随机过程

毛用才　胡奇英　编著

西安电子科技大学出版社

研究生教材

随机过程

毛用才　胡奇英　编著

西安电子科技大学出版社

1998

内容简介

本书是工科研究生进一步学习随机过程的一本教材和参考书。本书在工科大学生已有的数学知识基础上，采取工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式，较全面地介绍了现代科学技术中常见的主要随机过程及其应用。全书共分 7 章，内容包括概率论的补充知识、随机过程的基本概念、二阶矩过程的均方微积分、平稳过程、马尔可夫过程、更新过程与马尔可夫更新过程、非平稳随机过程。

本书内容简练，通俗易懂，凡具有工科数学基础和工科概率论基础的读者都可阅读。

本书可作为工科院校高年级本科学生及研究生教材，也可供具有工科大学数学基础，从事相关工作的工程技术人员参考。

研究生教材

随机过程

[illegible]奇英 编著

责任编[illegible] 叶德福

[illegible]安电子科[illegible]大学出版社出版

[illegible]大学印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 新华书店经售

开本 787×1092 1/16 印张：13 字数：307 千字

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷 印数：1～1000

ISBN 7-5606-0591-5/O·0033 定价：13.00 元

·前　言

随机过程是研究随机现象随时间演变过程的概率规律性的一门学科。它广泛应用于雷达与通信、动态可靠性、设备更新、地质勘探、天文与气象、核技术、随机振动、控制、生物学等许多领域。随着尖端科学和高技术的发展，随机过程的应用日益广泛和深入。

为了适应高等工科院校各专业本科毕业生和研究生学习“随机过程”课程的需要，本着少学时，低起点，便于学习的要求，我们在自己多次讲授本课程的讲稿的基础上，结合自己的一些最新体会和教研工作，编写了此书。

本书第 1 章对随机过程一些必备的概率论知识作了复习性的简要介绍。第 2 章除对随机过程的基本概念、随机过程的有限维分布、随机过程的数字特征作了介绍外，还列举了常用的几个重要的随机过程。第 3 章介绍二阶矩过程的均方微积分。第 4 章介绍平稳过程，着重介绍了宽平稳过程及其相关函数与功率谱密度，并且讨论了平稳过程在线性系统中的应用、平稳过程的各态历经性与谱分解。第 5 章讨论了可数状态的离散时间与连续时间马氏过程，着重讨论了转移概率、状态分类和平稳分布等。第 6 章介绍了更新过程、马氏更新过程和广义半马氏过程。第 7 章介绍了近年来正在引起研究者注意的随机过程的高阶统计量及其高阶谱，非平稳随机过程的 Wigner-Ville 谱分析和高阶循环平稳过程的循环统计量及其循环谱等内容。

本书的第 1～4 章和第 7 章由毛用才编写，第 5、6 章由胡奇英编写，并经过反复讨论和多次修改。

随机过程是工科研究生特别是电子通信方面研究生的重要基础课之一。希望本书能对读者深入学习“随机过程”课程起到帮助和指导作用。在本书的出版过程中，得到了西安电子科技大学副校长傅丰林教授、西安电子科技大学研究生部领导和西安电子科技大学出版社领导的热情支持。另外，编辑叶德福为本书的审读与加工，付出了辛勤的劳动，特在此一并致以诚挚的谢意！

限于编著者水平，缺点、错误在所难免，恳切希望广大读者对本书提出意见和建议，对不妥之处提出批评指正。

编　者

1997 年 6 月于西安电子科技大学

· 目　　录

前言

第 1 章　概率论补充知识 …… 1

1.1　概率空间 …… 1

1.1.1　事件域 …… 1

1.1.2　概率 …… 2

1.1.3　条件概率空间 …… 2

1.1.4　事件的独立性 …… 3

1.2　随机变量 …… 4

1.2.1　随机变量 …… 4

1.2.2　随机向量及其分布 …… 4

1.2.3　随机变量的独立性 …… 5

1.2.4　随机变量的数字特征 …… 6

1.3　特征函数 …… 7

1.3.1　特征函数的定义 …… 7

1.3.2　特征函数的一些性质 …… 8

1.3.3　惟一性定理 …… 9

1.3.4　多元特征函数 …… 10

1.4　多元正态分布 …… 12

1.4.1　多元正态分布的定义 …… 12

1.4.2　n 维正态变量的特征函数 …… 13

1.4.3　多维正态分布的性质 …… 13

1.5　随机变量序列的收敛性 …… 15

1.5.1　随机变量序列的收敛性 …… 15

1.5.2　连续性定理 …… 19

1.5.3　弱大数定律和强大数定律 …… 19

1.6　随机变量函数的分布 …… 20

1.6.1　单个随机变量函数的分布 …… 20

1.6.2　多个随机变量函数的分布 …… 21

1.6.3　二维随机向量的变换 …… 22

1.7　条件数学期望 …… 23

1.7.1　条件数学期望的定义 …… 23

1.7.2　条件数学期望的性质 …… 24

习题一 …… 26

第 2 章　随机过程的基本概念 …… 28

2.1　随机过程的定义 …… 28

2.2　随机过程的分布及其数字特征 …… 30

2.2.1　随机过程的有穷维分布 …… 30

2.2.2　随机过程的数字特征 …… 31

2.3　复随机过程 …… 32

2.4　几种重要的随机过程类型 …… 33

2.4.1　二阶矩过程 …… 33

2.4.2　正态过程 …… 34

2.4.3　正交增量过程 …… 36

2.4.4　独立增量过程 …… 37

2.5　Wiener 过程 …… 38

2.6　Poisson 过程 …… 39

2.6.1　Poisson 过程的定义 …… 39

2.6.2　Poisson 过程的数学模型 …… 40

2.6.3　Poisson 过程的到达时间与点间间隔分布 …… 41

2.6.4　复合 Poisson 过程 …… 45

习题二 …… 47

第 3 章　二阶矩过程的均方微积分 …… 49

3.1　随机变量序列的均方极限 …… 49

3.2　随机过程的均方连续 …… 53

3.3　随机过程的均方导数 …… 54

3.4　随机过程的均方积分 …… 58

3.4.1　二阶矩过程的均方积分概念 …… 58

3.4.2　均方积分的一些性质 …… 60

3.4.3　$X(t)$在$[a, b]$上的均方不定积分 …… 61

3.5　均方随机微分方程 …… 63

3.6　正态过程的均方微积分 …… 65

习题三 …… 68

第 4 章　平稳过程 …… 70

4.1　平稳过程的定义 …… 70

4.1.1　严平稳过程 …… 70

4.1.2　宽平稳过程 …… 71

4.2　平稳过程相关函数的性质 …… 73

4.2.1　平稳过程自相关函数的性质 …… 73

4.2.2　联合平稳过程的互相关函数及其性质 …… 75

4.3　平稳过程的功率谱密度 …… 75

4.3.1　谱函数和谱密度的定义 …… 76

4.3.2 谱密度的物理意义 …………………… 79
4.3.3 谱密度的性质 ………………………… 80
4.3.4 联合平稳过程的互谱密度及其性质 ………………………… 81
4.4 线性系统中的平稳过程 …………………… 81
4.4.1 线性时不变系统的基本概念 ……… 82
4.4.2 线性时不变系统对随机输入的响应 ………………………………… 83
4.4.3 线性时不变系统的输入、输出的互相关函数与互谱密度 ………… 84
4.5 平稳过程的谱分解 ………………………… 85
4.5.1 平稳过程的谱分解 …………………… 86
4.5.2 平稳时间序列的谱分解 …………… 89
4.6 平稳过程的各态历经性 …………………… 91
4.6.1 平稳过程的各态历经性的概念和条件 …………………………… 92
4.6.2 平稳过程具有各态历经性的充要条件 ……………………………… 95
4.6.3 均值函数与自相关函数的估计式 ………………………………… 97
习题四 ………………………………………… 97
第5章 马尔可夫过程 ………………………… 101
5.1 马尔可夫过程的定义 …………………… 101
5.2 马氏链的转移概率 ……………………… 103
5.3 马氏链的状态分类 ……………………… 108
5.3.1 状态类型的定义 …………………… 108
5.3.2 状态类型判别 ……………………… 111
5.3.3 状态间的关系 ……………………… 114
5.3.4 状态空间分解 ……………………… 115
5.4 转移概率的极限与平稳分布 ………… 122
5.4.1 转移概率的极限 …………………… 122
5.4.2 平稳分布 ……………………………… 127
5.5 连续时间马氏过程的转移概率 ……… 131
5.6 马氏过程的遍历性和平稳分布 ……… 138
5.6.1 状态空间分解与遍历性 ………… 138
5.6.2 平稳分布 ……………………………… 142
5.7 应用举例 ……………………………………… 144
5.7.1 一般马尔可夫型可修系统的可靠性分析 ……………………… 144
5.7.2 生灭过程与排队系统 …………… 146
5.7.3 通信系统中的应用 ……………… 150
习题五 ………………………………………… 152
第6章 更新过程与马尔可夫更新过程 ………………………………… 156
6.1 更新过程的定义 ………………………… 156
6.2 更新方程与极限定理 ………………… 158
6.3 剩余寿命与现时寿命 ………………… 164
6.4 延迟与终止过程 ………………………… 166
6.5 马尔可夫更新过程的定义 ………… 167
6.6 状态分类与极限概率 ………………… 170
6.7 马尔可夫更新方程与极限定理 ……… 172
6.8 再生过程与报酬过程 ………………… 174
6.9 广义半马氏过程简介 ………………… 177
6.9.1 模型 ……………………………………… 177
6.9.2 平稳分布 ……………………………… 181
习题六 ………………………………………… 182
第7章 非平稳随机过程 …………………… 185
7.1 随机过程的高阶统计量的定义和性质 ……………………………… 185
7.1.1 矩与累积量 …………………………… 186
7.1.2 多谱(累积量谱) ………………… 188
7.1.3 线性非正态过程 …………………… 189
7.2 非平稳过程的 Wigner-Ville 时频谱分析 ……………………………… 189
7.2.1 随机时变连续信号和非平稳随机过程的 WV 谱 ……………… 189
7.2.2 随机时变离散信号和非平稳随机序列的 WV 谱 ……………… 190
7.2.3 线性随机时变系统输出的 WV 谱 ………………………………… 190
7.3 循环平稳过程 ………………………………… 192
7.3.1 严循环平稳过程 …………………… 192
7.3.2 宽循环平稳过程 …………………… 193
7.4 二阶循环平稳过程的循环相关函数与循环谱 ………………………… 194
7.5 高阶循环平稳过程的循环累积量与循环谱 ……………………………… 197
习题七 ………………………………………… 199
参考文献 ………………………………………… 201

第 1 章

概率论补充知识

为了使概率论与随机过程的内容更好地衔接起来，本章对其作了扼要复习，以加深对概率论某些基本概念的理解，同时补充了特征函数、多维正态分布、多维随机向量变换和条件数学期望等一般工程数学中不讲授的内容，为学习随机过程作准备。

1.1 概率空间

在工程数学中的概率论部分，已经对古典概型和几何概型这两种特殊类型定义了概率。在古典概型中，要求试验的可能结果是有限个且具有等可能性；对于几何概型，虽然试验的可能结果是无穷多个，但仍要求具有某种等可能性。然而，实际问题中大量的随机试验结果并不属于这两种类型，因此很有必要对一般的随机现象给出一个明确的概率定义。这个问题经过人们长期探讨，并且随着测度论和积分理论的日益发展，终于在 1933 年由前苏联数学家 Колмогоров 综合前人的成果，给出了概率论的公理化体系，明确了事件、概率等基本概念，从而使概率论成为一个严谨的数学分支。

1.1.1 事件域

我们知道，事件是样本空间 Ω 的一个子集，但一般并不把 Ω 的一切子集都作为事件，例如在几何概率中就不能把不可度量的子集作为事件。事实上只要把具有某些限制而又相当广泛的一类 Ω 的子集作为事件就够了，为此介绍事件域的概念。

定义 1.1.1 设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一些子集构成的集合，如果它满足以下条件：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 A 的补集 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

(3) 若对$\forall$ $n=1, 2, \cdots, A_n\in\mathscr{F}$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 为事件域，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件。

一般把满足上述条件的集 $\mathscr{F}$ 称为 σ-域，所以事件域是一个 σ-域，它具有下列性质：

(1) 空集$\varnothing\in\mathscr{F}$；

(2) 若对$\forall$ $n=1, 2, \cdots, A_n\in\mathscr{F}$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\mathscr{F}$；

(3) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，则 $A-B\in\mathscr{F}$。

1.1.2 概率

定义 1.1.2 设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一个事件域，定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数 $P(A)$ 如果满足以下条件：

(1) 非负性：$\forall A\in\mathscr{F}$，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 归一性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：若对 $\forall n=1, 2, \cdots, A_n\in\mathscr{F}$，且对 $\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$；则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

则称 P 是定义在二元组 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率，而称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

至此，我们引进了概率论中的三个基本概念：样本空间 Ω，事件域 $\mathscr{F}$ 和概率 P。它们是描述一个随机试验的三个基本组成部分，把三者结合起来，我们称这三元有序总体 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间。在实际问题中，如何确定样本空间 Ω，如何选取事件域 $\mathscr{F}$，又如何在 $\mathscr{F}$ 上定义概率 P，要视具体情况而定。但在一般的研究中，我们总认为它们是预先给定的。

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间，则概率 P 有如下性质：

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 有限可加性：若对 $\forall i=1, 2, \cdots, n$，$A_i\in\mathscr{F}$，且对 $\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

(3) 可减性：若 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

(4) 单调不减性：若 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则有 $P(A)\leqslant P(B)$；

(5) 次可加性：对 $\forall n=1, 2, \cdots, A_n\in\mathscr{F}$，有 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$；

(6) 加法公式：对任意的 $A_k\in\mathscr{F}(k=1, 2, \cdots, n)$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.1.3 条件概率空间

定义 1.1.3 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一已知的概率空间，$B\in\mathscr{F}$ 满足 $P(B)>0$，定义

$$P(A|B)\triangleq\frac{P(AB)}{P(B)},\ A\in\mathscr{F}$$

则 $P(.|B)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个概率测度，称为在给定事件 B 的条件下的条件概率。

记 $P_B(A)\triangleq P(A|B)$，称 $(\Omega, \mathscr{F}, P_B)$ 为给定事件 B 的条件概率空间，简称为条件概率空间。

由于条件概率空间中 P_B 是一概率测度，因此条件概率也具有上一小节中所述的有关概率的性质，此处不再重复。下面给出条件概率本身所具有的特殊性质。

(1) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P_A)$ 是一条件概率空间，$B\in\mathscr{F}$，且 $P_A(B)>0$，则有

$$P_A(C|B) = P(C|AB) = P_{AB}(C)$$

即在条件概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P_A)$上所定义的条件概率 $P_A(C|B)$就等于在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上构成的新的条件概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P_{AB})$上的条件概率。

(2)(乘法公式)设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，$A_i \in \mathscr{F}(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

(3)(全概率公式)设 $A\in\mathscr{F}$，$B_i\in\mathscr{F}(i=1, 2, \cdots)$，若$\forall\ i\neq j$，$B_iB_j=\varnothing$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \supset A$，$P(B_i) > 0$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

(4)(Bayes 公式)设 $A\in\mathscr{F}$，$B_i\in\mathscr{F}(i=1, 2, \cdots)$满足(3)中条件，且 $P(A)>0$，则

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k)P(A|B_k)}, n = 1, 2, \cdots$$

1.1.4 事件的独立性

定义 1.1.4 设 $A_i\in\mathscr{F}(i=1, 2, \cdots, n)$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的 n 个事件，若对任意的 $m(1\leqslant m\leqslant n)$及任意的 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n$，都有

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_m})$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是独立的。

显然，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意两个都是独立的(称之为两两独立)；反之，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立，则未必有 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立。读者不难构造反例说明。

定理 1.1.1 设 $A_i\in\mathscr{F}(i=1, 2, \cdots, n)$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立的充要条件是下列 2^n 个式子成立：

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$P(A_1\cdots \overline{A_i}\cdots A_n) = P(A_1)\cdots P(\overline{A_i})\cdots P(A_n) \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

$$P(A_1\cdots \overline{A_i}\cdots \overline{A_j}\cdots A_n) = P(A_1)\cdots P(\overline{A_i})\cdots P(\overline{A_j})\cdots P(A_n) \qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(\overline{A_1}\cdots A_i\cdots \overline{A_n}) = P(\overline{A_1})\cdots P(A_i)\cdots P(\overline{A_n}) \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

$$P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots \overline{A_n}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

定理的证明请读者自己给出。

1.2 随机变量

1.2.1 随机变量

下面引进随机变量的概念。由于随机变量是以数量形式来描述随机现象的，因此它对于理论研究和数学运算都带来了很大的方便。

设 Ω 是某一随机试验的样本空间，如果对每个 $\omega\in\Omega$ 有一实数与之对应，就得到一个定义在 Ω 上的实值函数 $X(\omega)$。我们不仅关心 $X(\omega)$ 取什么值，而且还关心它取值的概率大小。例如希望知道集 $\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}$ 的概率，其中 x 是任一实数，以后为简便计，常将 $\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}$ 简记为 $\{X(\omega)\leqslant x\}$ 或 $\{X\leqslant x\}$。因为我们只在事件上定义了概率，讨论 $\{X(\omega)\leqslant x\}$ 的概率，当然要求 $\{X(\omega)\leqslant x\}$ 是事件。

定义 1.2.1 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一概率空间，$X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数，如果对任一实数 x，$\{X\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 X 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个随机变量，进而，称 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$ 为随机变量 X 的分布函数。

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 具有以下基本性质：

(1) 单调不减性：即若 $x<y$，则 $F(x)\leqslant F(y)$；

(2) 右连续性：即对任意 $x\in R^1$，$F(x+0)=F(x)$；

(3) 记 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$，则 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$。

还可以证明，满足上述三个性质的函数，必定是某个概率空间上某个随机变量的分布函数，因此，我们也称满足以上三个条件的函数为分布函数。

1.2.2 随机向量及其分布

有些随机试验的结果同时涉及到若干个随机变量，我们不但要考察其中每个随机变量的性质，还要研究它们之间的联系。下面讨论随机向量及其分布。

定义 1.2.2 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一概率空间，$X_1(\omega)$，$X_2(\omega)$，…，$X_n(\omega)$ 是定义在这个概率空间上的 n 个随机变量，称 $\boldsymbol{X}(\omega)=(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个 n 维随机向量。

n 维随机向量取值于 n 维实空间 R^n。

对于 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n，由于

$$\{X_1\leqslant x_1, X_2\leqslant x_2, \cdots, X_n\leqslant x_n\} = \bigcap_{k=1}^{n}\{X_k\leqslant x_k\}\in\mathscr{F}$$

所以谈论它的概率是有意义的。

定义 1.2.3 设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 n 维随机向量，称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1\leqslant x_1, X_2\leqslant x_2, \cdots, X_n\leqslant x_n)$$

为 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数，也称之为 n 个随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的联合分布函数。

若随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 只取有限个或可列个不同的向量值，则称 $\boldsymbol{X}$ 为离散型随机向量。设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的所有可能值为 $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \cdots, x_{ni_n})$；$i_1, i_2, \cdots, i_n=1, 2, \cdots$，则称概率

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_n} = P\{X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n}\};\ i_1, i_2, \cdots, i_n = 1, 2, \cdots$$

为 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律。它具有性质：

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \geqslant 0;\ \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} p_{i_1,i_2,\cdots,i_n} = 1$$

若存在 n 元非负 Lebesgue 可积函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, u_2, \cdots, u_n)\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n$$

则称 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为连续型随机向量，函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $\boldsymbol{X}$ 的 n 维概率密度函数。它满足性质：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0,\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = 1$$

特别地，若 n 维概率密度函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 R^n 上的连续函数，则有：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

1.2.3 随机变量的独立性

定义 1.2.4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量，若对于任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均有

$$P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\} = P\{X_1 \leqslant x_1\}P\{X_2 \leqslant x_2\}\cdots P\{X_n \leqslant x_n\}$$

则称 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的。

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)$，它们的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则上式等价于

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n)$$

下面分别给出离散型随机变量和连续型随机变量相互独立的充要条件。

定理 1.2.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是离散型随机变量，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件是：对任意的 $i_1, i_2, \cdots, i_n= 1, 2, \cdots$，有

$$P\{X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n}\} = P\{X_1 = x_{1i_1}\}P\{X_2 = x_{2i_2}\}\cdots P\{X_n = x_{ni_n}\}$$

定理 1.2.2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是连续型随机变量，$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及 $p_1(x)$，$p_2(x), \cdots, p_n(x)$ 分别为它们的联合概率密度函数及 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的概率密度函数，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件是下式几乎处处成立：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_n(x_n)$$

还可以证明：

(1) 若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则其中任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个随机变量也相互独立；

(2) 若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 是 n 个 Borel 可测函数，则随机变量 $g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_n(X_n)$ 也是相互独立的。

1.2.4 随机变量的数字特征

定义 1.2.5 设 $F(x)$是随机变量 X 的分布函数，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\mathrm{d}F(x)<+\infty$，则称 $\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x)$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$。

这里用到的积分是 Riemann-Stieltjes 积分。

定理 1.2.3 设 $F(x)$为随机变量 X 的分布函数，对于随机变量 $Y=g(X)$，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,\mathrm{d}F(x)<+\infty$，则 $Y=g(X)$的数学期望 $E[g(X)]$存在，且

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

这个定理的证明要用到较深的数学知识，这里从略。读者可参阅参考文献 4。

对于函数 $g(x)=(x-E(X))^2$，若 $g(X)$的数学期望存在，则称 X 的方差存在，且记方差为 $D(X)$，即

$$D(X)=Eg(X)=E[(X-E(X))^2]$$

定理 1.2.3 可以推广到随机向量的场合。设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为一 n 元函数，若

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|g(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\,\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)<+\infty$$

则随机变量 $Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望存在，且

$$E[g(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

对随机变量 X 及 Y，设它们的数学期望都存在，定义 $g(x,y)=(x-E(X))(y-E(Y))$，若 $Eg(X,Y)$存在，则称之为 X 与 Y 的协方差，并记为 $\mathrm{cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{cov}(X,Y)=Eg(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

定理 1.2.4

(1)（切比雪夫不等式）设 X 为任一具有有限方差的随机变量，$\varepsilon>0$，则

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

(2)（Cauchy-Schwarz 不等式）设 X、Y 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的任两个随机变量，若 $E(X^2)<+\infty$，$E(Y^2)<+\infty$，则 $E(XY)$存在，且

$$E^2(XY)\leqslant E(X^2)E(Y^2)$$

证明 (1) 设 $F(x)$是 X 的分布函数，则

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\int_{|x-E(X)|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}F(x)\leqslant\int_{|x-E(X)|\geqslant\varepsilon}\frac{(x-EX)^2}{\varepsilon^2}\mathrm{d}F(x)$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2\,\mathrm{d}F(x)=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

(2) 对任意的实数 x，由于

$$g(x):=E[(xX-Y)^2]=[E(X^2)]x^2-2E(XY)x+E(Y^2)\geqslant 0$$

从而 x 的一元二次方程 $g(x)=0$ 或者没有实根，或者有二重根。故判别式

$$\Delta = 4[E^2(XY) - E(X^2)E(Y^2)] \leqslant 0$$

即

$$E^2(XY) \leqslant E(X^2)E(Y^2)$$

■

1.3 特征函数

我们知道，随机变量的分布函数完全描述了随机变量的统计规律，但是，若用分布函数来解决，有的问题并不一定容易，于是需要考虑引进有效的数学工具，其中之一是特征函数。特征函数有时对于计算随机变量的矩以及求独立随机变量和的分布函数特别方便，在极限定理的研究中，它也发挥了重要的作用。

1.3.1 特征函数的定义

为了定义特征函数，先来引进复随机变量的概念。

定义 1.3.1 设 X 与 Y 都是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的实值随机变量，则称 $Z=X+\mathrm{j}Y$ 为复随机变量，其中 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位。Z 的分布函数定义为(X, Y)的联合分布函数。

从上面的定义可知，对于复随机变量 $Z=X+\mathrm{j}Y$ 的研究，本质上是对实二维随机向量(X, Y)的研究。

如果实二维随机向量(X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)，…，(X_n, Y_n)相互独立，则称复随机变量 $X_1+\mathrm{j}Y_1$，$X_2+\mathrm{j}Y_2$，…，$X_n+\mathrm{j}Y_n$ 相互独立。

如果 X、Y 的数学期望 EX、EY 存在，则定义复随机变量 $Z=X+\mathrm{j}Y$ 的数学期望为 $EZ=EX+\mathrm{j}EY$。

而两个复随机变量 $Z_1=X_1+\mathrm{j}Y_1$，$Z_2=X_2+\mathrm{j}Y_2$ 的协方差定义为

$$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = E[\overline{(Z_1 - EZ_1)}(Z_2 - EZ_2)]$$

特别地，$D(Z)=\mathrm{cov}(Z, Z)=E[|Z-EZ|^2]$。

关于实随机变量数学期望及协方差与方差的一些性质，对复随机变量也成立。

定义 1.3.2 设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$，则称

$$f_X(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\, \mathrm{d}F_X(x) \tag{1.3.1}$$

为 X 的特征函数。

由于对任意 $t\in R^1$，$|\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}|=1$，故 $E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}]$总是存在的，即任一随机变量的特征函数总是存在的。

若 X 为离散型随机变量，其分布律为 $p_k=P\{X=x_k\}$，$k=1, 2, \cdots$，则

$$f_X(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}] = \sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx_k} p_k \tag{1.3.2}$$

若 X 为连续型随机变量，其概率密度函数为 $p(x)$，则

$$f_X(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\, p(x)\, \mathrm{d}x \tag{1.3.3}$$

这时，特征函数可由其概率密度函数的 Fourier 变换得到 $f_X(t)=\mathscr{F}[p(x)](-t)$，其中 $\mathscr{F}$ 表示 Fourier 变换。

例 1.3.1 设 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，求其特征函数。

解 $\because \quad P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad k=0, 1, 2, \cdots$

$$\therefore \quad f_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tk}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{j}t})^k}{k!}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-1)}$$

例 1.3.2 设 X 服从 $N(0, 1)$，求其特征函数。

解 $\because \quad \exp\left[-\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2\right]\leftrightarrow \sqrt{\pi}\,\tau\exp\left[-\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)^2\right], \tau>0$

$$\begin{aligned}\therefore \quad f_X(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}p(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right](-t)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\pi}\sqrt{2}\exp\left[-\left(-\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\end{aligned}$$

这里 $\mathscr{F}$ 表示 Fourier 变换。

1.3.2 特征函数的一些性质

性质 1.3.1 设 $f(t)$是特征函数，则

$$f(0)=1, \quad |f(t)|\leqslant 1, \quad f(-t)=\overline{f(t)}$$

证明 设 $f(t)$是 X 的特征函数，则由其定义可得

$$\begin{aligned}&f(0)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}0X}]=E(1)=1\\&|f(t)|=|E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}]|\leqslant E[|\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}|]=1\\&f(-t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-t)X}]=E[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tX}]=E[\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}}]=\overline{E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}]}=\overline{f(t)}\end{aligned}$$ ■

性质 1.3.2 特征函数 $f(t)$在$(-\infty, \infty)$上一致连续。

证明 设 $f(t)$是 X 的特征函数，X 的分布函数为 $F(x)$，则

$$\begin{aligned}|f(t+h)-f(t)|&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t+h)x}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}]\,\mathrm{d}F(x)\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}hx}-1|\,\mathrm{d}F(x)\\&\leqslant 2\int_{|x|\geqslant A}\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}hx}-1|\,\mathrm{d}F(x)\\&=2\int_{|x|\geqslant A}\mathrm{d}F(x)+2\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\,\mathrm{d}F(x)\end{aligned}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，选取足够大的 A，使得 $2\int_{|x|\geqslant A}\mathrm{d}F(x)<\dfrac{\varepsilon}{2}$，又只要取 $h<\dfrac{\varepsilon}{2A}$，则对 $\forall\, x\in[-A, A]$，有 $2\left|\sin\dfrac{hx}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而

$$2\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\,\mathrm{d}F(x)<\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}F(x)=\frac{\varepsilon}{2}$$

因此对 t 一致地有 $|f(t+h)-f(t)|<\varepsilon$，即 $f(t)$在$(-\infty, \infty)$上一致连续。 ■

性质 1.3.3 特征函数 $f(t)$是非负定的，即对任意的自然数 n，实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 及复

数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_i - t_k)a_i \overline{a_k} \geqslant 0$

证明

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_i - t_k)a_i \overline{a_k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i \overline{a_k} E\{\exp[\mathrm{j}(t_i - t_k)X]\}$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \exp(\mathrm{j}t_i X) \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n} a_k \exp(\mathrm{j}t_k X)}\right]$$

$$= E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \exp(\mathrm{j}t_i X)\right|^2\right] \geqslant 0$$ ■

性质 1.3.4 （线性性）设 a，b 为常数，$Y=aX+b$，则

$$f_Y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}bt} f_X(at)$$

证明 $f_Y(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}tY})=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}t(aX+b)}]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(at)X}]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}f_X(at)$ ■

例 1.3.3 设 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$，求其特征函数。

解 令 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $Y \sim N(0, 1)$，且 $X=\sigma Y+\mu$，故

$$f_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\mu t} f_Y(\sigma t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\mu t} \exp\left[-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] = \exp\left(\mathrm{j}\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

性质 1.3.5 若 X 与 Y 相互独立，则

$$f_{X+Y}(t) = f_X(t) f_Y(t)$$

即独立随机变量和的特征函数等于各特征函数之积。

证明 由于 X 与 Y 相互独立，因此随机变量 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}tY}$ 也相互独立，故

$$f_{X+Y}(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}t(X+Y)}] = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}tY}] = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}]E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tY}] = f_X(t) f_Y(t)$$

这个性质可推广为：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$f_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = f_{X_1}(t) f_{X_2}(t) \cdots f_{X_n}(t)$$ ■

性质 1.3.6 若随机变量 X 的 n 阶矩存在，则它的特征函数 n 次可导，且对 $k \leqslant n$，有

$$f_X^{(k)}(0) = \mathrm{j}^k E(X^k)$$

证明 由于 X 的 n 阶矩存在，故 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \,\mathrm{d}F_X(x) < \infty$，而 X 的特征函数为

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx} \,\mathrm{d}F_X(x)$$

又

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\right| = |x|^k$$

故有

$$f_X^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx} \,\mathrm{d}F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx} \,\mathrm{d}F_X(x) = \mathrm{j}^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx} \,\mathrm{d}F_X(x)$$

$$\therefore \quad f_X^{(k)}(0) = \mathrm{j}^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \,\mathrm{d}F_X(x) = \mathrm{j}^k E(X^k)$$ ■

若知道了 X 的特征函数，用这个性质求 X 的各阶矩是很方便的。

1.3.3 惟一性定理

由特征函数的定义知，随机变量的分布函数惟一地确定了它的特征函数，反之，由特

征函数能否惟一地确定分布函数呢？结论是肯定的。我们给出下面的定理。

定理 1.3.1 （惟一性定理）随机变量的分布函数与特征函数是一一对应的，即可相互惟一确定。特别地，若特征函数 $f(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$，则相应的分布函数是连续型的，且有

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}p(x)\,\mathrm{d}x,\ p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}f(t)\,\mathrm{d}t$$

即在特征函数绝对可积的条件下，概率密度函数与特征函数构成一个 Fourier 变换对。

对于离散型随机变量的特征函数，注意到离散型分布函数的特点可知，如果特征函数 $f(t)$ 可表示成如下形式：

$$f(t)=\sum_k p_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx_k}$$

其中，x_k 为实数，p_k 为正数，且 $\sum_k p_k=1$，则 $f(t)$ 对应于离散型分布函数，其分布律为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots\cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

定理 1.3.2 （Bochner－辛钦）函数 $f(t)$ 是特征函数的充要条件为：$f(t)$ 是连续非负定的，且 $f(0)=1$。

Bochner－辛钦定理是特征函数的一个重要定理。

下面我们不加证明地给出 Herglotz 定理。首先，对应于非负定函数的定义，我们定义非负定数列。

定义 1.3.3 复数列 $\{c_n|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 称为是非负定的，如果对任意的正整数 n 及复数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{i-k}a_i\overline{a_k}\geqslant 0$。

定理 1.3.3 （Herglotz）数列 $\{c_n|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 可以表示为

$$c_n=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}G(x)$$

的充要条件为它是非负定的，其中 $G(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界非降的右连续函数。

1.3.4 多元特征函数

设 n 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，与一维随机变量的特征函数类似，定义它的特征函数为

$$\begin{aligned} f(t_1,t_2,\cdots,t_n)&=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_n)}] \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)}\,\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{aligned}\tag{1.3.4}$$

与一维随机变量的特征函数类似，有惟一性定理，且有类似的性质。下面给出多元特征函数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 的一些性质：

性质 1.3.7 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 R^n 中一致连续，且

$$|f(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\leqslant f(0,0,\cdots,0)=1$$

$$f(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}$$

性质 1.3.8 （线性）设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的特征函数为 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2,\cdots,$

x_n)，$\boldsymbol{A}$ 为一 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)$，则 m 维随机向量 $\boldsymbol{Y}=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)=\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{b}$ 的特征函数为

$$f_Y(u_1, u_2, \cdots, u_m) = f_Y(\boldsymbol{u}) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{bu}'} f_X(\boldsymbol{uA}') \tag{1.3.5}$$

特别地，若 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ 为任意常数，则 $Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b$ 的特征函数为

$$f_Y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}bt} f(a_1t, a_2t, \cdots, a_nt)$$

更特别地，$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的特征函数为 $f_Y(t)=f(t, t, \cdots, t)$。

证明：

$$\begin{aligned} f_Y(\boldsymbol{u}) &= E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{uY}'}] = E\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{b})'}\} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{ub}'} E\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\boldsymbol{uA}')\boldsymbol{X}'}\} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{bu}'} f_X(\boldsymbol{uA}') \end{aligned}$$

■

性质 1.3.9 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的特征函数为 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则对 $k\leqslant n$，k 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 的特征函数为

$$f_{(X_1, X_2, \cdots, X_k)}(t_1, t_2, \cdots, t_k) = f(t_1, t_2, \cdots, t_k, 0, \cdots, 0)$$

对 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中任意 k 个分量构成的 k 维随机变量 $(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k})$，其特征函数可类似地得到。

性质 1.3.10 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的特征函数为 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，而 X_k 的特征函数为 $f_{X_k}(t)$，$k=1, 2, \cdots, n$，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件为

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f_{X_1}(t_1) f_{X_2}(t_2) \cdots f_{X_n}(t_n)$$

性质 1.3.11 若 $E[X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n}]$ 存在，则

$$E[X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n}] = \mathrm{j}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f(t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]\Bigg|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

例 1.3.4 设 X、Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(1) 利用 X 的特征函数求 $E(X^4)$；

(2) 求出 $Z=a_1X+a_2Y$ 的概率密度函数。

解

(1) 由例 1.3.3 知

$$f_X(t) = \exp\left(\mathrm{j}\mu_1 t - \frac{\sigma_1^2t^2}{2}\right)$$

故由性质 1.3.6 得

$$E(X^4) = \frac{1}{\mathrm{j}^4} f_X^{(4)}(0) = 3\sigma_1^4$$

(2) 因为 X、Y 相互独立，故由性质 1.3.8 和 1.3.10 可得 Z 的特征函数为

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= f_{(X,Y)}(a_1t, a_2t) = f_X(a_1t) f_Y(a_2t) \\ &= \exp\left[\mathrm{j}(a_1\mu_1 + a_2\mu_2)t - \frac{(a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)t^2}{2}\right] \end{aligned}$$

故由惟一性定理知 $Z\sim N(a_1\mu_1+a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2)$，$Z$ 的概率密度函数为

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)}} \exp\left\{-\frac{[z - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2)]^2}{2(a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)}\right\}, -\infty < z < +\infty$$