

滤波技术

潘祖善 何绍雄 贾学堂 编



上海交通大学出版社

滤 波 技 术

潘祖善

何绍雄 编

贾学堂

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书共分八章。第1章概论,主要阐述了滤波技术的概念;第2章逼近技术,介绍了逼近准则;第3章数字滤波器的设计技术;第4章滤波器的稳定及实现,论述了有关定理及稳定实现的各种形式;第5章灵敏度,介绍了极点和零点、网络函数的灵敏度;第6章离散富里埃变换及其快速计算技术,阐述了FFT的时间和频率的抽取算法;第7章随机信号处理,介绍了系统对随机信号的响应、随机信号的模型、随机信号的检测、未知信号的提取及估计理论等;第8章有源滤波器,介绍了APF的分类及比较、典型的分析、主回路的结构及PWM控制方法等。

本书可作力大学本科生、研究生的教材及有关科技工作者的参考书。

上海交通大学出版社出版、发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

全国新华书店经销

上虞市科技外文印刷厂印刷

开本: 787×1092 (毫米) 1/16 印张: 12 字数: 297000

版次: 1997 年 5 月 第 1 版 印次: 1997 年 5 月 第 1 次

印数: 1—1000

ISBN 7-313-01768-5/TB·035 定价: 14.00 元

目 录

1. 概 论	1
2. 逼近技术	6
2.1 传递函数	6
2.2 理想滤波器矩形幅频特性和线性相频特性间的不相容性	7
2.3 逼近技术	8
2.3.1 Taylor (Butterworth)逼近准则	8
2.3.2 等纹波(Chebyshev)逼近准则	10
2.3.3 Caue逼近准则	11
2.3.4 最小均方误差逼近准则	12
2.3.5 滤波器阶数 n 的决定	12
3. 数字滤波器设计技术	14
3.1 概述	14
3.2 无限冲激响应(IIR)滤波器	15
3.2.1 冲激不变法	16
3.2.2 双向性变换	18
3.2.3 滤波器的频率变换	22
3.2.4 模拟滤波器的频率变换	22
3.2.5 数字滤波器的频率变换	24
3.3 有限冲激响应(FIR)滤波器	27
3.3.1 FIR滤波器的窗技术设计方法	28
3.3.2 FIR滤波器的频率采样设计法	33
4. 滤波器的稳定及实现	36
4.1 定义	36
4.2 定理	36
4.2.1 定理一	36
4.2.2 定理二	36
4.2.3 定理三	37
4.3 稳定的补救措施	38
4.4 滤波器的实现	39
4.4.1 直接实现形式	39
4.4.2 直接规范实现形式	42

4.4.3 级联实现形式	43
4.4.4 并联实现形式	44
4.4.5 简单的讨论	44
4.5 用软件执行数字滤波器的任务	45
5. 灵敏度	46
5.1 概述	46
5.2 极点和零点灵敏度	46
5.3 网络函数灵敏度	50
5.4 数字滤波器中的量化效应	53
5.5 数字滤波器的网络函数灵敏度	51
6. 离散富里埃变换及其快速计算技术	57
6.1 概述	57
6.2 FFT的基本概念	59
6.3 FFT的时间抽取算法	60
6.4 FFT的频率抽取算法	65
7. 随机信号处理	67
7.1 随机信号	67
7.2 系统对随机信号的响应	73
7.2.1 线性定常系统	73
7.2.2 非线性系统	75
7.3 随机信号的模型	80
7.3.1 表示定理	80
7.3.2 随机信号产生机理的模型	81
7.4 数字滤波器中的量化噪声	87
7.5 叠加噪声的正弦信号的包络线和相位	94
7.6 混在噪声中的已知信号的检测	97
7.6.1 信号的检测	97
7.6.2 匹配滤波器	99
7.7 噪声中未知信号的提取	101
7.7.1 信号的加强与噪声的减弱	101
7.7.2 非递推维纳滤波器	104
7.7.3 递推维纳滤波器	107
7.7.4 (标量)卡尔曼滤波器	109
7.7.5 (标量)卡尔曼预测器	113
7.7.6 (矢量)卡尔曼滤波器和预测器	114
7.7.7 卡尔曼平滑	122

7.7.3 连续的稳定的随机过程的估计问题	123
7.8 估计理论	129
7.8.1 概述	129
7.8.2 定义与定理	130
7.8.3 各种代价函数下的 Bayes估计	133
7.8.4 最小平方估计	135
7.9 参量估计	137
7.9.1 概述	137
7.9.2 稳定性和遍历性的鉴定	137
7.9.3 均值、方差、自相关及功率谱密度函数的估计	139
7.9.4 随机信号的模型及其参数估计	141
7.10 自适应滤波器	160
7.10.1 概述	160
7.10.2 自适应滤波器的原理与应用	160
7.10.3 自适应滤波器的结构与算法	162
7.10.4 自适应滤波系统	170
8. 有源滤波	172
8.1 概述	172
8.2 基本原理	172
8.3 APF 的分类及比较	173
8.4 一个典型的APF 的剖析	175
8.4.1 基于瞬时无功功率理论的谐波检测电路	175
8.4.2 APF的主回路结构及理论分析	177
8.5 APF的PWM 控制方法	182
8.5.1 三角波比较法	182
8.5.2 软件法	183
8.5.3 自适应电流跟踪法	183
参考文献	185

1 概 论

滤波技术是信号处理学科领域之一。

何谓信号？何谓信号处理？

信号可被定义为描述有关物理系统状态或性能信息的函数。例如语言信号，则是时间的函数；图像信号，则是两维空间变量的亮度的函数。

在给定时间，信号的值可以是实数，也可能以复数表示。

需要指出的是，描述相同的信息，可以采用多种不同形式的信号。

按照信号的特征或函数的形式，信号可分成：

确定性信号或随机信号；

稳态信号或暂态信号；

恒定信号或变化信号；

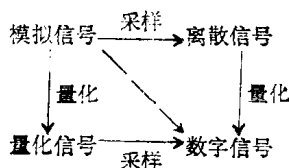
直流信号或交流信号；

周期信号或非周期信号；

正弦信号或非正弦信号；

等等。

在上述各种形式的信号分类中，又可按照它们时间坐标及幅值坐标的取值是离散或是连续而分成模拟信号或是数字信号。模拟信号和数字信号的关系可用下图表示：



不论信号的形式如何，它之所以令人感兴趣，仅仅是因为它包含有信息。问题在于信号的产生、传输、接收及测量过程中都不可避免地受到噪声的污染。噪声(或称干扰)可分成：

(1) 相关噪声(干扰)

卷积噪声

$$y(t) = x(t) * n(t)$$

乘法噪声

$$y(t) = x(t) \cdot n(t)$$

(2) 不相关噪声(干扰)

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

所谓相关噪声，意味着信号与噪声相互依存，例如肌电信号，如肌肉不作收缩活动，则测试电极既接收不到肌电信号，也接收不到噪声。但一旦肌肉作收缩动作，则在测试电极中可同时收到与肌电信号相伴而生的噪声。所谓不相关噪声，是指信号与噪声相互独立，没有信号也

照样可以接收到噪声,在示波器测试过程中,在电视机接收过程就中常见到这种现象。

为了在受到噪声污染的信号与噪声的混合体中,尽可能地抑制噪声、恢复信号本来的面目,或把真实信号抽取出来,这就是信号处理的目的。如果离线进行,这种工作常称为数据处理;在线进行,常称为信号处理。信号处理的基本任务是:

- (1) 信号的改造;
- (2) 噪声的抑制;
- (3) 信号的提取。

一般说,信号处理可以分成如下几方面的工作:

- (1) 线性或非线性滤波;
- (2) 频谱的分析或估计;
- (3) 信号的检测或估计;
- (4) 数据的压缩或扩张;
- (5) 信号的识别;
- (6) 建模和模型识别;
- (7) 曲线的拟合;
- (8) 等等。

为了完成上述各方面的工作,具体操作上可能要采取各种手段,例如

- (1) 放大;
- (2) 调制和解调;
- (3) 检波和整流;
- (4) 平均和整形;

(5) 加强(信号的加强与放大,在做法上是不同的。信号的加强,要利用信号本身的统计性质采取必要的措施,以抽取被“埋葬”在噪声中的信号,从而改进测量的准确度)。

- (6) 滤波;
- (7) 等等。

本书介绍信号处理中的滤波技术。从狭义讲,信号与噪声各占相互分离的频谱,只要设法将噪声“频谱滤除,即可将信号抽取出来,此称为滤波。从广义言,面对的现实是信号被“埋葬”在噪声之中,信号与噪声的频谱互相重叠,此时可能有下列几类情况:

- (1) 信号是未知的,但要判断信号是否存在?
- (2) 信号是已知的,但要判断信号是否存在?
- (3) 信号是已知的,但要估其参数;
- (4) 信号是未知的,要估计其波形或状态;
- (5) 等等。

为了达到上述目的,既可在频域进行滤波(如Wiener 滤波器),也可在时域进行滤波(如Kalman 滤波器)。

有时候,相对于平滑(smoothing)和预测(prediction),滤波(filtering)有其特定的涵义,但有时候又往往指这三者的总称。

实现滤波技术的系统,称为滤波器。滤波器种类繁多,按构成的元器件,可分无源滤波器和有源滤波器(含运放);按处理的对象,可分模拟滤波器和数字滤波器;按其输入-输出关

系,可分线性滤波器和非线性滤波器;按表征其性能的传递函数中的系数,可分成定常系数滤波器和变系数滤波器,而后者又可分成可编程滤波器和自适应滤波器;按工作性质,又可分为被动滤波器和主动滤波器(又称有源功率滤波器)。70年代初,德国 Ruhr 大学教授A.Fettwies又提出不同于传统观念的波数字滤波器。这里要指出,习惯上的有源滤波器和此处的主动滤波器,在英文原文中皆为 Active Filter,但其工作特点是不同的,习惯上所谓的有源滤波器,指其包含运算放大器,相当于存在电压源或电流源。此处所谓的主动滤波器,是指它不同于常规滤波器被动地工作,能根据对负载电流的检测结果,主动产生一个补偿电流,用以抵消负载电流中的某些成分,使输入电流中不含有这些成分。后者也称为有源滤波器。

上面提到的所谓系统,可能仅仅是几个简单元器件的组合,也可能是大量功能块依据某种目的、按照某种方式形成的一个整体。对于系统,存在两大类的问题;其一是分析,其二是综合。

分析的任务在于估算一个给定系统的性能,综合的任务在于为满意地实现给定的目标而要制定一个具体的系统。为进行对系统的分析,需要利用数学工具描述信号及其变换过程。为进行对系统的综合,往往要面对许多客观的制约。

(1) 时间——带宽的制约。在信号发送传输过程中,总要求在尽可能短的时间内传送尽可能多的信息。因此产生信道带宽与反映信号为传送速率的信号带宽之间的矛盾。一般情况下,常取信道带宽为载波频率的10%左右,设计者务必保证信号和带宽小于或至多等于信道带宽。

(2) 噪声的制约。鉴于噪声的存在,电气系统中的噪声是无法避免的,信号处理充其量把噪声尽可能降低,但最终不能消除。因此任何低噪声放大器的设计都有其不可逾越的极限,而任何无限提高放大倍数的做法也是枉然的,由于信噪比没有改进,在提高信号强度的同时,也提高了噪声的强度。

(3) 性能-价格比的制约。过分地追求性能的改进,势必增加系统的复杂性,难于调整,难于维修。同时,使用的元器件数量的增加,系统的可靠性也会降低,参数的离散性的累积现象更趋严重。因此作为工程设计,系统的性能-价格比是必须考虑的。

(4) 元器件本身使用的限制。例如对于:

① 模拟信号,就必须采用传统的无源元件或有源元件,或采用 SAWD(Surface Acoustic Wave Devices);

② 数字信号,就必须采用 DIC(Digital Integrated Circuits);

③ 离散信号,就必须采用 CCD(Charge Coupled Devices)、BBD (Bucket Brigade Devices)或MOS(Metal-Oxide Semiconductor)等等。

为了比较各类元器件的特点、了解它们演变的进程,读者可以通过下面介绍的一些情况得到说明。

设有传递函数

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

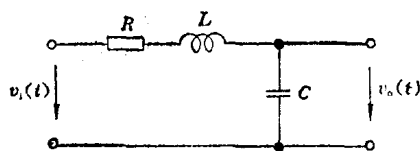


图1-1

反映了图 1-1 的输入-输出关系。图1-1所示的电路

极为简单,易于设计、安装和测试。但是,由于电感的存在,却使这电路的集成化陷于不可能。事实上,此电路在低频应用时,可能要求较大体积及重量的电容和电感。

为克服此困难,设计者可以采用有源元件,构成如图1-2的电路,取代图1-1的电路,以实现传递函数 $H(s)$ 。从图1-2可见,电路中没有电感,使用一些较小尺寸的分立元件即能实现给定的 $H(s)$ 。

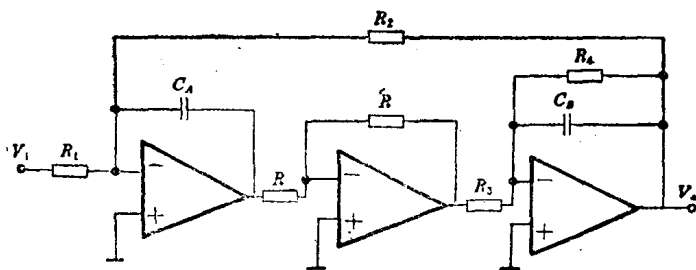


图1-2

然而,若要进一步将这一电路集成在MOS芯片上时,发现又存在一些实际的困难。因为 RC 元件都要占有较大的芯片面积,它们的参数值很难做得十分准确,电路的稳定性也常成问题。解决这些困难的有效办法是以电容及几件开关的组合代替电阻。如图1-3所示。图中4个开

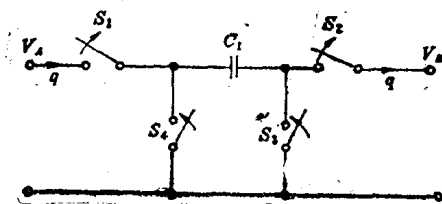


图1-3

关周期性以远快于端点电压 V_A 及 V_B 变化的速度闭合和断开。当 S_2, S_3 闭合而 S_1, S_4 断开时 C_1 放电,但当 S_2, S_3 断开而 S_1, S_4 闭合时, C_1 充电,有 $V_C = V_A - V_B$ 。充电过程中电荷 $q = C_1 V_C = C_1(V_A - V_B)$ 就流经图中的支路。然后 C_1 再通过 S_2, S_3 放电,如此每经 T 秒而复始。 T 是开关的周期,因此流经支路的平均电流为

$$i_{av} = \frac{q}{T} = \frac{C_1}{T} (V_A - V_B)$$

所以

$$i_{av} \propto (V_A - V_B)$$

另一方面,一个含有电阻 R 的支路,其支路电流为 $i = \frac{1}{R} (V_A - V_B)$,两者有相似之处。如果保持关系 $R = T/C_1$,则流经的电流就相等。因此开关及电容的组合能用来代替电路中的电阻,结果电路中就只含有电容、开关及运算放大器。这样,以前取决于 RC 乘积的时间常数能以下式表示:

$$RC = (T/C_1)C = T(C/C_1)$$

此处, T 取决于石英晶体及其相关的时钟电路,应该说是既准确又稳定的。时间常数的另一个因子 C/C_1 ,就是在同一芯片上的两个电容之比,这个比值的准确度可以达到0.1%的数量级。因此时间常数最后总的准确度,较之在芯片上以 R 及 C 的组合的时间常数的准确度,至少高出几百倍。此外,在占用芯片面积的困难方面,也获得戏剧性的改进。在音频范围,例如10Krad/s,为要获得 $\tau = 10^{-4}$ s的时间常数,即使用了10pF的大电容,但仍然还需要一个10M Ω

的大电阻。这样一个电阻,约需占用 $10^6\mu\text{m}^2$ 的芯片面积,这大概已经是一个芯片面积的10%。相反,对于一个典型的 $10\mu\text{s}$ 的时钟周期,为实现 $10\text{M}\Omega$ 的电阻,在开关电容组合中,使用的电容值为 $C_1 = T/R = 10^{-5}/10^7 = 10^{-12}\text{F} = 1\text{pF}$, C_1 在芯片上约需占用 $2500\mu\text{m}^2$ 面积,就是说仅是被替代电阻占用面积的0.25%。

一般来说,一个开关在芯片上约需占用 $50\mu\text{m}^2$,一个高质量的运算放大器约需占用 $5 \times 10^4 \sim 10^5\mu\text{m}^2$ 芯片面积。一片芯片大约面积为 $5 \times 10^7\mu\text{m}^2$,因此在一个芯片上可以制作100个运算放大器、300个电容器以及500个开关。这样一个芯片载有这么多元器件,其信号处理能力足足可以完成执行阶数高达100的传递函数。而且这种SC(开关-电容)系统执行信号处理任务的速度,大大高于数字系统。此外,为完成信号处理任务所需要的直流功率,SC系统也远较数字系统为小。几年前有人统计每实现滤波器的一个极点,约需 1mW 的直流功率。较之数字系统,SC系统确实存在上述优点,但也存在许多缺点,例如:

(1) 准确度不高。上面已经说过,SC系统的时间常数的准确度可以达到其名义值的0.1%,但在数字系统中,这仅仅相当于10位的浮点运算的准确度,即

$$1/2^{10} = 1/1024 \approx 0.001 = 0.1\%$$

(2) 动态范围小。由于运算放大器及开关等的较大的噪声电平,SC系统的动态范围(最大的信号-噪声之比)难得超过100,000倍,即100dB,较为普通的是70~90dB。而数字系统的动态范围则大得多。

(3) 数字系统的突出的优点是其高度的灵活性——可编程性。传递函数系数的改变,只需要在ROM中选择不同的系数即可完成使命。SC系统则不能做成可编程的。

(4) 数字系统在实践中还有另一个重要优点是它们可通过标准工艺生产,而SC系统有其特定的设计及工艺。

总而言之,今天科技的广阔领域,已经使CCD、SAWD、DIC、SC等各种元、器件,得到广泛应用,相互补充,互相兼容。这些元器件与传统的无源元件和有源元件,共同为信号处理技术的多姿多态的应用场合,起到不可缺少的作用。

关于信号处理技术的研究内容及应用场合,许多文献和专著都有介绍。至今为止,Oppenheim与Schafer合著的“*Digital Signal Processing*”,虽早在1975年问世,但仍不失为一本很好的专著,它内容完整结构严谨。但可惜的是,许多著作都只是讨论了信号处理技术在语言处理、图像处理、雷达技术、声纳技术、地震与地下资源勘探技术、生物医学技术等等方面的应用。确实,借助于计算机、数字处理芯片等的控制和运算功能,信号处理技术更加得到了充分展现其重要性的机遇。但是,作为国民经济重要部门之一的电力系统,其系统规模之大、数据之多、影响之广、变化之快,是无与伦比的,却缺少专著和教材系统地讨论信号处理技术在此领域上的应用及应用前景。本书作为尝试,将弱电领域的信号处理技术与强电领域的谐波抑制技术结合在一起,希望形成一门新的学科,将各种滤波技术、谱分析技术、自适应技术等移植到电力系统的继电保护、无功补偿、谐波抑制及功率测量诸方面。限于篇幅,先初步介绍谐波抑制技术。作者此举之目的,是为了抛砖引玉,吁请更多的信号处理领域的专家、学者将他们的注意力适当转向在我国大有发展前景的电力系统,为开创新兴学科而共同努力。

2 逼近技术

2.1 传递函数

在最简单的情况,即双口网络的情况下,滤波器输出端的零状态响应 $R(s)$ 与输入端激励 $E(s)$ 之间的关系为

$$R(s) = E(s)H(s) \quad (2.1)$$

其中, $H(s)$ 为传递函数,其性质由 $E(s)$ 及 $R(s)$ 的性质而定。在 $E(s) = 1$, 即 $e(t) = \delta(t)$ 时,有 $R(s) = H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$, 其中 $h(t)$ 为网络的冲激响应。在正弦稳态时,由式(2.1)得

$$H(j\omega) = \dot{R}(j\omega) / \dot{E}(j\omega)$$

此处 $\dot{R}(j\omega)$ 、 $\dot{E}(j\omega)$ 表示相量。 $H(j\omega)$ 仅为复数,可表示成

$$H(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} = |H(j\omega)| / \theta(\omega) \quad (2.2)$$

通常称 $|H(j\omega)|$ 或 $|H(j\omega)|^2$ 为滤波器的幅频特性, $\phi(\omega) = -\theta(\omega)$ 为相频特性。 $|H(j\omega)|$ 的变动范围可能较大,采用对数表示比较方便,即

$$-\ln|H(j\omega)| = -\ln[|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}] = -\ln|H(j\omega)| - j\theta(\omega) = \alpha(\omega) + j\phi(\omega)$$

此处, $\alpha(\omega)$ 谓之衰减函数,单位是奈。或取常用对数,则

$$A(\omega) = -20\log|H(j\omega)| = -10\log|H(j\omega)|^2 (\text{dB}) \quad (2.3)$$

又称 $D(\omega) = -d\theta(\omega)/d\omega = d\phi(\omega)/d\omega$, 为群迟延,称 $\tau(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} = \frac{\phi(\omega)}{\omega}$ 为相位迟延。

滤波器按其用途,可分低通、高通、带通及带阻四大类。兹以低通滤波器为例,若皆以相对坐标表示,设截止频率为 $\omega_c = 1$, 则当 $\omega < \omega_c$ 时,各种频率成分的输入信号若能毫无衰减地在输出端重现,而当 $\omega > \omega_c$ 时,各种频率成分的输入信号皆被衰减殆尽而无输出,则称为理想滤波器。以滤波器术语而言,则认为在通带内衰减为零,而在阻带内衰减为无穷大。以数学语言表示,则可写成

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{其他区域} \end{cases}$$

为消除色散效应,使输出信号的频率成分无相位失真,还要求

$$\theta(\omega) = -p\omega \text{ 或 } D(\omega) = \tau(\omega) = p \quad (2.4)$$

以图2-1表示。

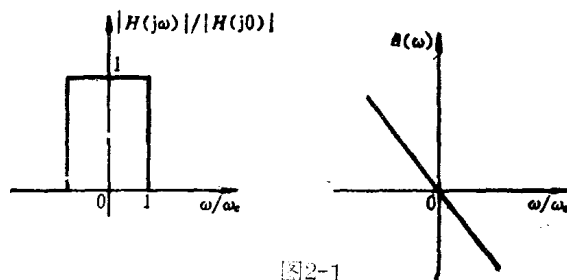


图2-1

实际滤波器不可能达到如此水平,即在通带内,衰减不为零,而在阻带内衰减不可能达到无穷大。一般常规定阻带内至少达到的衰减 A_{min} 、通带内最大允许的衰减 A_{max} 作为滤波器的指标,而且实际的滤波器在通带与阻带之间有一段过渡带。

为了讨论的方便,下面以理想滤波器为基础,分析理想滤波器的特性。请读者注意,理想滤波器能达到的指标,实际滤波器未必能达到;而理想滤波器不可能达到的指标,实际滤波器肯定不可能达到。

2.2 理想滤波器矩形幅频特性和线性相频特性间的不相容性

从稳定性的观点出发,只要求传递函数的极点皆位于左半平面,而对零点位置并无特别规定。但在实际滤波器中,考虑到结构的简单性,尽量避免采用互感元件,尽量降低滤波器特性对于元件参数变化的灵敏度,总是选用所谓最小相位网络。如果其传递函数的极点位于开左半平面,零点位于闭左半平面,在右半平面无零点,此网络即属于最小相位网络。可以证明,最小相位网络的幅频特性(或衰减函数)与其相频特性相互依存,并可通过下述Hilbert变换互求。即

$$H(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$$

$$\text{Im}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \quad (2.5)$$

$$\text{Re}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda + \text{Re}(\infty) \quad (2.6)$$

Hilbert 变换的真正意义并不在于实部和虚部(即幅频特性和相频特性)的互相换算。这种换算并无多大实用价值,而且换算过程中涉及烦琐的积分运算。Hilbert变换的意义在于揭示了虚部和实部的相互依赖性,即两者彼此不是独立的。因此,就我们的愿望出发,希望理想低通滤波器具有矩形的幅频特性和线性的相频特性,但此要求是否矛盾?两种特性是否可以同时兼有? Hilbert 变换公式表明两者不可兼有,即所谓矩形的幅频特性和线性的相频特性互不兼容,两者只能择其一。图2-2及图2-3分别表示了互不兼容的情况。

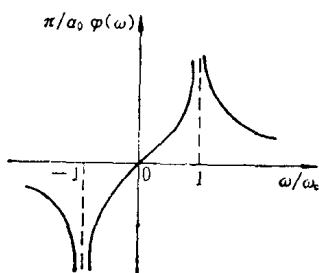


图2-2

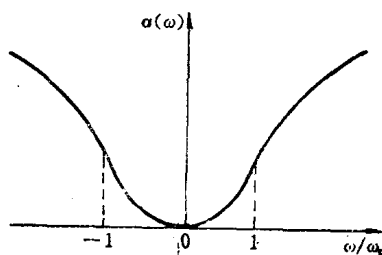


图2-3

图中 α_0 为滤波器在阻带中的衰减。由图可见矩形幅频时,相频特性与线性相差甚远;而在具有线性相频时,对应的衰减特性与倒矩形不同。

既然两者不能兼容,那么单方面的矩形幅频特性,或是单方面的线性相频特性,是否可以得到呢?这是下节要讨论的内容。

2.3 逼近技术

单方面的特性也不易得到。以幅频特性为例,为要得到矩形特性,必先在数学上找一个函数能近似表示其矩形的频率依从关系,而后才能具体实现。令矩形的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 或 $|H(j\omega)|^2$ 由式(2.3)表示,称其为目标函数,而称 $|G(j\omega)|$ 或 $|G(j\omega)|^2$ 为逼近函数,且可写成

$$|G(j\omega)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2 |K(j\omega)|^2) \quad (2.7)$$

并将 $e(\omega) = |H(j\omega)|^2 - |G(j\omega)|^2$ 定义为误差函数, $k(\omega) = |K(j\omega)|^2$ 为特征函数。欲使 $e(\omega)$ 降低,需找得合适的逼近函数,为此需首先找得合适的特征函数。

2.3.1 Taylor(Butterworth)逼近准则

设在区间 $[\omega_1, \omega_2]$ 之内, $g(\omega) \triangleq |G(j\omega)|^2$ 及 $h(\omega) \triangleq |H(j\omega)|^2$ 皆可展开成 Taylor 级数,即

$$h(\omega) = a_0 + a_1(\omega - \omega_0) + a_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

$$g(\omega) = b_0 + b_1(\omega - \omega_0) + b_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

如果有

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k,$$

则称 $g(\omega)$ 对 $h(\omega)$ 为 k 阶 Taylor 逼近,且有

$$e(\omega) = (a_{k+1} - b_{k+1})(\omega - \omega_0)^{k+1} + \dots$$

事实上,

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n h(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n g(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

对 k 阶逼近

$$\frac{d^n h(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{d^n g(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=\omega_0}, n = 0, 1, \dots, k$$

对于矩形幅频特性,目标函数 $h(\omega) \triangleq 1$,因此 $a_0 = 1, a_1 = a_2 = \dots = 0$,即 $a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n h(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=\omega_0} = 0$,其中 $n = 1, \dots$ 。由于在 $\omega = \omega_0$ 处导数为零,故又称为在 ω_0 处最大平坦逼近。

目前讨论低通滤波器, $\omega_0 = 0$,所以称为原点处 Taylor 逼近准则下的最大平坦逼近。

今取 $\varepsilon = 1, k(\omega) = |K(j\omega)|^2 \triangleq \omega^{2n}$,则逼近函数由式(2.7)得

$$g(\omega) = 1/(1 + \omega^{2n}) \quad (2.8)$$

其中特征函数 $k(\omega) = \omega^{2n}$ 为 Butterworth 多项式的最简形式,故式(2.8)称为 Butterworth 逼近,据此设计的滤波器称为 Butterworth 滤波器。

式中 n 称为滤波器的阶数。

例2.1 有电路如图2-4所示。

$R = 1\Omega, L = ?, C = ?$,方能保证此电路在原点处可以最大平坦地逼近矩形幅频特性,且在 $\omega_c = 1$ 处具有 20dB 的衰减。欲求其逼近函数

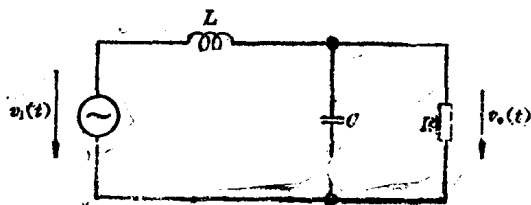


图2-4

$g(\omega)$ 。

解：因为

$$v_o(s)/v_i(s) = G(s) = 1/(LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1)$$

取 $R = 1$,

$$|G(j\omega)|^2 = 1/[1 + L(L - 2C)\omega^2 + L^2C^2\omega^4]$$

由假设

$$|G(0)|^2 = 1$$

及

$$|G(j1)|^2 = \frac{1}{2} |H(j0)|^2 = \frac{1}{2}$$

即

$$1/[1 + L(L - 2C) + L^2C^2] = \frac{1}{2}$$

所以

$$L(L - 2C + LC^2) = 1 \quad (2.9)$$

另一方面, 将 $|G(j\omega)|^2$ 在原点展开成 Taylor 级数, 有

$$|G(j\omega)|^2 = 1 - L(L - 2C)\omega^2 + L^2[(L - 2C)^2 - C^2]\omega^4 + \dots$$

但是 $h(\omega) = 1$, 即 $a_0 = 1, a_1 = a_2 = \dots = 0$, 所以

$$e(\omega) = -L(L - 2C)\omega^2 + L^2[(L - 2C)^2 - C^2]\omega^4 + \dots$$

可见, 如有 $L = 2C$, 我们将有二阶逼近。于是结合式(2.9)可得 $C = \sqrt{2}/2$ 及 $L = \sqrt{2}$, 从而有

$$g(\omega) = |G(j\omega)|^2 = 1/(1 + \omega^4)$$

或

$$|G(j\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^4}$$

上式为式(2.8)在 $n = 2$ 时的特例。为得到 s 平面的表示式, 可将式(2.8)左右两边分别写成

$$|G(j\omega)|^2 = G(j\omega)G^*(j\omega) = G(j\omega)G(-j\omega)$$

及

$$1/(1 + \omega)^{2n} = 1/[1 + (-1)^n(j\omega)^{2n}]$$

以 $s = j\omega$ 代入上述两式, 并组合得

$$G(s)G(-s) = 1/[1 + (-1)^n s^{2n}] \quad (2.10)$$

然后再按下述步骤求得 $G(s)$:

- 将式(2.10)分母分解成 s 的各因式之积;
- 把极点位于左半平面的上述因式归诸于 $G(s)$;
- 连乘可得 $G(s)$ 。

例2.2 求取3阶Butterworth滤波器的逼近传递函数 $G(s)$ 。

解: $n = 3$, 由式(2.10)得 $G(s)G(-s) = 1/(1 - s^6)$

分解得 $G(s)G(-s) = 1/[(s+1)(s^2+s+1)(-s+1)(s^2-s+1)]$

归纳左半平面的极点, 得

$$G(s) = 1/[(s+1)(s^2+s+1)] = 1/[s^3 + 2s^2 + 2s + 1]$$

Butterworth滤波器的逼近传递函数 $G(s)$ 也可由递推公式直接得到。令

$$G(s) = 1/[a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n] \quad (2.11)$$

其中

$$a_0 = 1$$

$$a_k = \cos[(k-1)\pi/2n] / \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \cdot a_{k-1} \quad (2.12)$$

因此若 $n=3$, 有

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \left(\cos 0 / \sin \frac{\pi}{6}\right) a_0 = 2$$

$$a_2 = \left(\cos \pi/6 / \sin 2\pi/6\right) a_1 = 2$$

$$a_3 = \left(\cos \frac{2\pi}{6} / \sin \frac{3\pi}{6}\right) a_2 = 1$$

所以

$$G(s) = 1/(1 + 2s + 2s^2 + s^3)$$

2.3.2 等纹波(Chebyshev)逼近准则

前述逼近准则在零点处有最大平坦逼近, 意味着在零点处与矩形的目标函数吻合得最好, 在 ω_c 处即有 3dB 之衰减。若希望能在整个通带区间都有较好的逼近, 则应选择 Chebyshev 多项式作为特征函数。此种选择使误差函数 $e(\omega)$ 在通带范围作等幅振荡, 故又称为等纹波逼近。如图 2-5 所示。

n 阶 Chebyshev 多项式定义为

$$c_n(\omega) \triangleq \begin{cases} \cos(n \cos^{-1} \omega), & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} \omega), & |\omega| \geq 1 \end{cases}$$

对于 $|\omega| \leq 1$, 有

$$c_0(\omega) = \cos 0 = 1$$

$$c_1(\omega) = \cos(\cos^{-1} \omega) = \omega$$

$$c_2(\omega) = \cos(2 \cos^{-1} \omega) = 2\omega^2 - 1$$

$$c_3(\omega) = \cos(3 \cos^{-1} \omega) = -3\omega + 4\omega^3$$

对于 $|\omega| \gg 1$, 有

$$c_n(\omega) \approx 2^{n-1} \omega^n \quad (2.13)$$

Chebyshev 多项式也可通过迭代公式得到

$$\begin{aligned} c_0(\omega) &= 1, \quad c_1(\omega) = \omega \\ c_{n+1}(\omega) &= 2\omega c_n(\omega) - c_{n-1}(\omega) \end{aligned} \quad (2.14)$$

因此, 命 $k(\omega) = |K(j\omega)|^2 \triangleq c_n^2(\omega)$, 有

$$g(\omega) = |G(j\omega)|^2 = 1/[1 + \varepsilon^2 c_n^2(\omega)] \quad (2.15)$$

或

$$A(\omega) = -20 \log |G(j\omega)| = 10 \log [1 + \varepsilon^2 c_n^2(\omega)] \quad (2.16)$$

$|\omega| \leq 1$ 时, 因为

$$-1 \leq c_n(\omega) \leq 1$$

所以

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \leq |G(j\omega)|^2 \leq 1$$

逼近传递函数 $|G(j\omega)|^2$ 及逼近衰减函数 $A(\omega)$ 的变化情况示于图 2-6 及图 2-7

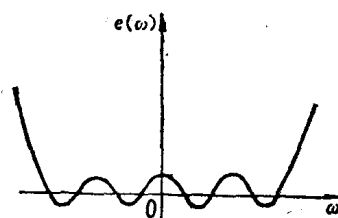


图2-5 等纹波振荡
的误差函数

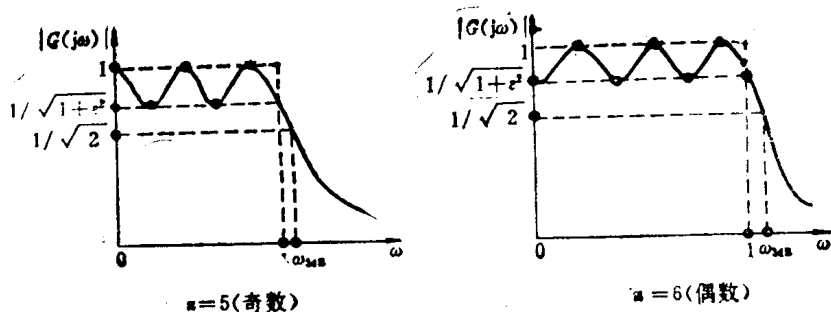


图2-6 n 为奇偶数时 $|G(j\omega)|$ 的图形

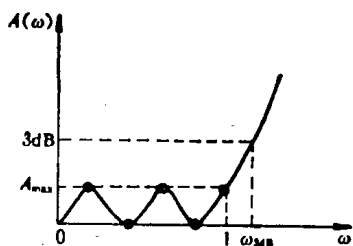


图2-7 $n=5$ 时的衰减特性

从式(2.15)、(2.16)及图 2-6、2-7 可见:

- (1) 无论 n 为奇数或偶数, 皆有 $c_n(1) = 1$ 及 $|G(j\omega)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2)$, 因此 $\omega = 1$ 总在振荡的波谷;
- (2) 在 $\omega = 0$ 处, n 若为奇数, $|G(j\omega)|^2 = 1$, 处于波顶; n 若为偶数, $|G(j\omega)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2)$, 处于波谷;
- (3) 在等幅振荡波形中, 若不计 $\omega = 1$ 边缘这一点, 则波谷波顶的个数等于滤波器的阶数 n ;

- (4) 关于波纹因数 ϵ , 可由下式计算。

由于

$$A(\omega) = -10 \log |G(j\omega)|^2 = -10 \log 1/[1 + \epsilon^2 c_n^2(\omega)]$$

$$A(\omega)|_{\max} = A(\omega)|_{c_n(\omega)=1} = -10 \log 1/(1 + \epsilon^2) = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

所以

$$\epsilon = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1} \quad (2.17)$$

2.3.3 Cauer逼近准则

Cauer逼近能同时使通带内最大衰减 $A_{\max}$ 减小、阻带内的最小衰减 $A_{\min}$ 增加, 如图 2-8 所示。此时式(2.7)中的 $k(\omega) = |K(j\omega)|^2$ 取为

$$k(\omega) \triangleq R_n(\omega) = \prod_{j=1}^m \frac{\omega^2 - \omega_j^2}{\omega_j^2 \omega^2 - 1}, \quad n = 2m \quad (2.18)$$

或

$$k(\omega) \triangleq R_n(\omega) = \omega \prod_{j=1}^m \frac{\omega^2 - \omega_j^2}{\omega_j^2 \omega^2 - 1}, \quad n = 2m + 1 \quad (2.19)$$

其中 $\omega_j < 1$, 由式(2.18)知

$$R_n\left(-\frac{1}{\omega}\right) = 1/R_n(\omega) \quad (2.20)$$

这表明在通带内减小 $A_{\max}$ 等同于在阻带内增加 $A_{\min}$ 。式中 ω_j 的一个值可以任意选定, 其余 $(m-1)$ 个 ω_j 则被等纹波的规定所确定。

根据此准则设计的滤波器又称为椭圆滤波器。详情可参阅有关文献。还有其他许多逼近技术可作为滤波器设计准则。

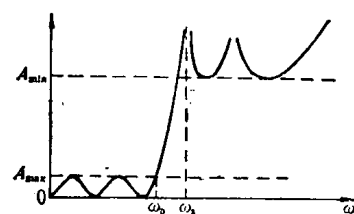


图2-8 Cauer滤波器的衰减特性