高等代数

学习指导书

武汉教育学院
北京教育学院 合编
上海教育学院
熊全淹 主审

★ 高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

高等代数学习指导书

武汉教育学院
北京教育学院 合编
上海教育学院

熊全淹 主审

高等教育出版社

内容提要

本书是与武汉教育学院、北京教育学院、上海教育学院合编的《高等代数》配套的学习指导书.

本书各章与教材相对应，每章具体内容分为五个部分：内容提要，学习要求，疑难解析，补充例题和自测试题. 通过本书的学习，读者可加深对教材的理解，更好地掌握高等代数的知识.

本书可供收看培训中学教师的卫星电视教学的学员参考，也可供教育学院、师范学院师生及函授、自学者参考使用。

高等代数学习指导书

武汉教育学院
北京教育学院 合编
上海教育学院

熊全淹 主审

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 4.875 字数 110 000
1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷
印数 0001— 15 160
ISBN7-04-000610-3/O·240
定价 1.35 元

前　　言

为了帮助收看卫星电视教学的学生以及自学者学习，我们为武汉教育学院等编的《高等代数》配套编写了这本学习指导书.

本书逐章分下面五个部分编写：

一、内容提要：这部分概括了全章的基本内容，同时也说明了这些内容之间的联系.

二、学习要求：这部分具体说明了对全章内容应掌握的程度，以及全章的重点与难点.

三、疑难解析：这部分是根据学生学习时提出的问题，逐一进行回答，为学生学习教材排除疑难.

四、补充例题：这部分是学完全章后，为学生综合运用知识而选择的典型例题，并通过分析解题思路，使学生进一步掌握解题的方法与技巧.

五、自测试题：这部分是根据学习要求选编的一套题目，供学生在学完全章后自我考核.

本书由武汉大学熊全淹教授主审、各章的执笔人是：第一章，北京教育学院陶晓永；第二至三章，武汉教育学院樊恺；第四至六章，武汉教育学院张星之；第七至九章，上海教育学院章宗鉴；第十章，北京教育学院陶晓永. 全书由武汉教育学院樊恺统稿.

最后，谨向关心本书出版的师生致以衷心感谢！

编　　者

1988 年 2 月

目　　录

第一章　多　项　式

多项式是代数学的最基本的研究对象之一，它不但与方程论有关，而且是进一步学习代数和其他高等数学的基础.

这章共分十节. §1 在引入数域的概念的基础上，给出一元多项式的定义，讨论了多项式加法、减法、乘法运算及基本性质，解答了引言中提出的第 1 个问题；§2 与 §3 在带余除法的基础上引入整除的概念，讨论了整除和最大公因式理论，解答了引言中提出的第 2 个问题；§4 与 §5 在一般数域上研究多项式的因式分解，包括讨论分解式的存在性、唯一性，标准分解式和重因式，§6介绍了多项式的根及其性质，随后 §7 与 §8 分别在复数域、实数域、有理数域上研究多项式的因式分解，解答了引言中提出的第 3 个问题；§9 与 §10 讨论了多元多项式和对称多项式，不作教学要求.

一、内 容 提 要

1. 多项式的概念及运算

1) 数域的概念.

2) 一元多项式：

1° 假定 x 是一个文字，表示式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_i\in F,\quad i=0,1,2,\cdots,n.$$

叫做数域 F 上的一元多项式.

2° 多项式的值与根.

3° 数域上的多项式函数相等与多项式相等的一致性.

3) 多项式的运算：

1° 加法、减法、乘法及所满足的运算规律.

2° 次数公式:

$$次(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(次(f(x)),次(g(x)));$$

$$次(f(x)g(x))=次(f(x))+次(g(x)).$$

2. 多项式的整除性及带余除法

1) 整除的概念:

1° 对于 $f(x)$, $g(x)$,假如有 $h(x)$ 使 $f(x)=g(x)h(x)$,我们就说 $g(x)$ 整除 $f(x)$,记作 $g(x)\mid f(x)$.

2° 整除的基本性质.

2) 带余除法:

1° 对于 $f(x)$, $g(x)(\neq 0)$,有唯一的 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中次$(r(x))<$次$(g(x))$,或者 $r(x)=0$.

2° 余数定理:用 $x-\alpha$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x)=f(\alpha)$.

3° 用 $x-\alpha$ 除 $f(x)$ 时带余除法可以用简化形式,即综合除法.

3. 最大公因式

1) 基本概念:

因式; 公因式; 最大公因式; 互质.

2) 最大公因式的求法:辗转相除法.

3) 最大公因式的重要性质:

1° $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式 $d(x)$ 是它们的最大公因式的充要条件是

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

2° $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质的充要条件是

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

4. 多项式的因式分解

1) 不可约多项式:

1° 不可约多项式的概念.

2° 不可约多项式的性质: $n(\geqslant 1)$次多项式 $p(x)$ 不可约的充要条件是对于任意多项式 $f(x)$, $g(x)$, 如果 $p(x)\mid f(x)g(x)$, 就有 $p(x)\mid f(x)$, 或者 $p(x)\mid g(x)$.

2) 因式分解定理:

数域 F 上的每个 $n(\geqslant 1)$ 次多项式都可以分解为 F 上的不可约因式的乘积, 并且在不计零次因式的差别时分解式是唯一的.

3) 重因式:

1° 重因式的概念.

2° $f(x)$的不可约因式 $p(x)$是它的 $k(\geqslant 1)$重因式的充要条件是 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式.

3° $f(x)$没有重因式的充要条件是$(f(x), f'(x))=1$.

5. 复数域、实数域和有理数域上的多项式

1) 复数域 C 上的多项式:

1° 代数基本定理.

2° 复系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

在复数域中恰好有 n 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 而且满足韦达公式:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

3° 标准分解式:

$$f(x)=a(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_r)^{m_r}.$$

2) 实数域 R 上的多项式:

1° 实系数多项式虚根成对定理.

2° 实系数不可约多项式只有一次多项式及二次多项式

$$ax^2+bx+c\,(b^2-4ac<0).$$

3° 标准分解式:

$$f(x)=a(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+c_1x+d_1)^{l_1}\cdots(x^2+c_sx+d_s)^{l_s}$$

3) 有理数域 Q 上的多项式:

1° 在有理数域上存在任意次数的不可约多项式.

2° 有理系数多项式的有理根的求法.

*6. 多元多项式(略)

二、学习要求

这章的重点是多项式的因式分解理论; 难点是最大公因式的定义,多项式的整除、互质、不可约等概念的联系与区别,以及因式分解定理的证明.

具体学习要求如下:

1. 掌握数域上一元多项式的概念、运算及带余除法, 并能熟练地运算;

2. 正确理解多项式的整除概念和性质;

3. 掌握最大公因式的概念和性质,以及多项式互质的概念和性质,并能熟练地求出两个多项式的最大公因式;

4. 掌握不可约多项式的概念和多项式的因式分解问题;

5. 掌握重因式的概念以及运用多项式的导数来判断重因式的方法;

6. 掌握多项式的根的概念及其性质;

7. 掌握整系数多项式的有理根的求法,并能熟练地求出有理系数多项式的有理根.

三、疑 难 解 析

1. 第一章中多项式的定义与中学代数里多项式的定义有何区别?

答 在中学代数里,是通过用字母表示数得到代数式的概念,再对代数式分类得到多项式的,因此其中的元是变量,从而多项式是函数表示式;在第一章中,多项式却定义为形式表示式; 即把元看作抽象符号,并在运算中满足与数相同的基本规律. 我们把多项式看作形式表示式,将比把它看作函数表示式更带一般性,当然在应用上也就更广泛.

需要指出的是,虽然在中学代数里基本上是用函数观点研究多项式,但函数概念却出现在多项式后,而且在不需要讨论多项式中元的意义时,又是实际上把它作为形式表示式的. 因此,在中学代数里多项式并没有真正严格的定义,而且对于把它究竟看作形式表示式还是函数表示式,也是不加严格区分的. 譬如在作多项式的运算时,是按形式表示式处理的;在求多项式的值时,又是按函数表示式处理的.

我们在§6中证明了数域上的多项式两种定义的一致性①,就保证了中学代数里这样处理多项式的合理性. 因此,今后我们就可以随意按哪种定义来理解数域上的多项式了.

2. 在§2中,由整除定义容易推得,零次多项式(即非零常数)能整除任意多项式 $f(x)$. 那末我们可以知道当 $f(x)=1$ 时,就有 $2|1$. 这问题如何理解?

答 这里应该区分多项式的整除与整数的整除. 在整数集 Z 里,显然有 $2\nmid 1$,这是因为找不到一个整数 q,使得$1=2q$. 对于数

① §6是仅就一元多项式证明的,§9中进一步对多元多项式的情形作了说明.

域 F 上的多项式集合来说，就有多项式 $q(x)=\frac{1}{2}$，使得 $1=2\cdot\frac{1}{2}$. 因此，根据多项式整除的定义可知 $2|1$.

3. 在§3中，只给出了定理1的必要性证明，为什么说是充要条件？

答 所谓充分性是：假如 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意公因式 $h(x)$ 都是 $d(x)$ 的因式，那末 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 显然它是成立的.

这是因为假如 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全是 0，那末由于 $h(x)|d(x)$，次 $(h(x))\leqslant$ 次 $(d(x))$，即 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式中次数最大的，所以 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式；假如 $f(x)=g(x)=0$，那末任意多项式都是它们的公因式，而能被任意多项式整除的只有 0，它就是两个零多项式的最大公因式.

4. §3里定理2中满足(2)式的 $u(x)$，$v(x)$ 是不是唯一的？

答 不唯一. 这是因为如果存在 $u(x)$、$v(x)$ 使得(2)式成立，即

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),$$

那末对于任意多项式 $h(x)$，都有

$$\begin{aligned}&(u(x)-h(x)g(x))f(x)+(v(x)+h(x)f(x))g(x)\\&=u(x)f(x)-h(x)g(x)f(x)+v(x)g(x)+h(x)f(x)g(x)\\&=u(x)f(x)+v(x)g(x)\\&=d(x).\end{aligned}$$

所以 $u_1(x)=u(x)-h(x)g(x)$，$v_1(x)=v(x)+h(x)f(x)$ 也满足(2)式.

5. 对于§4的因式分解定理，证明分解式的唯一性时所用的数学归纳法是否与中学代数里的形式不同？它的依据是什么？

答 中学代数里用数学归纳法证明与自然数 n 有关的命题的

步骤是:

1) 验证 $n=1$ 时结论成立;

2) 假设 $n=k$ 时结论成立,推出 $n=k+1$ 时结论成立. 然后根据1),2)断定结论对于所有自然数都成立.

这是数学归纳法的最基本形式,通常叫做第一数学归纳法.假如把 2) 中的归纳假设加强,改为"$n\leqslant k$ 时结论成立",就叫做第二数学归纳法. 显然,第二种形式包含第一种,从而应用起来往往更方便. §4 证明因式分解定理中的唯一性时,就是用的第二数学归纳法.

用数学归纳法证明命题的道理可以这样直观地看:根据1)可知,$n=1$ 时结论成立;于是根据 2),就可以断定 $n=2$ 时结论成立;再由 $n\leqslant 2$ 时结论成立,根据2)又可以断定 $n=3$ 时结论成立;…….如此一直传递下去,就可以推断结论对于一切自然数都成立. 由此可知,这里1)是传递的基础,2)是传递的依据. 假如只有1)而没有2),结论的普遍成立是不可靠的;反过来,假如只有2)而没有1),传递的结论将是不实在的. 所以用数学归纳法时,两个步骤缺一不可.

严格地说,数学归纳法所依据的原理是自然数集 N 的一个最基本性质: N 的任意非空子集中必定有一个最小数①. 我们用它来证明第二数学归纳法的原理:

假设结论不是对所有自然数都成立. 令 S 表示使结论不成立的自然数的集合,那末 S 非空,从而 S 中有最小数 c. 根据1)可知,$c\neq 1$,所以 $c-1$ 是自然数,且 $c-1\overline{\in} S$,即 $n\leqslant c-1$ 时结论成立. 这样根据 2),当 $n=c$ 时结论也成立,即 $c\overline{\in} S$. 这与上面的假设矛盾. 于是我们用反证法证明了第二数学归纳法的原理.

---

① 这个性质一般作为公理,叫做最小数原理.

显然，假如 a 是一个整数(譬如 3，0，-2 等)，那末整数的集合

$$M=\{x\mid x\in\mathbf{Z},x\geqslant a\}$$

也具有上述的自然数集 $\boldsymbol{N}$ 的性质．因此，对于从整数 a 开始的与整数有关的命题，仍然可以用数学归纳法证明．这时只要把 1)中的 $n=1$ 换成 $n=a$ 就行了．

最后我们指出，在2)中也可以直接把 n 看作变动的，而不引用 k 的变动来表示 n 的变动，譬如直接由 $n-1$(或小于 n) 的情形推到 n 的情形．上述方式在高等代数中经常使用，§4证明因式分解定理中的唯一性就是用的这种书写格式．

6．§ 4 习题第 4 题的答案是如何得到的？

答 习题解答中只给出了

$$\frac{1}{2}x^4-2=\frac{1}{2}(x^2-2)(x^2+2)\ \text{(在有理数域)}$$

$$=\frac{1}{2}(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)\ \text{(在实数域)}$$

$$=\frac{1}{2}(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)\ (x+\sqrt{2}i).$$

(在复数域)

我们可用中学代数里讲的平方差公式得到上面结果，但是还需要证明每个因式在相应数域上是不可约的．譬如可以这样证明 x^2-2 在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上是不可约的：

假设 x^2-2 在有理数域上可约，就有

$$x^2-2=(x+a)(x+b).\quad(a,b\in\mathbf{Q})$$

因为

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

所以 $a+b=0,ab=-2$，于是就得到 $a=\pm\sqrt{2}$ 的矛盾．因此x^2-2 在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上不可约．

后面在§7中我们将知道，在复数域C上只存在一次不可约多项式；在实数域R上只存在不超过二次的不可约多项式，而且可以通过二次多项式是否有实根来判断它是否可约．在§8中我们还可以知道，虽然在有理数域Q上存在任意次的不可约多项式，但对于不超过三次的多项式，也可以通过它是否有有理根来判断它是否可约．于是我们就可以很方便地判断答案中的每个因式在相应数域上是否不可约了．

7．因为$f(x)=(x^2-3x+2)^2$，所以说x^2-3x+2是$f(x)$的二重因式．对不对？

答 不对．因为重因式的概念是针对不可约因式而言的．但多项式x^2-3x+2既使在最小数域Q上也可约，即

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2),$$

从而有

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)^2.$$

因此无论在什么数域F上都只应该说，$x-1$及$x-2$是$f(x)$的二重因式．

8．多项式$f(x)$没有重根的充要条件是不是$f(x)$与$f'(x)$互质？为什么？

答 $f(x)$与$f'(x)$互质是多项式$f(x)$没有重因式的充要条件．但是$f(x)$没有重根却可能有重因式，这时$f(x)$与$f'(x)$不互质，即$f(x)$与$f'(x)$互质不是$f(x)$没有重根的必要条件．这是因为，$f(x)$有没有重因式不随系数域改变（§5习题6），而$f(x)$有没有重根却会受系数域的影响．譬如，在R上$f(x)=(x^2+1)^2$有重因式，却没有根，当然更没有重根．但在C上有重根$\pm i$．

由于复数域C是最大的数域，多项式$f(x)$在C上只存在一次不可约因式（§7），因此$f(x)$在C上是否有重根与是否有重因式是一致的．

四、补充例题

例1 如果复数集 C 的子集 P 含有非零数，并且 P 中任意两个数 a 与 b 的差 $a-b$、商 $\frac{a}{b}(b\neq 0)$ 仍在 P 中，求证：P 是数域.

分析 只要证明 P 中任意两个数 a 与 b 的和 $a+b$、积 ab 仍在 P 中.

证 设 $d\in P$ 且 $d\neq 0$. 由题设条件可知

$$0=d-d\in P,\quad 1=\frac{d}{d}\in P.$$

于是对于任意两个数 a、$b\in P$，就有

$$-b=0-b\in P.$$

从而有

$$a+b=a-(-b)\in P.$$

又如果 $b=0$，那末

$$ab=0\in P,$$

如果 $b\neq 0$，那末 $\frac{1}{b}\in P$ 且 $\frac{1}{b}\neq 0$，从而有

$$ab=\frac{a}{\frac{1}{b}}\in P.$$

所以 P 是数域.

说明 这个例是说一个数集假如对减法、除法封闭，那末对逆运算加法、乘法也一定封闭. 因此要证一个数集是数域，只要证它对减法、除法封闭就行了.

例2 当 m、n 为何值时，$x^2+mx+1\mid x^3+nx+5x+2$.

解 方法一：用带余除法容易算出

$$x^3+nx^2+5x+2=(x^2+mx+1)[x+(n-m)]$$
$$+[(m^2-mn+4)x+(m-n+2)].$$

假如 $x^2+mx+1 \mid x^3+nx^2+5x+2$，那末余式

$$r(x)=(m^2-mn+4)x+(m-n+2)=0.$$

从而得到

$$\begin{cases} m^2-mn+4=0, \\ m-n+2=0. \end{cases}$$

解得 $m=2, n=4$．这时

$$x^2+mx+1=x^2+2x+1=(x+1)^2,$$

$$x^3+nx^2+5x+2=x^3+4x^2+5x+2=(x+1)^2(x+2).$$

显然有

$$x^2+mx+1 \mid x^3+nx^2+5x+2.$$

方法二：假如 $x^2+mx+1 \mid x^3+nx+5x+2$，那末必定有

$$x^3+nx^2+5x+2=(x^2+mx+1)(x+2).$$

把右边乘开后整理得

$$x^3+nx^2+5x+2=x^3+(m+2)x^2+(2m+1)x+2.$$

根据多项式相等的条件可得到

$$\begin{cases} m+2=n, \\ 2m+1=5. \end{cases}$$

解得 $m=2, n=4$．结果与方法一完全相同．

例 3 假设 $g(x)=x^2-4x+a$，如果存在唯一的多项式 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，使得

$$g(x) \mid f(x) \text{ 且 } f(x) \mid g^2(x).$$

试求 $f(x)$ 的表示式．

分析 这里要注意运用两个整除条件及 $f(x)$ 的唯一性进行推导．

解 因为 $g(x) \mid f(x)$．于是有

$$f(x)=g(x)(x-\alpha);$$

又因为 $f(x) \mid g^2(x)$，从而有

$$g^2(x)=f(x)(x-\beta)=g(x)(x-\alpha)(x-\beta).$$

由乘法消去律可得

$$g(x)=(x-\alpha)(x-\beta).$$

我们假设 $\alpha\neq\beta$. 容易验证，两个多项式

$$f_1(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta),$$

$$f_2(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$$

都满足所给条件. 这与 $f(x)$ 的唯一性矛盾. 因此 $\alpha=\beta$. 于是

$$g(x)=x^2-4x+a=(x-\alpha)^2.$$

显然 $\alpha=2$. 由此可知

$$f(x)=(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8.$$

例 4 假设 $ad-bc\neq0$. 试证

$$(f(x),g(x))=(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x)).$$

分析 证明这类问题，我们可以用最大公因式的定义，或公因式成为最大公因式的条件. 此外还要注意，等式两边都是首项系数是 1 的多项式.

证 方法一：令 $(f(x),g(x))=d_1(x)$, $(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=d_2(x)$.

因为 $d_1(x)\mid f(x)$, $d_1(x)\mid g(x)$, 所以

$$d_1(x)\mid af(x)+bg(x),\ d_1(x)\mid cf(x)+dg(x),$$

从而得 $d_1(x)\mid d_2(x)$.

又因为 $d_2(x)\mid af(x)+bg(x)$, $d_2(x)\mid cf(x)+dg(x)$, 所以

$$d_2(x)\mid d(af(x)+bg(x))-b(cf(x)+dg(x)),$$

即

$$d_2(x)\mid(ad-bc)f(x).$$

而 $ad-bc\neq0$, 所以有 $d_2(x)\mid f(x)$. 同理可证 $d_2(x)\mid g(x)$, 从而得 $d_2(x)\mid d_1(x)$.

再 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$ 的首项系数都是 1, 因此必定有 $d_1(x)=d_2(x)$. 于是例成立.