯形法。

由 (1-9) 式可以看出，三个方程联立，却存在着五个相互独立的自变量 $x_j(j=1, 2, \cdots, 5)$。可见，此联立方程的解不可能是被唯一确定的，它存在着无数个解。现在，正是要从所有可能的、这无数个未被唯一确定的解中，寻找出满足 S_1 为最小值的解。显然，我们不可能先将所有可能的解全求出来，然后再去寻找满足 S_1 为最小值的解。因此，通常线性代数的求解方法对此线性规划问题已不适宜。那么用什么

方法才可以求出既满足约束条件的要求，又可以使目标函数达到最小值的解呢？又如何来判断此解就是使目标函数 S_1 已达到最小值的解呢？

现在，我们通过解第一章的例子来讲清上述问题。为此，首先给出“基底”和“基底描绘”的概念。为了叙述和计算的方便，我们将(1－9)式写成矩阵的形式，有：

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 240 \\ -500 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}18)$$

所谓“矩阵”，不过是把一些“数字”按一定的规则排列成矩形。如把(1-9)式 x_1 的系数排成一列，并把它放在第一列的位置。把 x_2 的系数排成一列，并把它放在第二列的位置上。依次类推，那么(1-9)式 x_j 的系数就排列成一个矩阵，即(1-18)式最左边的矩阵。同样，把(1-9)式等号右边的数据排成一列，就构成如(1-18)式等号右边的矩阵。由于矩阵中第一列数字是 x_1 的系数，第二列是 x_2 的系数等等，即每一列数字都有自己一定的位置，而不能任意乱放，就好象它们有一定的“方向”一样，所以称(1-18)式中矩阵的每一列都是一个列向量。

用 $p_j(j=1, 2, \cdots, 5)$表示(1－18)式中的列向量，即用 p_j 表示(1－9)式第 j 个未知量的系数。(1－18)式右边的常数项列用 p_0 表示，即 p_0 是表示条件限制的列向量，可称其为“要求向量”或“常数项”。把 p_0 的位置换一下，放在最左边，这样可以把(1-18)式的系数列成表(1-2)的形式：