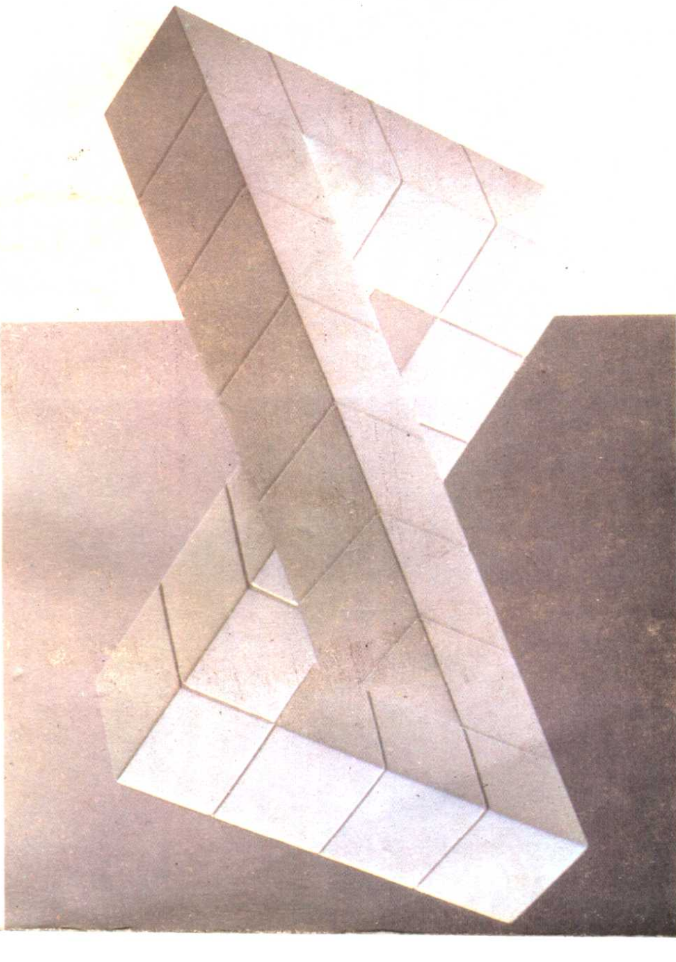
陈祥生　编著

高等数学一题多解

中国经济出版社



高等数学一题多解

陈祥生　编著

中国经济出版社

责任编辑：于 良
封面设计：王 滨

高等数学一题多解
陈祥生 编著
*
中国经济出版社出版发行
(北京市百万庄北街3号)
各地新华书店经销
永清县武装部胶印厂印刷
*
787×1092毫米 1/32 12印张 270千字
1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷
印数：1～6000
ISBN7-5017-0731-6/G.123
定价：5.40元

前　　言

高等数学是一门基础课，学好高等数学，除了要加深理解书中的有关基本概念和基本理论外，还应努力掌握各类解题方法和技巧，提高综合分析问题的能力。

本书致力于高等数学部分题目的一题多解。提供各类解题的方法和技巧，开阔读者的解题思路，给出几种解法，以资对比，从中比较解法的优劣。

根据多年来从事高等数学教学过程中的积累，并搜集了报考工科院校研究生试题中的一些题目，以及其他书籍的题目汇编而成。所选题目，覆盖了高等数学的各个章节，题型多样，既包括了体现高等数学课程要求并有一定难度的基本题，又包括了一些难度较大、技巧性较强的综合题。每题一般给出两种解法，很多题有两种以上的解法，其中有部分题目提供五种以上的解法，一些解法较新颖，且有情趣。本书可供具有高等数学基本知识的工科院校学生学习高等数学时进一步提高解题能力使用，也可供报考工科院校研究生的青年同志复习高等数学时作参考。

全书共分十二章，分别为：函数与极限，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分与应用，空间解析几何和向量代数，多元函数微分法与应用，重积分、线积分，面积分，级数，微分方程。

本书编写过程中采用了部分书的题目和解法，谨向这些书的作者表示谢意。限于水平，编写时间仓促，本书的缺点和错误在所难免，恳请指正。

编　者

1990年1月

目　　录

一.函数与极限

计算极限，除了要熟练地运用有关极限运算法则、极限和无穷小量的关系以及初等函数的连续性外，还得掌握较多的方法和解题技巧及综合应用。

下面就我们在解题中所用到的几种主要方法介绍如下:

（一）单调性判别法

函数是否具有单调性，可以按其定义进行判别。但如果所讨论的函数具有导数时，利用导数来判别函数的单调性则有时显得简单有效。其方法:

设函数 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导，且在(a,b)内:

(1)若 $f'(x)>0$ 则函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上单调增加;

(2)若 $f'(x)<0$ 则函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上单调减少。

（二）有界性判别法

按定义证明函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有界，通常可用下面两种方法:

证法1: 若能找到一个正数M，使得对于所有的$x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leqslant M$。

证法2: 若能找到两个数m，M（设$m<M$），使得对于所有的 $x\in[a,b]$有 $m\leqslant f(x)\leqslant m$（其中 m，M 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的下界和上界。）

（三）利用有关公式求极限

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (|r|<1)$$

熟练应用这些公式，以求出部分和 S_n，按定义取极限。

（四）求和式极限的部分分式法

对于有些可以事先化为部分分式，求其部分和 S_n 时显得简单。

（五）利用极限存在准则

(1)如果 $y_n \leqslant x_n \leqslant Z_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} Z_n=a,$$

则数列 x_n 的极限存在，且有 $\lim_{n\to\infty} X_n=a$。

(2) 单调上升有上界的数列、单调下降有下界的数列必有极限。

（六）利用两个重要极限

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　　(2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

（七）利用等价无穷小

等价无穷小的定义：设 α、β 都是无穷小，如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称在某一确定趋向下 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha=0(\beta)$。

如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，就说 α 是比 β 低阶的无穷小。

如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$，就说 α 与 β 是同阶无穷小。

如果$lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，就说$\alpha$与$\beta$是等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$。

关于等价无穷小，有：设$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，

则$lim\frac{\beta}{\alpha}=lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

常用的等价无穷小有：当$x\to0$时，$sinx\sim x$，$tgx\sim x$，$arcsinx\sim x$，$arctgx\sim x$，$ln(1+x)\sim x$，$1-cosx\sim\frac{1}{2}x^2$，

$e^x-1\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}\sim1+\frac{x}{n}$

（八）利用级数法

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}x_n=0$，这个结论叫做级数收敛的必要条件。

此法往往对于有些数列的极限不易求出，如果可以把这个数列的通项改成是某级数的通项，而对此级数的收敛性的判别比较容易，则可由级数收敛的必要条件即可得出，只能对于极限为零的数列。

（九）定积分法

如果函数 f（x）在[a，b]上连续，则 f(x)在[a，b]上可积且成立下列二个等式：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{i(b-a)}{n}) \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}) \qquad (2)$$

利用 (1) 或 (2) 来计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$，这个方法叫做求极限的定积分法。

（十）斯笃兹方法

斯笃兹定理:设$\{y_n\}$是单调上升的且趋向于 $+\infty$的数列,而

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$(有限或 $\pm\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$。

（十一）化简分式或实行有理化的方法

此法的要点是分子、分母除以相同的式子，或对分子（或对分母，或分子、分母同时）实行有理化，以利于求极限。

（十二）变量代换法

对于有些极限，进行变量代换，使得极限过程简洁。

（十三）取对数法

如果函数（或数列）的极限比较难求，尤其对于那些幂指函数等。可以考虑先取对数，求出其极限，然后再求出原来函数（或数列）的极限，这种方法叫做取对数法。

（十四）展开法

利用台劳公式将函数展开后直接代入或经过变换后代入要求的极限式中，其作用在于将原来的极限转化为多项式或有理分式的极限问题。无疑，常用的基本初等函数的展开式应记住：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$Sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$Cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots+(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

（十五）利用导数的定义求极限

$$\lim_{\triangle x \to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} = f'(x)$$

（十六）利用微分中值定理求极限

在有时求极限过程中恰当地应用拉格朗日中值定理，会使极限过程更简单。

（十七）利用积分中值定理求极限

如果 f（x）在[a，b]上连续，g(x)在[a，b]上可积、并且不变号，则有 $\xi \in$（a，b），使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

（十八）罗必达法则

这是一种求不定式极限的比较有效的方法。这里指的是对$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$型的极限均可直接利用罗必达法则求极限。而对于其他形式：$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0型的未定型，应当把它简化为$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$型的未定型来计算。

1、设$f(sin\frac{x}{2})=cosx+1$　求$f(x)$，$f(cos\frac{x}{2})$

解法1:

$$\because f(sin\frac{x}{2})=cos(2\times\frac{x}{2})+1$$

$$=Cos^2\frac{x}{2}-Sin^2\frac{x}{2}+1=2(1-Sin^2\frac{x}{2})$$

令$u=Sin\frac{x}{2}$，得$f(u)=2(1-u^2)$

$\therefore f(x)=2(1-x^2)$

则$f(Cos\frac{x}{2})=2(1-Cos^2\frac{x}{2})=2Sin^2\frac{x}{2}$

解法2:

令$u=Sin\frac{x}{2}$　$x=2arcsinu$

$$\because f(u)=Cos(2arcsinu)+1$$

$$=Cos^2(arcsinu)-Sin^2(arcsinu)+1$$

$$=2[1-Sin^2(arcsinu)]$$

即$f(u)=2(1-u^2)$

因此，$f(x)=2(1-x^2)$

$$f(Cos\frac{x}{2})=2(1-Cos^2\frac{x}{2})=2Sin^2\frac{x}{2}$$

2、求证函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 在它的整个定义域里是有界的。

证法1:

定义域$(-\infty, +\infty)$

$\because x^2 \pm 2x+1=(x \pm 1)^2 \geqslant 0$

$\therefore x^2+1 \geqslant \pm 2x$

由$x^2+1 \geqslant 2x$，得：$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$，

由$x^2+1 \geqslant -2x$，得：$\frac{x}{x^2+1} \leqslant -\frac{1}{2}$，

$\therefore -\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$　　即$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{2}$

此即表示函数在整个定义域上是有界的。

证法2:

$\because \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1}=0$

$\therefore$存在$N>0$，使当$|x|>N$时，$\left|\frac{x}{x^2+1}\right|<1$

又$\because$在闭区域$[-N, N]$上，函数$y=\frac{x}{x^2+1}$连续，故有界。

$\therefore$存在$M>0$，使$|x| \leqslant N$时，$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leqslant M$

综上所述，对于定义在$(-\infty, +\infty)$上的任意x，均有

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leqslant M+1$$

即说明函数在定义域$(-\infty, +\infty)$上是有界的。

证法3:

$\because$ 函数$y=\dfrac{x}{x^2+1}$在定义域上

$$y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\begin{cases}>0 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ <0 & |x|>1\end{cases}$$

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $x=-1$ 时，取得最小值为$f(-1)$

$=-\dfrac{1}{2}$;在$x=1$时，取得最大值为$f(1)=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}$$

此表明函数在定义域$(-\infty, +\infty)$上是有界的。

3、求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{Sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

解法1:

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-Sin^2x}{x^2Sin^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+Sinx)(x-Sinx)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+Sinx}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-Sinx}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{Sinx}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-Cosx}{3x^2}\right)$

$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cosx}{x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sinx}{2x}=\dfrac{1}{3}$

解法2:

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - Sin^2 x}{x^2 Sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - Sin2x}{2xSin^2 x + x^2 Sin2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2Cos2x}{2Sin^2 x + 4xSin2x + 2x^2 Cos2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - Cos2x}{Sin^2 x + 2xSin2x + x^2 Cos2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2Sin2x}{3Sin2x + 6xCos2x - 2x^2 Sin2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4Cosx}{12Cosx - 12xSin2x - 4xSin2x - 4X^4 Cos2x}$$

$$= \frac{1}{3}$$

4、求 $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}arcCosx)^{\frac{1}{x}}$

解法 1：(对数法①)

令 $y = (\frac{2}{\pi}arcCosx)^{\frac{1}{x}}$，则 $lny = \frac{1}{x}[ln\frac{2}{\pi} + lnarccosx]$

$$\lim_{x\to 0} lny = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[ln\frac{2}{\pi} + lnarccosx]$$

$$= \frac{-1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\ arccosx}{1}} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore 原式 = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

解法2：(利用重要极限)

---

①对数法，对于那些求幕指数的极限往往是有效的。

$$原式=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\frac{2}{\pi}arccosx-1)\right]^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}arccosx-1}}\right\}^{\frac{\frac{2}{\pi}arccosx-1}{x}}$$

$$而\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}arccosx-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=-\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore 原式=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

5、求$\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$　　$(a>0,\ b>0,\ c>0)$

解法1：(利用重要极限)

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{3}]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\frac{xlna+xlnb+xlnc}{3})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+\frac{xln(abc)}{3}]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}[1+\frac{ln\sqrt[3]{abc}}{\frac{1}{x}}]^{\frac{1}{x}}=e^{ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$$

解法2：(对数法)

令$y=(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$.

则$lny=\frac{1}{x}[ln(a^x+b^x+c^x)-ln3]$

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[ln(a^x+b^x+c^x)-ln3]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x lna+b^x lnb+c^x lnc}{a^x+b^x+c^x}=\frac{1}{3}ln(abc)=ln\sqrt[3]{abc}$$

$$\therefore 原式 = e^{ln\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}$$

6、证明：$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}] = 0$

证法1：(夹值法)

$\because 0 \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leqslant \frac{n+1}{(2n)^2}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n)^2} = 0$

$\therefore$ 原式 $= 0$

证法2：(利用级数收敛，则其余项的极限为0)

考虑$P = 2$的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的。

则其余项 $R_{n-1} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} + \cdots$ 的极限为 0。

而$0 \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leqslant R_{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}] = 0$$

7、设$a_1 > 0$，$a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$　$(n = 2, 3, \cdots\cdots)$，

证明：此级数有极限，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

解法1：

$\because a_1 > 0$,

$$a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} = \frac{3(3+a_n)-6}{3+a_n} = 3 - \frac{6}{3+a_n} < 3$$

$\therefore 0 < a_n < 3 \quad (n = 2, 3, \cdots)$，数列$\{a_n\}$有界。

$$又 a_{n+1} - a_n = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} - a_n = \frac{3(1+a_n) - a_n(3+a_n)}{3+a_n}$$

$$= \frac{3-a_n^2}{3+a_n} > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

∴数列$\{a_n\}$单调增加。由极限存在准则，$\{a_n\}$极限存在。

令$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$[1]，对等式 $a_{n+1} = \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ 两边取极限，

得：$A = \dfrac{3(1+A)}{3+A}$

解此方程，得$A = \pm\sqrt{3}$

但$a_n > 0$，$\therefore A \neq -\sqrt{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$

解法2:

作辅助函数$f(x) = \dfrac{3(1+x)}{3+x}$，$x \in (0, 3)$

显然有$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$

当$x \in (0, 3)$时，$f'(x) = \dfrac{6}{(3+x)^2} > 0$

$\therefore f(x)$在$(0, 3)$上严格单调增函数，即$\{a_n\}$严格单调增。

---

[1] 只有在已验证到$\{a_n\}$单调有界时才能这样假设，否则不合理。