陈省身文选

传记、通俗演讲及其它

陳省身文選

——傳記、通俗演講及其它

科 学 出 版 社

1 9 8 9

本书收集了世界著名数学大师陈省身教授的文章40篇，内容包括关于他的生平、事迹、学术生涯的传记，在国际数学家大会上的三次报告，以及其他演讲，等等. 这些文章反映了陈省身教授的成才之路，学术成就、科学和教育思想，以及炎黄子孙强烈的爱国主义精神. 著名数学家吴文俊教授为本书作序.

本书对于我国广大科学、教育工作者，特别是数学工作者，广大青年学生，具有深刻的启迪性和重要的参考价值.

书名题字：陈省身

37

陈省身文选

——传记、通俗演讲及其它

责任编辑 张鸿林 杜小杨

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年8月第一版 开本：850×1168 1/32

1989年8月第一次印刷 印张：12 5/8 插页：18

印数：0001—1 640 字数：269 000

ISBN 7-03-001413-8/N·4

定价：27.40元

序

——中央研究院数学研究所一年的回忆

吴 文 俊[†]

科学出版社决定出版《陈省身文选》，内容包括陈省身教授的许多通俗演讲、综合报告、著作与人物评介，以及对自己的传记文字等．出版社要我写一篇序，并把《文选》几乎全部文章的复印件交给我，以作参考．这使我感到无上荣幸，又感到难以胜任．但在将这些复印件翻阅之后，使我回想起1946至1947年在中央研究院数学研究所期间，在陈师指导下学习拓扑学的种种经历，故作此随笔，以志不忘．

我在国外访问期间，曾与国际友人谈起各人的学术经历．我说起我与陈师本不相识，只是在中央研究院数学研究所耽了一年，从陈师学习代数拓扑，从此走上了拓扑的研究道路．闻者大为惊异，拓扑号称难学，一年就在拓扑上做出研究成果，认为不可思议，因而见人就说此事．其实这并不可怪，这正好说明陈师善于提携后进，指导有方所致，如此而已．

经过是这样的．陈师是清华大学也是西南联大的教授，而我

[†] 吴文俊(1919—)，中国科学院系统科学研究所研究员，名誉所长，中国科学院学部委员，国家自然科学一等奖获得者．——编者

毕业于上海交通大学数学系．时值抗战，我常年蛰居上海，对外界数学情况颇为茫然，对陈师也一无所闻．1945年抗战结束，我有暇得以复习旧日所学的数学．与陈师相识，全靠亲友帮助介绍．其时陈师自国外回上海主持中研院数学所，经朋友介绍往见陈师．亲戚并为我打气，说陈先生是学者，只考虑学术，不考虑其它，不妨放胆直言．在一次与陈师晤谈中，我直率提出希望去数学所．陈师不置可否，但送我出门外时，却说：你的事我放在心上．

过了没有多久，陈师通知我去所工作，从此我便走上了数学研究的道路．

当时的数学所规模很小，只占据一座楼的第二层．最大的一间供会议与报告之用，次大的是图书室．我被安排在图书室作为工作地点．陈师独居一室，只记得有一架打字机，陈师经常在上面用一个指头打字．其余大都是大学毕业未久的年轻人，分居各室．我到那里时数学所刚成立，陈师出身北方大学，但对吸收年轻学子毫无门户之见．他们来自武汉大学、浙江大学、上海大同大学，我来自上海交大．来自西南联大者只有陈国才一人．

数学所只办了三年．在将近四十年后，1985年陈师又在天津办起了南开数学所．两个数学所虽然人物已非，内容有异，但都体现了陈师的宏伟意图，想通过它们来振兴中华数学，使中国在未来成为与国外平等独立，甚或领导世界的数学大国，有步骤有计划地稳步进行，前后是颇为一致的．南开的数学所，正是四十年前中研院数学所不幸中断的一个继续．

中研院数学所的第一年，我们的学习集中于代数拓扑，陈师为此一周要讲多达十二小时的课，并经常到我们的房间里来讨论拓扑中的各种问题．在这一年中，陈师很少讲到微分几何．我在数学所只耽了一年，以后数学所搬往南京，又新来了不少人，也仍以

代数拓扑为研究与学习的中心．但在私下里，陈师曾多次和我谈起，他的主要目标不是拓扑而是大范围或整体性微分几何．

E. Cartan 是近代最伟大的微分几何学家[1]．陈师是 E. Cartan 的当之无愧的继承人[2]，也是现代微分几何的奠基人．E. Cartan 的全部著作中的微分几何部份，几乎全部局限于局部性的微分几何．虽然在晚年注意到李群的整体性质，并提出后来为 L. S. Pontrjagin 所证明关于古典李群 Betti 数的可能公式，以及后来为 de Rham 所证明对微分流形拓扑性质带有根本性的猜想，但本人并非拓扑专家，且垂暮之年也已无力为此．代数拓扑虽创自法国的 H. Poincaré，但直到 30 年代，法国并没有真正的代数拓扑学家，法国第一个这样的拓扑学家，是 E. Cartan 的学生 C. Ehresmann．他为了完成博士论文需要拓扑学，曾在美国普林斯顿耽过一年，就学于 S. Lefschetz 等．虽然如此，在 E. Cartan 的著作中，既指出了拓扑学对于微分几何发展的美好前景，又蕴含了许多对于拓扑学本身极有重要意义的精邃思想．C. Ehresmann 就在 E. Cartan 著作的启发之下，引进了纤维丛与联络的一般概念，成为纤维丛理论与近代联络论的奠基人之一．但更重要的发展则无疑来自陈师．

陈师在四年一次的国际数学家大会上，先后作过三次报告．第一次是在 1950 年，是一小时全会报告[3]．第三次在 1970 年，也是一小时的全会报告[4]．在 1970 年的报告中，陈师指出，"除了少数孤立的结果外，大范围微分几何一直等到代数拓扑和李群为它铺

---

1) 见本书在国际数学家大会全会上的报告《微分几何的过去和未来》一文．
2) 见本书"我的朋友——几何学家陈省身"一文．
3) 见本书"纤维丛的微分几何"一文．
4) 见本书"微分几何的过去与未来"一文．

平了道路后才得到发展”，而“大范围微分几何是一个年青的领域”．事实上，使大范围微分几何从少数孤立的结果得以蔚然形成当前最活跃的独立分枝之一者，可以说正是陈师本人．纤维丛与联络的概念虽然早已隐含在 E. Cartan 的著作中并由Ehresmann与陈师提炼出来，但陈师与 Ehresmann 不同之处是：后者只对概念提出了明确的描述，而前者则不仅如此，还提出了从事这方面定量研究的方法、工具与实例——即示性类，特别是引入以陈师命名的陈类，示性类在联络之下的具体表达式，以及 Gauss-Bonnet 一般公式的重要证明，等等．最早的示性类虽由 E. Stiefel 与 H. Whitney 在1935年时分别循不同途径引入，但性质所知不多且未定名，直到后来才定名为 Stiefel-Whitney 示性类．由于这些类都是模2系数的同调类，因而对微分几何与分析的研究作用有很大局限性．至于整系数的 Pontrjagin 示性类则虽已在1944年为 Pontrjagin 所引入，但也未定名并鲜为人知，而且它们的性质直到现在还有很大的神秘性．因而当陈师在1943年初次抵美时，纤维丛理论还在萌芽阶段，示性类的概念也处于模糊的状态．但在陈师抵美后的短短几年间，由于陈师的几篇历史性的名著而使纤维丛与示性类理论整个地为之改观．在陈师的“Characteristic classes of Hermitian manifolds”一文中，引入了后来被称为陈类的示性类，并提出了多种不同形式的定义．以后的研究证明Pontrjagin 示性类可以经流形或纤维丛的复化作为陈类来处理，因而陈类在各种示性类中可以说是最基本最有应用前景的一类．后来的发展完全证实了这一点．它们不仅是微分拓扑、微分几何、复流形理论、代数几何等许多不同领域的研究所不可缺少的有力工具，并是使这些不同领域融合在一起的纽带．最近十几年的研究还指出了陈类与 Yang-Mills 场以及其它物理问题有密切关系，因此连

理论物理学家们对于陈类这一名称也已耳熟能详，甚至使用到他们的理论物理研究中去了.

凡事必须从根本做起．大范围微分几何的真正发展一直要等到代数拓扑和李群为它铺平道路．因而，尽管陈师的主要目标是大范围微分几何，但在中研院数学所的三年期间，对年轻人没有讲授微分几何，而致力于代数拓扑方面的培养．陈师并对我们这些年轻人指出，要进入近代数学之门，应该好好学习三本书：Pontrjagin 的连续群论，C. Chevalley 的李群论，以及 H. Weyl 的古典群论．事实上，正如陈师早在 40 年代所证明并在 60 年代为 M. F. Atiyah，R. Bott 等所继续的那样，示性类可以作为某些古典李群作用在纤维丛时的不变量，并由此可以导出它们的明显表达式.

70 年代以来，陈师经常前来中国．多年来作过不少演讲也开过不少课程，但内容都是微分几何．由陈师倡导举办了多次的双微会议，也以微分几何与微分方程为主题．这期间很少讲代数拓扑或微分拓扑．事实上，中研院数学所的三年，陈师已为我国培养了一批拓扑学的骨干，而且代数拓扑除留下一些难题如 Poincaré 推测等外，已非当年之居于数学发展中心者可比．与之相反，国内对 E. Cartan 的著作仍然陌生，对于大范围微分几何更近于空白．陈师这些年来倡导双微，并经常以演讲与课程形式，培养青年一代掌握现代微分几何的要领．如果把国内现在的形势与 70 年代初期相比，则可看出，中国已涌现了一批现代微分几何的少壮队伍，在某些课题方面，已经可使国外专家们刮目相看，取得了一定的国际地位，这是与陈师这些年来的辛勤耕耘分不开的．南开数学所更是有计划地逐年以数学的某些特定范围为中心，邀请外籍专家以及国内有成就的数学家来所系统讲学，鼓励国内青年学者

来所进修，已形成一个中外瞩目的国际数学中心．当年中研院的数学所，已以更大更新的规模重见于今日．

陈师一直关心中国数学发展的前途，也一直为促使中国未来成为数学大国而努力． 先后两次的数学所，都具有同样的目的．陈师在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上提出[1]：“中国数学的目的是要求中国数学的平等和独立． 中国的数学要能够跟西洋的数学平等”，又说：“我们也要求独立，就是说，中国数学不一定跟西洋数学做同一方向，但是要有同样的水平．”为了达到这一目的，必须“在中国建立基地”．两次数学所之设，也正是这方面的具体措施．陈师把这方面的成功特别寄托在青年一代身上．在中研院数学所，陈师主要是找一些青年人传授现代数学，特别是拓扑学．尽管时间短暂但已经取得极大成功．南开的数学所以及陈师倡导或亲身实行的许多其他活动，也是以提高青年人的学术水平进入研究创作为目的．作为中华民族的优秀青年，如何实现这一宏伟目标，使中国的数学能达到平等和独立，并进而在21世纪使中国成为数学大国，应该是在此书鼓舞之下的一项神圣使命．

1）见本书“在‘二十一世纪中国数学展望’学术讨论会开幕式上的讲话”一文．

我的朋友——几何学家陈省身*

A. 韦　依†

为了庆祝陈省身的成就，他的朋友和同事们计划出这本选集，要我写一篇文章. 这邀请对我是一种不可多得的荣誉. 同时，虽然我相信未来的微分几何史家一定会认为他是 Elie Cartan 的当之无愧的继承人，要对他的工作给出评价，我却觉得难以胜任. 也不需要这样做，因为这本选集将转载他的工作的最精华部分或至少是最具代表性的论著，它们本身就能答复这问题. 我所能做的是写一点我们长期交往的回忆——同他的交往，无论学术抑或私人方面，都是我一生中最可宝贵的经历之一.

必须承认，1942 年我被邀评论他在《数学纪事》上的一篇关于积分几何的文章(见他的文献目录[1)][18])时，他的名字对我是陌生的. 其实 1936—1937 年他在巴黎逗留期间我曾见过他；我当时在斯特拉斯堡的学院，并定期去巴黎参加由我及我的朋友们组织的 Julia 讨论班. 我们隔周聚会一次，那一年讨论班的论题是 Elie Cartan 的工作，陈当然特别感兴趣. 然而，第二学期我便应邀赴普林斯顿高等研究所(1937 年 1 至 4 月)，直至秋天才返法.

---

* 翻译时参考了杨振宁先生对该文的节译. ——译者

† A. 韦依 (André Weil, 1906—)是当代法国大数学家，Bourbaki 学派的精神领袖，Wolf 奖获得者. 他在数论、代数几何和微分几何方面都有巨大贡献，被选为美国科学院国外院士. ——编者

1) 见本书附录一，下同. ——编者

因此，我在1936年秋确实见过他，但却不相识。对我来说，他当时仅是一位来自中国的、不知名的年轻人，见面不多便淡忘了。

五年后，陈已不再是一个新手，可不知怎的，他发表的文章没有一篇引起我的注意。部分原因是我当时很难看到发表它们的杂志。1941年初我离开法国，那年在哈弗福德与 Carl Allendoerfer 合作写了一篇关于 Gauss-Bonnet 公式的文章。我关于齐性空间中的哈尔测度及不变测度的工作以及对 de Rham 的工作的兴趣已使我接近"积分几何"。这是三十年代 Blaschke 和他的学生们心爱的课题。这就使《数学评论》很自然地将陈的文章[18]送给我评论。

正如我指出的，尽管该文有某些弱点，但总的来说他把 Blaschke 学派的积分几何工作一举推进到更高的水平。我对文章所反映的非凡才能和深刻见解有很好的印象，并将这些印象写进评论中，还与 Hermann Weyl 提起过。恰好那时 Veblen 已经知道陈关于射影微分几何的工作，他和 Weyl 正考虑克服重重困难请陈到普林斯顿高等研究所来。珍珠港事件后，战火四起，从中国旅行到美国充满风险。仅为获得必要的签证及乘机的优先权也须美国动用全套的外交手段。不用说，这些事我无能为力。因为我本人就是个无助的难民，被官方划为"敌侨"。我只能向 Hermann Weyl 竭诚赞助该计划。我对1943年把陈请到普林斯顿来起了一点推动作用，这使我感到自慰。

他抵美后，因我离普林斯顿不远，便立刻来访问我。我们很快就发现了许多共同兴趣。我们都对 Elic Cartan 的工作及 Kähler 在其"Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen"（微分方程组引论）中对该工作所作的部分精彩介绍有深刻的印象；我们都曾在汉堡认识 Kähler；我们都对 Gauss-

Bonnet 公式感兴趣；我们都开始领悟纤维丛概念在各种各样的几何问题中的重要作用，虽然这重要性当时还不很明显；更重要的是我们似乎对这些问题和对整个数学有许多共同的观点，我们都力图不管别人的先入之见而直接对每一个问题从根本上下功夫.

陈和我都对示性类特别感兴趣，虽然当时关于示性类所知不多并且尚未定名. 某些 Stiefel-Whitney 类仅有模 2 定义这件事似乎隐藏着某些奥秘. 我能告诉陈代数几何中按 Todd 及 Eger 的工作所引入的"典范类". 这种"典范类"与 Stiefel-Whitney 类显然很相似，却没有模 2 定义的缺陷(若算得上是缺陷的话). 然而它们的情况仍有些含糊，因为此项工作是在意大利几何的影响下完成的，仍然保留了一些未经证明的假设. 至于 Pontrjagin 类，当时还闻所未闻.

这些就是陈首次访问我时所谈到的问题，以后我们又一再讨论这些问题. 大家知道，不久后示性类的概念被陈的工作整个地改观了. 首先由于他对 Gauss-Bonnet 公式的证明；然后是他对整体微分几何中复结构与准复结构所起作用的根本性发现. 这些都是历史了，我不想多谈，只想指出：当我们今天回顾陈对 Gauss-Bonnet 公式的证明并把它与 1942 年 Allendoerfer 和我追随 H. Weyl 等作者的努力而给出的一个证明相比较，我们会得到什么启发. Allendoerfer 和我的证明只限于考虑"管"(tube)，依赖于(虽然在当时这点是不明显的)球丛结构，这是非内蕴结构，也就是对 Euclid 空间给定的一个浸入的横截丛；而陈的证明破天荒第一次用到了内蕴丛，也就是长度为 1 的切向量丛，从而使整个问题豁然开朗.

后来陈和我分开了一段时间. 我于 1944 年底去巴西，而他一直呆到 1946 年，然后回中国去与他首次来美时分别的家庭团聚.

那些年我们联系不多.在陈关于复流形的工作影响下，我本人关于代数几何中维纤丛的思想日趋成熟．我得知他正在南京组建数学研究所，并怀着对他的命运的日益担忧，密切注视着中国政治和军事的发展．1947 年我来到 Marshall Stone 全面重组过的芝加哥大学数学系．Stone 给陈去信，为他提供一个访问职位．1948 年秋，内战之火逼近南京，Veblen 和 Weyl 显然与我同样关切陈的命运，便邀请他来研究所，陈后来告诉我，Oppenheimer 同时发了一份友好的电报表示支持．陈认识到他应立即行动，当即拍了两个回电，一个给我，一个给普林斯顿，告诉我们他正来美．

我曾多次批评美国的高等教育系统，却常以陈第二次来美为例，说明灵活性也许是其最好的优点．当我收到陈的电报时，Stone 正在南美旅行．但与他互通一个电报即可．按他和我的提议，系里的教授们表决推荐聘请陈直接担任正教授之职．其后数月却受阻于校当局．他们显然认为，陈乃一难民，能以较低职位聘得．战时的切身经历使我对这种态度深有体会．这促使 Stone 返校，他以辞职相胁，并亲自要求 Robert Hutchins 解决问题[1]．Hutchins 正患流感而卧床，按规定正在休假．最后职位是被通过了，但须到 1949 年夏季生效．在这期间，普林斯顿研究所资助他全家来美并暂住普林斯顿，直至他到芝加哥赴任．

于是，1949 年 1 月陈赴普林斯顿途经芝加哥时我能在火车站欢迎他．我那天第一次会见他夫人和孩子们，其情其景至今记忆犹新．陈戴着裘皮帽活象一位满族将军，但最难忘的印象是他的女儿梅，一位不足两岁的小女孩，全身包在白裘皮中，真是可爱极了．

---

1) Robert Hutchins 是芝加哥大学校长．——编者

这样，在往后十年里我们成了芝加哥大学的同事．我们还是近邻，同住在刚刚造好的芝加哥大学教员公寓．这是他和我学术上富有成果的时期．我们的兴趣主要是纤维丛、复流形和齐性空间．我们在埃克哈特大楼的办公室里讨论，在家里讨论，而更多的是在附近公园里一面散步一面讨论，在一切时候讨论．我们与同事及研究生们的关系是诚挚的．来自美国国内外的学者络绎不绝，到这里作短期的和长期的访问．Ed Spanier 的就任使我们的同事中又增添了一位真正的拓扑学家．只要看一看陈和我那段时间的论著目录，便知这种科学气氛对我们工作的促进作用．

由于各种原因，包括气候和居住环境方面的考虑，陈和我后来都离开了芝加哥．象我们曾戏言的那样：他迁往伯克利，离中国近了些；我迁往普林斯顿，离法国近了些．我们的友谊并没有因此而受到影响，但彼此间的工作接触却自然地减少了，尽管我们仍设法不时见面．完全是靠了他及他与中国同事所保持的联系，我于1976年秋访问了中国——这是一次印象深刻的不寻常经历．我不想再多谈私人交往的事，也不想评论陈近十五年来的工作（或许有其他人比我更有资格讨论，何况其价值是众所周知的）．也许简述一下几何在数学——今天的数学和未来的数学——中的地位来结束本文是合适的．

显然，微分几何中的一切都可翻译成分析的语言，就象代数几何中的一切都可以翻译成代数的语言一样．有时数学家们由于个人的爱好，或者是被一种错误的"严格"观点引入歧途，只注意译文而忽略了原著．不可否认，这偶尔也能导出有重要意义的工作，尽管如此，更深刻的进展往往要回到几何观点上来．我们时代的拓扑学就是如此．只要考察 Lagrange 的解析几何、Ricci 的张量分析或是更近代的例子，那就显而易见：如果没有真正的几何学

家出来挽救的话，几何题材的纯粹形式化处理往往会将该学科扼杀掉。Monge 对解析几何、Levi-Civita 和更重要的 Elie Cartan 对张量几何所做的都是这种真正几何学家的贡献．

真正的几何直观在心理上也许永远说不清楚．在过去，这种几何直观主要是指关于三维空间的构想力．而今天，对高维空间的讨论日益取代了初等问题的研究，那么构想至多只能是部分的或象征性的．触觉的想象似乎也起着一定的作用．不管怎样，如果没有 Elie Cartan，Heinz Hopf、陈省身和另外几个人的几何直觉，本世纪的数学决不可能有如此惊人的进展．我深信，只要数学继续发展，就永远需要这样的数学家．

（此文译自 “Shiing—Shen Chern Selected Papers”，Springer—Verlag，1978，PP. xxi—xxxi．原载《赣南师范学院学报》(自然科学版)，1988年第2期．冯长彬、熊春先译，李文林校．）

对于陈省身数学贡献的一些感想

P. A. 格列菲斯†

应邀对陈的数学工作略事评述，殊感荣幸．鉴于其本人已作数学总结，而 A. 韦依（Weil）关于陈的生平与贡献的讨论是从一个同代人的角度提供的，或竟给我以一个良机，作为一个同他最早期工作的发表时间相差一代的这一辈人，探讨陈的一些论文和他对数学的观点给我的感觉．

作为二十世纪六十年代早期普林斯顿的研究生，我的兴趣在于代数几何、微分几何与多复变，陈的大名因此而在最经常得见之列．我对陈的论文最初的直接接触，是学习引进陈类的论文[33][1]之时，该论文即使时至今日，仍然对微分几何和复流形的教育提供许多基本要义．这里愿就文章给我的印象作一简要的回顾．

从经典几何的角度来看，如所周知(并在隔代交替之中一再重新发现)，$\mathbb{C}^N$ 中 n-平面的复格拉斯曼（Grassmann）流形 $G(n, N)$ 的结构给出了枚举问题的解决之关键，其中最简单的问题是决定 P^3 中与四条两两不共面直线之每一条都相交的直线数． 从技术观点出发，必须知道各种舒伯特（Schubert）闭链之间的相交关系，这些闭链就是那种以指定总量与三角旗 $(O)=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_{N-1}\subset V_N=\mathbb{C}^N$ 不处于一般位置上的 n- 平面． 在 E. 嘉当

† P. A. 格列菲斯（Griffiths）现为美国科学院院士、DUKE 大学副校长．他在代数几何、微分几何和多复变函数论等方面都有精湛的研究．——编者

1）括号中的数字指本书附录一文献目录编号．(下同)

(Elie Cartan) 指导下写的论文中，埃瑞斯曼 (Ehresmann) 证明了 $G(n,N)$ 的同调以舒伯特闭链的类作为自由基，于是对诸如皮埃利 (Pieri) 公式一类的基本枚举关系提供了一个拓扑描述.

另一方面，在考虑 N-空间的 n 维代数流形或复流形的高斯 (Gauss) 映射时，自然出现了格拉斯曼流形. 在二十世纪四十年代前期阿伦道弗 (Allendoerfer)-韦依发现一般的高斯-邦尼 (Bonnet) 定理以及陈自己对此作出内蕴证明 [25] 之后，$\mathbf{R}^N$ 中关于实流形的通常的高斯映射及其可以导出的内蕴拓扑不变量似乎当时变得非常流行了. 文[33]中出现了枚举几何与微分几何的一种合成物，这篇论文发现格拉斯曼流形的上同调环是由陈类生成的，一方面陈类为基本舒伯特闭链的庞加莱 (Poincaré) 对偶，另一方面应用刚出现的纤维丛的理论，又由陈类导出了复向量丛的内蕴不变量. 微分几何的介入是因为 $G(n,N)$ 的上同调环同构于不变微分形式的代数，而表示陈类的微分形式就是万有 n-平面丛曲率矩阵的初等对称函数.

或许有人会说几何学中的基本关系是外在地发现的，但是恰恰因为发现了具有内在意义的外在量的组合，根本性的新见解才得以出现. 例证之一为 M. 诺特 (Max Noether) 对他那关于代数曲面算术亏格的著名公式 $\chi(\theta_S)=\frac{1}{12}(C_1^2+C_2)$ 所作的证明，其中他对 P^N 中的 S 应用了普吕克 (Plücker) 公式组并发现上述那种组合是双有理不变量. 另一个例子是 H. 霍普夫 (Heinz Hopf) 定理：欧氏空间中定向偶维紧致超曲面的欧拉 (Euler) 示性数等于其高斯映射的次数. 陈-韦依的示性类理论，是同一种精神的再现，在德·拉姆 (de Rham) 上同调中示性类从曲率构造而得，且导出了高斯-邦尼定理及其更高余维数的类似. 在复的情况