# 线性规划

XIANXING GUIHUA

许万蓉 编

北京理工大学出版社

# 线 性 规 划

许 万 蓉 编

北京理工大学出版社

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了线性规划的理论和方法。全书共分十一章，前四章介绍了线性规划的基本理论（包括对偶理论）和基本算法（单纯形法、修正单纯形法、对偶单纯形法）。以及灵敏度分析、运输问题、分解算法、变量带上界限制问题与整数线性规划。为了能反映近年来线性规划研究的新成果，本书最后两章介绍了线性规划的多项式算法：хачиян算法与Karmarkar算法。

本书既注意保持了理论分析的系统性和深度，又注意算法思想和概念的直观性，适于各方面的读者。

本书可作为理工科大学高年级学生和研究生线性规划课程的教材（可根据不同对象选取适当章节），又可作为广大工程技术人员的自学参考书。


线性规划

许万蓉 编

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

河北省三河县中赵甫印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　15.75印张　352千字

1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷

ISBN 7—81013—068—4/O·16

印数：1—5000册　定价：3.10 元

# 前言

线性规划是在电子计算机出现以后，由于科学技术的发展和大量社会实践的需要，迅速发展起来的数学规划的重要分支。

随着我国四个现代化建设事业的需要，广大工程技术人员、经济工作者、科技管理干部、军事专家等都需要了解和掌握线性规划这一科学方法。

近年来各高等院校先后开设了线性规划课程，作为研究生和高年级学生的一门选修课，也是某些系或专业如最优控制、管理工程等研究生的学位课程。

本书是根据编者在北京工业学院，自1983年以来为工科研究生开设的线性规划课程教材修改而成。在讲授过程中对教材陆续地进行了增补和修改，现在予以出版。

对于工科研究生可以不证明第十及十一章的定理（定理的证明可作师生的参考或要求更深入的读者选用），这样讲授全部章节大约需用60学时（每学时50分钟计）。自然，如对内容稍加选择，也可在更少的时间内讲授完。如用作自修也是很适宜的。

希望本书的出版不但能为大专院校理工科各专业高年级学生和研究生提供一本可用的教材，也能为从事系统工程、管理工程和工程设计等方面的广大科技人员提供一本合适的参考书。

本书在编写过程中得到了席少霖教授和韩继业研究员的

指导与帮助，并对全书进行了审阅，谨在此表示感谢。

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

1987年10月

# 目　录

# 第一章　线性规划问题概述

## §1.1　线性规划问题的例及数学模型

这一节将举一些简单的例子，来阐明线性规划所研究的问题和它的数学模型。

例1.1.1　某工厂生产$A$、$B$两种产品。生产一吨$A$需用煤9吨、电力4千瓦、劳动力3个（以劳动日计算）；生产一吨$B$需用煤4吨，电力5千瓦，劳动力10个。已知一吨$A$可获利$c_1$元，一吨$B$可获利$c_2$元。该厂现有煤360吨，电力200千瓦，劳动力300个，问生产$A$、$B$各多少吨收益最大？试建立这一问题的数学模型。

**解**　将题目所给数据列入表中。

表 1.1-1

| 原料种类 | 单位产品所需原料(单位) $A$ | $B$ | 原料总数 |
|---|---|---|---|
| 煤 | 9 | 4 | 360 |
| 电力 | 4 | 5 | 200 |
| 劳动力 | 3 | 10 | 300 |
| 收益 | $c_1$ | $c_2$ | |

设生产$A$为$x_1$吨，$B$为$x_2$吨，则总利润为$c_1x_1+c_2x_2$元。因为

耗煤、耗电、耗劳动力不得超过现有资源，所以应满足限制条件

$$\begin{array}{ll}\text{耗煤} & 9x_1+4x_2\leqslant 360\\ \text{耗电} & 4x_1+5x_2\leqslant 200\\ \text{耗劳力} & 3x_1+10x_2\leqslant 300\end{array}$$

再加上非负生产限制 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，则此问题的数学模型为：

求一组变量$x_1$，$x_2$，的值，使满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}9x_1+4x_2\leqslant 360 & (\text{耗煤限制})\\ 4x_1+5x_2\leqslant 200 & (\text{耗电限制})\\ 3x_1+10x_2\leqslant 300 & (\text{耗劳力限制})\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0。 & (\text{非负生产限制})\end{cases}$$

且使总利润

$$f=c_1x_1+c_2x_2$$

达到最大。

例1.1.2　设有钢材150根，长为15米，需要轧成配套钢料，每套由7根 2米长与两根 7米长的钢梁组成。问如何下料使钢材废料最少（设不计下料损耗）？试建立这一问题的数学模型。

**解**　由题意，每根钢材的下料有三种可能情形

1）截7米长1根，2米长4根；

2）截7米长2根，余1米为废料；

3）截2米长7根，余1米为废料。

设用第$j$种截法用去钢材$x_j$根（$j=1,2,3$），则用这批钢材截得7米长的钢梁为$x_1+2x_2$根，2米长的钢梁为$4x_1+7x_3$根，废料总长是$x_2+x_3$米。于是得数学模型如下：

求一组变量$x_1$，$x_2$，$x_3$的值，使满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x_1+2x_2)=\dfrac{1}{7}(4x_1+7x_3) & \text{（配套限制）}\\ x_1+x_2+x_3=150 & \text{（钢材限制）}\\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0\ \text{（整数）} & \text{（根数要求）}\end{cases}
$$

并且使废料总长

$$f=x_2+x_3$$

最少。

这是一类下料问题，下面再看另一类下料问题。

例1.1.3　要利用某种钢板下 $A_1$，$A_2\cdots$，$A_m$，种零件的毛坯，根据既省料又容易操作的原则，设在一块钢板上，已经设计出1，2，…，$n$种不同的下料方式。设在第$j$（$j=1,2,\cdots n,$）种下料方式中，可下得第$i$（$i=1$，2，…，$m$）种零件毛坯$a_{ij}$个，设第$i$种零件毛坯不得少于$b_i$个。问应如何下料所用钢板总数最少？建立这一问题的数学模型。

解　由题意，可列表1.1-2

表 1.1-2

| 各种下料方式可得的零件个数 ／ 下料方式 ／ 零件名称 | 1 | 2 | … | $n$ | 零件需要量 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |

设采用第 $j$ 种下料方式用去钢板$x_j$块，那么共得$A_i$种零件$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$个，因为$A_i$种零件不得少于$b_i$个，所以应满足

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

这里要求 $x_j \geqslant 0$ 并且要求 $x_j$是整数，因为$x_j$ 是所用钢板数之故。在满足上述条件下，还要求所有 $n$种下料方式共用去钢板总数$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$最少。于是得数学模型为：

求一组变量$x_j$（$j = 1, 2, \cdots, n$）的值，使满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \geqslant b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 \quad \text{整数} & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

并且使目标函数（用去钢板总数）

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

达到最小。

**例1.1.4** （营养问题或配料问题）设有$n$种食品含有$m$种营养成分，每人每天至少需要 $b_i$ 种单位的第 $i$种营养成分。已知第$j$种食品含有第$i$种营养为 $a_{ij}$ 单位，第$j$种食品每单位价格为$c_j$元。问每种食品购买多少，既满足营养需要，又使费用最少？建立这一问题的数学模型。

**解** 设第$j$种食品的购买量是$x_j$($j = 1, 2, \cdots, n$)单位。因此共含有第$i$种营养$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ 单位，第$i$种营养不得低于$b_i$单位，即应满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

这里要求$x_j \geqslant 0$（$j = 1, 2, \cdots, n$），是因为所购食品不能为负。在满足上述条件下，还要求购买 $n$ 种食品的费用 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$最少。那么这一问题的数学模型为：

求一组变量$x_j$($j = 1, 2, \cdots, n$)的值，使满足上述

约束条件 $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$

并且使目标函数 $f=\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j$的值最小。

例1.1.5（生产组织与计划问题）设用$m$种原料生产$n$种产品，生产每一单位的第$j$种产品需要第$i$种原料为$a_{ij}$单位，已知每单位第$j$种产品的利润是$c_j$元，设第$i$种原料的可使用量不得超过$b_i$单位。问每种产品各生产多少收益最大？建立这一问题的数学模型。

解　设第$j$种产品计划生产$x_j$($j=1,2,\cdots,n$)单位，可得这一问题的数学模型如下：

求一组变量$x_j$（$j=1,2,\cdots n,$）的值，使满足

约束条件 $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \ (i=1,2,\cdots,m) & \text{（原料用料限制）} \\ x_j \geqslant 0 (j=1,2,\cdots,n) & \text{（产品生产数量不能为负）} \end{cases}$

并且使目标函数（总利润）$f=\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j$的值最大。

例1.1.6（运输问题）设有$m$个车库，各库有汽车分别为$a_1$、$a_2$、$\cdots a_m$辆。又设有$n$个要车的地方，各地要车数分别为$b_1$、$b_2$、$\cdots$、$b_n$辆，且设要车总数与各库存车总数相等，即满足

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

已知从$i$库到$j$地的距离为$c_{ij}$千米，问如何调度汽车，使空驶里程最短？建立这一问题的数学模型。

解　设从第$i$库到第$j$地出车$x_{ij}$($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots n$）辆，那么从$m$个车库出车到$j$地共$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}$辆，依题意这些车数恰好等于$b_j$辆。还要满足第$i$车库共有汽车$a_i$辆的条件，即应满足，$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}=a_i$，这里$x_{ij}$是汽车数，不能为负并且是整数。于是得数学模型为：

求一组变量$x_{ij}$($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)的值，使满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j & \\ x_{ij}\geqslant 0\ (\text{整数})\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) & \end{cases}$$

并且使目标函数（空驶里程）

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

达到最小。

例1.1.7（人员分配问题）设有$n$个人被分配去做$n$件工作，每人分配一件工作。由于各人的技术水平和工作熟练程度有差异，设第$i$个人做第$j$件工作的贡献是$c_{ij}$，问如何分配这$n$个人的工作，使总的贡献最大？建立这一问题的数学模型。

解　设变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & (\text{设第}i\text{人分配做第}j\text{件工作})\\ 0 & (\text{设第}i\text{人未分配做第}j\text{件工作})\end{cases}$$

由于每一件工作只分配一人去做，所以应满足$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{nj}=1$（$j=1,2,\cdots,n$），这表示第$j$件工作分配一人去做，又因为每人只做一件工作所以应满足$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}=1$（$i=1,2,\cdots,n$），这表示第$i$人分配做一件工作。这一问题的数学模型为：

求一组变量$x_{ij}$（$i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n$）的值，使满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}=1 & (i=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=1 & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}=0 \text{ 或 } 1 & (i,j=1,2,\cdots,n)\end{cases}
$$

并且使目标函数（总贡献）

$$
f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}
$$

达到最大。

总之，这类问题的例子很多，我们不去列举了。这些问题虽是各式各样的，但它们的数学模型却具有相同的形式。这些例子的共同特点是：表示约束条件的数学式子是一组变量$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$的线性等式或线性不等式组；表示问题最优化指标的目标函数是线性函数。因为约束条件和目标函数都是线性的，所以把具有这种数学模型的问题叫做线性规划问题。

线性规划问题数学模型的一般形式是：

求一组变量$x_j$（$j=1,2,\cdots,n$）的值，使满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1(\text{或}\geqslant b_1,\text{或}=b_1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2(\text{或}\geqslant b_2,\text{或}=b_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m(\text{或}\geqslant b_m,\text{或}=b_m)\\ \quad x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\end{cases}
$$

并且使目标函数

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

达到最大（或最小）。

线性规划数学模型中的约束条件可以是线性方程组，也可以是线性不等式组。可以是求线性目标函数的最大值，也可以是求线性目标函数的最小值。这些问题在形式上的不一致，对于线性规划问题的求解是不方便的，所以线性规划问题总是借助于"标准形式"来求解。下面将给出线性规划的标准形式。

## §1.2 线性规划的标准形式

### 1.2.1 标准形式

线性规划问题的标准形式（或称为标准线性规划问题）如下：求一组变量$x_1$，$x_2,\cdots,x_n$的值，使满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right\} & (1.2.1)\\ \quad x_1,\quad x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 & (1.2.2)\end{cases}
$$

（其中$b_1$，$b_2$，$\cdots$，$b_m\geqslant 0$）并且使目标函数

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

达到最大。

（1.2.1）及（1.2.2）式称为约束条件。（1.2.1）式是包含变量$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的$m$个等式约束，也就是含$n$个未知数的$m$个方程的线性方程组。$a_{ij}$是第$i$方程中变量$x_j$的系数，$b_i$是第$i$方程右端的常数项，在标准形式中要求$b_1$，$b_2$，…，$b_m \geqslant 0$。并且（1.2.2）式这一约束表明，在标准形式中要求变量$x_1$，$x_2$，…，$x_n$是非负的。

因为一般形式的线性规划问题都能化成标准形式，因此，只要会求解标准形式的线性规划问题，那么也就会求解一般的线性规划问题了。

标准线性规划〔以后简记为（SLP）〕问题，还有下面几种表示法。

1．缩写形式　将标准线性规划问题简记为

$$
(\mathrm{SLP})\begin{cases}\max \quad f=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i(\geqslant 0) \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}
$$

2．矩阵形式　为了将标准形式的线性规划问题写成矩阵形式，令向量

$$\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$$

是一给定的$n$维行向量，称为价值系数向量，或称为目标函数系数向量。令

$$
\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$