

数理逻辑概论

朱煜华 吴可 编著

中共中央党校出版社

数理逻辑概论

朱煜华 吴 可

中共中央党校出版社

(京)新登字100号

数理逻辑概论

朱煜华 吴 可

责任编辑: 朱 锐

封面设计: 贺 然

责任校对: 李焕婷

版式设计: 张号题

出版发行: 中共中央党校出版社

地址: 北京海淀区大有庄100号

邮编: 100091 电话: 258.2931 258.1868

经销: 新华书店

印刷: 天津新华印刷四厂

开本: 850×1168毫米 32开

版次: 1992年 12 月 第1版

字数: 256千字

印次: 1992年 12 月 第1次

印张: 9.875

印数: 1—3000 册

书号: ISBN 7-5035-0608-3/O·3

定价: 6.90 元

如印装质量不合格 本社发行部负责调换

序 言

邢 贲 思

今天，逻辑作为一门基础学科，随着它突飞猛进的发展和日益广泛的应用，正越来越受到人们的普遍重视。近年来，联合国教科文组织把逻辑列为基础学科的第二位，大英百科全书把逻辑列为基础学科的第一位，正是这一趋势的反映。

思维是人们每天都要进行的活动。思维是否清晰，是否严谨，是否合乎逻辑规律，关系到学习和工作的成效，关系到事业的成败。我国要实现四个现代化，其必要的前提条件是全民族思维水平的大幅度提高。而要提高自己的思维能力，由自发的思维逐步上升到自觉的思维，除了学习逻辑的基本知识，接受必要的思维训练外，是没有其他途径的。

普通形式逻辑尽管对于人们正确地使用各种思维形式仍具有重要的意义，但总的来说，它已满足不了现代科学技术发展的需要。新的技术革命，信息时代的到来，电子计算机的普遍应用，已使数理逻辑成为人们处理学习、科研、管理甚至日常事务问题所不可缺少的知识。作为普通形式逻辑发展的新阶段，数理逻辑采用一套符号系统，纯粹地从形式结构的角度研究推理和证明，其结果具有普遍有效性。由于手段的形式化，数理逻辑可以在更精确的程度上和更广泛的范围内处理普通形式逻辑所难以处理的逻辑问题。掌握了这门学科的基本知识和基本方法，不仅可以使自己的思维更加严谨，更为科学，而且可以借助电子计算机（数理逻辑是它的理论基础），直接把自己的思维成果应用到各个领

域中去。

数理逻辑，听起来似乎很深奥，其实并不是高不可攀的。只要认真地、循序渐进地去学，入门是不难的，全面掌握这门学科也是完全可以办到的。在我国社会主义现代化建设事业中，已涌现出不少具备数理逻辑基础知识、精通电子计算机的人才，就是一个很好的说明。

该书作者从事过多年的数理逻辑教研工作，撰写此书其目的是为了介绍和推广数理逻辑的知识和方法。该书深入浅出，通俗易懂，书中所构造的推理系统方便实用，易于为初学者所掌握。凡具有中等文化程度的读者，在不需要具备特别的预备知识的情况下，通过自己的努力，可以理解该书的内容。由于这些特点，该书的适用范围较广，尤其适用于干部的学习和培训。干部要实现决策的科学化和管理的现代化，数理逻辑的知识是不可或缺的。我殷切希望通过该书的出版，将会有更多的人，特别是有更多的干部对数理逻辑这门学科发生兴趣，并进而掌握它，运用它，为建设有中国特色的社会主义作出更多的贡献。

1992年5月28日

目 录

序 言.....	邢贵思 (1)
----------	---------

第一篇 命题逻辑

第一章 命题、命题联结词和真值函项.....	(1)
§1 命题和命题变项.....	(1)
§2 命题联结词.....	(5)
§3 命题公式.....	(13)
§4 语句的真值形式.....	(18)
§5 真值表方法.....	(23)
§6 命题联结词的相互定义.....	(32)
§7 真值函项.....	(36)
第二章 重言式和范式.....	(43)
§1 重言式.....	(43)
§2 重言蕴涵式和推理.....	(48)
§3 简化真值表方法.....	(56)
§4 重言等值式和置换方法.....	(59)
§5 求否定规则.....	(64)
§6 对偶规则.....	(67)
§7 范式.....	(70)
第三章 命题推理系统.....	(80)
§1 概述.....	(80)
§2 系统的结构和规则.....	(81)

§ 3	自然推理的方法	(87)
§ 4	若干定理的证明	(91)
§ 5	推理的实例分析	(105)
§ 6	系统的可靠性和完全性	(112)

第二篇 谓词逻辑

第一章 谓词公式和普遍有效性 (118)

§ 1	谓词逻辑的基本思想	(118)
§ 2	谓词和个体词	(120)
§ 3	量词	(124)
§ 4	传统逻辑四种命题的符号化	(127)
§ 5	重迭量词	(131)
§ 6	谓词公式	(133)
§ 7	辖域	(135)
§ 8	约束变项和自由变项	(137)
§ 9	自然语言的符号化	(141)
§ 10	量词的相互转换	(144)
§ 11	谓词公式的解释	(148)
§ 12	普遍有效性和可满足性	(152)

第二章 谓词推理系统 (156)

§ 1	全称量词推演规则	(156)
§ 2	存在量词推演规则	(165)
§ 3	系统的构成和定理的证明	(172)
§ 4	求否定规则和对偶规则	(192)
§ 5	谓词推理实例分析	(196)

第三章 范式和判定问题 (204)

§ 1	前束范式	(204)
§ 2	$\exists$ -前束范式	(209)
§ 3	什么是判定问题	(216)
§ 4	有穷个体域内的判定问题	(221)
§ 5	无穷个体域内的判定问题	(230)

第三篇 数理逻辑发展简史

第一章 数理逻辑的形成.....	(238)
§ 1 数理逻辑产生和发展的背景.....	(238)
§ 2 数理逻辑的萌芽.....	(243)
§ 3 逻辑代数的建立和完善.....	(251)
§ 4 谓词演算的提出和集合论的建立.....	(260)
§ 5 逻辑演算的定型化和数学基础三大派.....	(271)
第二章 数理逻辑的发展.....	(289)
§ 1 “三大成果”的取得和“四论”的形成.....	(289)
§ 2 非古典逻辑系统的出现和发展.....	(295)
后 记.....	(306)

第一篇 命题逻辑

第一章 命题、命题联结词 和真值函项

§ 1 命题和命题变项

人们在社会生活中是通过语句来思维和表达的。逻辑并不一般地研究语句，它只研究那些具有真假意义的语句，并称它们为命题。例如，下面的语句：

- ① 中国是一个社会主义国家。
- ② 铜不是金属。
- ③ 小张是工人吗？
- ④ 存在外星人。

对语句①、②、④来说，由于它们具有真假意义而成为命题。语句③是一个疑问句，本身无真假可言，因而不是命题。但有一类特殊的疑问句即反问句，如：

- ⑤ 难道物质是不运动的吗？

却是命题，因为这类语句在形式上是疑问句，实质上是强调的陈述句。

命题的基本特征是有真假之分，即一个命题或者是真的，或者是假的，二者必居其一。如何确定一个命题的真假呢？归根结底取决于该命题所反映的情况是否与客观实际相符合。如果一个命题如实地反映了客观实际，它就是一个真命题，否则就是一个假命题。根据这样的标准，上面例举的命题①和⑤是真命题，命

题②是一个假命题。至于命题④，尽管人们目前还不知道它的真假，但就其所反映的内容是否与客观实际相符合而言，它终究是有真假之分的。从人类的无限认识能力来看，任何一个命题的真假最终都是可以确定的。

命题逻辑舍弃一个命题的具体内容，而仅仅研究命题的真假问题。它除了要求命题必须具有真假意义外，不再有其他的要求。因此，真和假就成了命题仅有的两种可能。我们把真和假统称为命题的真值。真值包含两个值：真和假；不能把命题的真值仅仅理解为真，假也是命题的真值。鉴于命题逻辑以真和假为基础，因此它又被称为二值逻辑。

上面例举的命题有一个共同的特征，即它们都不包含其他的命题作为自身的组成部分；换句话说，这些命题都不能从自身中分解出和自身不同的命题。这样的命题，我们称为简单命题或原子命题。命题逻辑不再把简单命题进一步分析为非命题成分，而是把它们作为自己研究的最小单位。

确定简单命题的真或假，一般说来，这是人们的社会实践和各部门具体科学所解决的问题，而不属于逻辑的研究范围，因为逻辑解决不了它们的真假问题。例如，我们是依据社会革命的实践确定命题①为真，依据哲学的基本原理确定命题⑤为真和依据物理学的知识确定命题②为假的。命题逻辑所主要研究的是与简单命题相区别的复合命题。

复合命题是这样的一类命题：第一，它们可以从自身中分解出和自身不同的命题，即复合命题是由其他的命题、最终是由简单命题组成的；组成复合命题的命题，称为支命题；支命题可以是简单命题，也可以是复合命题。第二，复合命题是由支命题借助一定的联结词而构成的，因此，联结词在复合命题中具有重要的意义；通过联结词，复合命题和组成它的支命题之间存在一定的逻辑关系。例如：

⑥ 中国是一个社会主义国家并且是一个发展中的国家。

⑦ 2 是偶数或者 3 是偶数。

⑧ 并非雪是白的。

这些都是复合命题。命题⑥是由“中国是一个社会主义国家”和“中国是一个发展中的国家”这两个支命题组成的，使用的联结词是“并且”。命题⑦是由两个支命题“2 是偶数”和“3 是偶数”通过联结词“或者”而组成的。命题⑧从表面上看好像是一个简单命题，其实不然，因为它从自身中可以分解出一个不同于自身的命题“雪是白的”，所以是一个复合命题，所使用的联结词是“并非”。

作为命题，复合命题和原子命题一样也是有真假之分的。复合命题的真假取决于两方面因素：组成它的支命题的真假情况和联结支命题的联结词的逻辑性质。依据这两方面的因素，我们不难确定复合命题⑥和⑦是真命题，而⑧是假命题。

组成一个复合命题的支命题的真假情况变化了，该复合命题的真假就可能发生变化。例如，对命题⑧来说，由于它的支命题“雪是白的”是个真命题，而对一个真命题的否定使得整个复合命题为假。如果把命题⑧的支命题换成为“雪是黑的”，则复合命题

⑨ 并非雪是黑的。

就由于否定了假命题而成为一个真命题了。

一个复合命题中的联结词改变了，该复合命题的真假就可能发生变化。对于命题⑦来说，由于其中一个支命题“2 是偶数”是个真命题以及所使用的联结词“或者”的逻辑性质，它就是一个真的复合命题。如果把命题⑦的联结词换成“并且”，则复合命题

⑩ 2 是偶数并且 3 是偶数。

就由于其中的一个支命题“3 是偶数”为假以及联结词“并且”的逻辑性质，而成为一个假的复合命题。

通过上面实例分析，我们不难看出，只要知道一个复合命题的支命题的真假情况以及联结支命题的联结词的性质，就可以逆

辑地决定该复合命题的真假。因此，我们把复合命题的真值称为逻辑值。命题逻辑对复合命题的研究，主要着眼于复合命题的逻辑值与它的支命题的真值之间的关系。

由于联结词的存在及其作用，每个复合命题都具有一定的形式结构。这种形式结构体现了复合命题和支命题之间的逻辑关系。为了分析和刻划复合命题的形式结构，就不能再使用一个个具体的命题，而必须使用可以表示任何具体命题的符号。本书用小写字母

$p, q, r, s, p_1, q_1, \dots$

来代表任一具体的命题。由于这些符号是代表命题的，并且是代表任意命题的，所以称它们为“命题变项”。这些命题变项既可以代表简单命题，也可以代表复合命题。在一个复合命题中，不同的命题变项一般地表示不同的命题，而相同的命题变项总是表示相同的命题。

有了命题变项，刻划复合命题的形式结构就比较简单了。例如，对于命题⑧，让 p 表示“雪是白的”，则该命题的形式结构为

⑪ 并非 p 。

对于命题⑦，让 p 表示“2是偶数”， q 表示“3是偶数”，则该命题的形式结构为

⑫ p 或者 q 。

变项主要用于表示一般性的规律。比如，在数学中要表示加法满足于交换律，我们只有使用变项如 a, b ，并由它们构成公式 $a+b=b+a$ 。如果不使用变项，而只是以具体数字如 $3+4=4+3$ ，则所表示的只是一种特殊情况，而不具有一般性的意义。对于一个公式如 $a+b=b+a$ 中的变项 a, b ，由于它们代表任意一个数，所以我们能够用任意的具体数字对它们作代入，比如，用7和8分别对它们作代入，我们就得到 $7+8=8+7$ 。逻辑中的变项的作用和数学变项相类似。对于命题变项来说，由于它们

代表的是任意一个命题，因此，我们就能用任意的具体命题对它们作代入。比如，对于“ p 并且 q ”，用“我们要在战略上藐视敌人”代入 p ，用“我们要在战术上重视敌人”代入 q ，则得到

⑬ 我们要在战略上藐视敌人并且我们要在战术上重视敌人。

由于命题逻辑对命题的研究舍弃了其他的意义内容，而仅仅考虑它们的真假，因此不必要对每个命题变项代以具体的命题，而只须对每个命题变项指派一个真值——真或假，就可以在此基础上讨论复合命题的结构以及命题间的关系。比如，对于“ p 或者 q ”这个复合命题，我们只要在 p 、 q 各种真假情况下求出它的逻辑值即可，而无须对 p 、 q 代以具体的命题。在同一个思维过程中，一个命题变项的真值一旦指派后，就必须保持其同一性。

§ 2 命题联结词

在自然语言中，简单语句借助联结词构成复合语句，从而表达丰富的思想内容。对自然语言中的部分联结词加以逻辑抽象——舍弃它们所联结的语句之间的内容意义上的联系，仅仅在复合语句和简单语句之间的真假关系下考虑它们的用法——形成了数理逻辑特有的命题联结词。命题联结词克服了自然语言联结词所易于产生的歧义性和模糊性，使我们能在严格化、纯粹化的状态下研究复合命题和支命题之间的真假关系，从中概括出命题逻辑的一般规律。命题联结词又叫语句联结词或真值联结词。

数理逻辑的命题联结词有以下五个：

(1) 合取

命题联结词“合取”相当于自然语言联结词“并且”，用符号“ $\wedge$ ”代表。这样，如 p 、 q 是两个支命题，则

$$p \wedge q$$

就是一个复合命题，读作“ p 合取 q ”。形如 $p \wedge q$ 的符号式叫做合

取式，其中的 p 、 q 相应地叫做合取支。

复合命题 $p \wedge q$ 与支命题 p 、 q 具有这样的真假关系： $p \wedge q$ 真，当且仅当 p 、 q 皆真。这里的“当且仅当”表示的是充分必要条件关系。如果两个事物 A 、 B 具有充分必要条件关系，则有 A 就一定有 B ，无 A 就一定无 B ；有 B 就一定有 A ，无 B 就一定无 A 。根据充分必要条件关系可知：在 p 、 q 皆真时， $p \wedge q$ 真；在 p 真 q 假、 p 假 q 真、 p 假 q 假时，即只要 p 、 q 中有一个为假时， $p \wedge q$ 假。

让 p 表示命题“我们要坚持四项基本原则”， q 表示命题“我们要坚持改革开放”，则复合命题

① 我们要坚持四项基本原则并且我们要坚持改革开放。

就具有 $p \wedge q$ 的形式，并且由于它的支命题皆为真，而是一个真的复合命题。

让 p 表示命题“我们能够感知世界”， q 表示命题“我们不能认识世界”，则复合命题

② 我们能够感知世界，但我们不能认识世界。

就具有 $p \wedge q$ 的形式，并且由于它的一个支命题“我们不能认识世界”为假，根据合取的定义，该复合命题为假。

在自然语言中，除“并且”外，“既是…，又是…”、“一方面…，另一方面…”也与“合取”的意义相当。此外，对“不但…，而且…”、“虽然…，但是…”、“尽管…，然而…”等联结词，尽管它们分别含有递进、转折、让步等意义，但就它们都断定了所联结的两个语句为真来说，仍可在逻辑上把它们视作合取联结词。

(2) 析取

命题联结词“析取”相当于自然语言中的联结词“或者”，用符号“ $\vee$ ”代表。这样，如 p 、 q 是两个支命题，则

$$p \vee q$$

就是一个复合命题，读作“ p 析取 q ”。形如 $p \vee q$ 的符号式叫做析取式，其中的 p 、 q 相应地叫做析取支。

复合命题 $p \vee q$ 与支命题 p 、 q 具有这样的真假关系： $p \vee q$ 真，当且仅当 p 、 q 中至少有一个真。根据充分必要条件可知，只有在 p 、 q 皆假的情况下， $p \vee q$ 才为假；在其他的情况下，即在 p 真 q 真、 p 真 q 假、 p 假 q 真时， $p \vee q$ 皆为真。

应该说明的是，“或者”这个联结词在自然语言中有两种不同的含意：一种是相容的，一种是不相容的。相容的“或者”表示组成复合命题中的支命题中至少有一个是真的，也可以有几个支命题甚至全部支命题都是真的。例如：

③ 小王是球协会会员，或者是棋协会会员。

这个复合语句中的“或者”就是在相容意义下使用的。不相容的“或者”表示组成复合命题中的支命题中有并且只有一个是真的。例如：

④ 中国走社会主义道路，或者中国走资本主义道路。

这个复合语句中的“或者”就是在不相容意义下使用的。为了区别“或者”这两种不同意义的用法，在自然语言中有时使用“要么…，要么…”这样的联结词来表示不相容的“或者”。例如：

⑤ 中国要么走社会主义道路，要么走资本主义道路。

这个复合语句中的联结词就明确地表示所联结的两个语句中有一真并且只有一真。命题联结词“析取”只相当于相容意义下的“或者”，它允许所联结的支命题可以同时为真。至于不相容意义下的“或者”和“要么…，要么…”，命题逻辑可以用一个更为复杂的形式来表示它们。这个问题我们留待§4中解决。

让 p 表示命题“4是素数”（所谓素数，指只能被1和自身整除的自然数），让 q 表示“5是素数”，则

⑥ 4是素数或者5是素数。

就具有 $p \vee q$ 这种形式，并且由于其中有一个支命题 q 为真，而整个复合命题为真。如果把 q 换为“9是素数”，则

⑦ 4是素数或者9是素数。

这个复合命题就因为它的支命题都为假而为假。

在自然语言中，除“或者”外，“或者…，或者…”，“或许…，或许…”等联结词也与“析取”的意义相当，它们都表示了所联结的两个语句中至少有一个为真。

(3) 蕴涵

命题联结词“蕴涵”相当于自然语言中的联结词“如果…，那么…”，用符号“ $\longrightarrow$ ”代表。这样，如 p 、 q 是两个支命题，则

$$p \longrightarrow q$$

就是一个复合命题，读作“ p 蕴涵 q ”。形如 $p \longrightarrow q$ 的符号式叫做蕴涵式，其中 p 称作蕴涵式的前件， q 称作蕴涵式的后件。

复合命题 $p \longrightarrow q$ 与支命题 p 、 q 具有这样的真假关系： $p \longrightarrow q$ 真，当且仅当 p 假或者 q 真。根据充分必要条件可知，在 p 真 q 假时， $p \longrightarrow q$ 为假；在其他的情况即在 p 真 q 真、 p 假 q 假、 p 假 q 真时， $p \longrightarrow q$ 皆为真。

蕴涵式 $p \longrightarrow q$ 的基本含义是：前件 p 是后件 q 的充分条件。在这点上，它和传统逻辑的充分条件假言判断中的“如果…，那么…”的用法是一样的，因此人们又把 $p \longrightarrow q$ 这样的蕴涵命题称为假言命题。那么，什么是充分条件关系呢？说前件 p 是后件 q 的充分条件，是指有前件就一定有后件，即有 p 必有 q 。从前件 p 对后件 q 这种“有之必然”的确定关系出发，对于 p 真 q 真时 $p \longrightarrow q$ 为真和 p 真 q 假时 $p \longrightarrow q$ 为假这样两种情况就不难理解了。因为“有之必然”的关系只排斥一种情况：有前件而无后件。如果存在 p 真 q 假的情况，则整个复合命题 $p \longrightarrow q$ 为假。例如：

⑧ 如果一个数能被4整除，那么它能被2整除。

这个假言命题因其前件真必然导致后件真，亦即决不会出现一个数能被4整除而不能被2整除的情况，所以这是一个真的假言命题。又例如：

⑨ 如果某人买彩票，那么某人中奖。

这个假言命题因存在前件真而后件假的情况（某人买了彩票，但未中奖），所以是一个假的复合命题。

对蕴涵式 $p \rightarrow q$ 来说，它只是表示 p 是 q 的充分条件，而并未表示 p 是 q 的必要条件，因此，在前件 p 不存在的情况下，后件 q 可以存在也可以不存在。“无之未必不然”指的就是 $p \rightarrow q$ 中 p 对 q 的这种不确定的关系，它说明只要前件 p 是假的，不论后件 q 是真是假，整个假言命题 $p \rightarrow q$ 就是真的。对于前件假后件真的情况，我们可以举出下例：

⑩ 如果太阳围绕地球旋转，那么地球存在。

这无疑是一个真的假言命题，即使是根据常识来判别。对于前件假后件假的情况，我们可以举出下面二例：

⑪ 如果语言可以创造财富，那么夸夸其谈的人就是世界上最富有的人。

⑫ 如果你是天上的明月，那么我就是月边的寒星。

这两个假言命题为真也是显而易见的。在人们的日常生活中，在文艺创作中，在科学研究中，都存在着大量的使用这种假言形式表达思想的情况。

由此可见，一个假言命题的真假并不孤立地依赖于其前件或后件的真假，而是取决于前件对后件有无蕴涵关系。这种蕴涵关系表现为：有前件就必有后件，无后件就必无前件。因此，假言命题 $p \rightarrow q$ 仅仅排斥 p 真 q 假的情况，在其他的情况下，它皆为真。

在自然语言中，除“如果…，那么…”外，“若…，则…”，“只要…，就…”，“既然…，那就…”等联结词的意义也和蕴涵相当，它们都表示前件是后件的充分条件。

(4) 等值

命题联结词“等值”就是“当且仅当”的意思，它表示所联结的两个支命题具有充分必要条件关系，用符号“ $\leftrightarrow$ ”代表。这样，如 p 、 q 是两个支命题，则

$$p \leftrightarrow q$$

就是一个复合命题，读作“ p 等值 q ”。形如 $p \leftrightarrow q$ 的符号式叫做等值式。