刘　耀　徐军民　陈知先

新编高等数学

兰州大学出版社

第一册

新编高等数学

第一册

刘 耀 徐军民 陈知先

兰州大学出版社

1988.7

内容提要

《新编高等数学》共三册。第一册主要为一元函数微积分、级数和简单微分方程；第二册是空间解析几何、多元函数微积分、微分方程(续)；第三册为线性代数。另编有配套用的《新编高等数学习题课教材》，书中有许多各种类型的例题和习题。全套教材可供理、工、文专业使用，也可作为其他专业师生或科技工作者的参考书。

本册首先引入极限概念，连续、级数敛散、导数、积分等概念也在此一并给出；接着是一元函数微积分，而将微分学和积分学对照讲授；然后讨论函数项级数与广义积分，最后介绍了简单微分方程的解法。

本册大约90学时可讲完，

新编高等数学

第一册

刘 耀 徐军民 陈知先

兰州大学出版社出版

(兰州大学校内)

甘肃静宁县印刷厂印刷 甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米 1/32 印张：11.125

1988年8月第1版 1988年12月第1次印刷

字数：234千字 印数：1—7000

ISBN7-311-00129-3/O.23 定价：2.79元

前 言

随着高等教育改革的深入和发展，高校的教材应不断更新。国内高等数学教本很多，但大多属于五十年代形成的体系。鉴此，我们几位多年从事高等数学教学的教师，吸取了某些国内外教材的优秀之处，特别是总结了自己的教学体会，编了高等数学讲义，在我校理科、文科几个专业试用，在广泛吸收了师生意见之后，又进行了修改，编写出了这套《新编高等数学》。

本书与现在国内通用的教材比较，有如下一些不同。

一、体系上有所不同。第一章通过实例提出极限问题，引用“过程”、“时刻”统一极限定，接着就介绍连续、级数敛散、导数、积分四个概念，把它们的某些性质作为极限的性质一次得到解决，并顺便介绍了数项级数的收敛判别法和连续函数的基本内容。第二章把一元函数的微分学与积分学对照着讲授；第三章讲广义积分和函数项级数。在多元函数微分学部分，用哈米顿算子统一处理梯度、散度与旋度，多元函数积分学中，引进可度量几何体上的积分，把定积分、重积分和线面积分统一了起来。常微分方程则拆成两章，放在不同部位讲授，并强调了模型、变换与解法。线性代数首先讲矩阵，用矩阵贯穿该部分的始终。

这种体系减少了重复，可节省学时；微分积分概念提前，便利了相关课的学习，加强了块块间的横向联系，使读者更易理解各部分的内在联系和内容的实质。

二、加强了解题能力的训练。本书除编写了例题、习题外，许多章节还有思考题、课堂讨论题与章末综合练习题。为配合全书还编写了习题课教材，书中有大量各种类型的例题和习题。题目难度上有不同层次，以基础训练为主，适当配有难度较大但从

解题方法上颇有启发性的题。对较难的题，书中给予提示或答案。我们认为这样安排有助于提高学生分析问题和解决问题的能力，加深对所学内容的理解。

三、附录编写了有关的数学史料，以提高读者对某些问题深入钻研的兴趣和对数学的思想发展的了解。

本教材还力求做到：

一、详略适当，重点突出。对重点内容通过讲授材料、课堂讨论材料、习题等以求理解得深透。次要部分则力求简要。比如对极限理论、积分计算、场论、矩阵等部分都有所加强。

二、为使教材能适应理、工、文等不同专业内容力求既有深度又有广度，对难度大的部分力求深入浅出，易于接受。学时少的专业可以略去带星号的部分而不影响对全书的学习。

三、力求文字简练，含义准确。

本教材数学分析部分（包含微分方程、空间解析几何）大致用180学时，线性代数用 60 学时左右。

在共同讨论的基础上，本书由以下几位同志分工编写。

一元函数的微积分与级数——刘耀、徐军民

多元函数的微积分和空间解析几何——杨风翔

常微分方程——陈知先、段炎伏

线性代数 ——刘义循、徐军民

习题课教材——刘　耀

数学史料——徐军民

本教材在编写过程中，得到了数学系领导的关心和支持，还得到了教务处、科研处、物理系等单位领导的支持，在此谨向他们表示衷心感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，不当和错误之处必然不少，欢迎批评指正。

兰州大学数学系

《新编高等数学》编写组

1988年3月

目　录

第一册

第一章　数学分析的基本概念……………………………………（1）
§1　函数……………………………………………………（1）
§2　几个基本问题……………………………………………（11）
（一）函数的连续性……………………………………（11）
（二）级数求和……………………………………………（12）
（三）曲边梯形的面积…………………………………（14）
（四）瞬时速度问题……………………………………（15）
§3　极限概念…………………………………………………（16）
（一）极限过程…………………………………………（16）
（二）极限的定义………………………………………（18）
（三）无穷小量与无穷大量……………………………（26）
§4　几个基本概念……………………………………………（32）
（一）函数的连续性……………………………………（32）
（二）级数的收敛与发散………………………………（36）
（三）导数…………………………………………………（38）
（四）积分…………………………………………………（40）
§5　极限的四则运算…………………………………………（45）
§6　极限的基本性质…………………………………………（55）
§7　极限存在的准则…………………………………………（63）
准则1　夹挤准则……………………………………………（63）
准则2　单调有界原理………………………………………（65）
*准则3　哥西收敛准则………………………………………（70）
§8　数项级数的收敛判别法…………………………………（74）

*§9 极限举例……………………………………………… (85)
§10 无穷小量与无穷大量阶的比较………………… (96)
综合练习……………………………………………………… (103)
附录一 实数的基本定理……………………………… (107)
第一章 框图………………………………………………… (108)
附录二 函数概念发展简介…………………………… (118)
附录三 极限概念产生、发展过程简介………………… (121)
第二章 一元函数的微积分 ……………………………… (129)
§1 导数与积分的关系 ……………………………… (129)
(一) 微分与积分的概念 ……………………… (129)
(二) 导数与积分的关系 ……………………… (135)
§2 导数与积分的基本公式 ……………………… (141)
§3 求导数与求积分的基本方法 ………………… (147)
(一) 乘积的导数与分部积分法 ……………… (147)
(二) 复合函数求导数与不定积分的换元法 …… (150)
(三) 参数方程确定的函数的导数及
高阶导数 …………………………………… (162)
§4 有理函数的积分法 ……………………………… (168)
(一) 分解真分式为部分分式 ………………… (168)
(二) 有理函数的积分 ………………………… (171)
§5 可化为有理函数积分的几类 ………………… (175)
(一) 三角函数的有理式 ……………………… (175)
(二) 某些无理函数的积分 …………………… (179)
(三) 二项微分式的积分 ……………………… (182)
积分综合练习题……………………………………… (187)
§6 定积分的分部积分法与换元法 ……………… (189)
(一) 分部积分法 ……………………………… (189)
(二) 换元积分法 ……………………………… (191)
§7 定积分的近似计算 ……………………………… (199)

§8 定积分的应用 …………………………………… (203)
(一) 平面图形的面积 ……………………………… (203)
(二) 体积 …………………………………………… (205)
(三) 曲线的弧长 …………………………………… (206)
(四) 曲率 …………………………………………… (209)
*(五) 力矩和重心的计算 …………………………… (210)
*(六) 在物理力学上的应用 ………………………… (212)
§9 微分中值定理及其应用 ………………………… (215)
§10 泰勒公式及其应用 …………………………… (228)
(一) 泰勒公式 ……………………………………… (228)
(二) 最大值与最小值 ……………………………… (233)
(三) 曲线的凹凸 …………………………………… (236)
综合练习 ……………………………………………… (242)
第三章 函数项级数与广义积分 ………………… (245)
§1 广义积分与级数的类比 ………………………… (245)
(一) 广义积分 ……………………………………… (245)
(二) 广义积分与级数的相似性 …………………… (249)
§2 Гamma函数与Beta函数 ………………………… (260)
(一) Гamma函数 …………………………………… (260)
(二) Beta函数 ……………………………………… (262)
§3 函数项级数 ……………………………………… (265)
§4 幂级数与泰勒级数 ……………………………… (274)
(一) 幂级数 ………………………………………… (274)
(二) 泰勒级数 ……………………………………… (280)
§5 傅里哀(Fourier)级数 ………………………… (288)
综合练习 ……………………………………………… (299)
第四章 简单的微分方程 ………………………… (302)
§1 基本概念 ………………………………………… (302)
§2 一阶方程 ………………………………………… (305)

(一) 两类最基本的方程 …………………………… (306)
1. 分离变量方程 ………………………………… (306)
2. 线性方程 ……………………………………… (307)
(二) 解一阶方程时变换的应用 ………………… (310)
1. 齐次方程 ……………………………………… (310)
2. 形如 $y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ 的方程…… (311)
3. 贝努里(Bernoulli)方程……………………… (312)
4. 黎卡提(Riccati)方程………………………… (313)
(三) 应用实例 ………………………………………… (314)
§3 二阶线性方程 ……………………………………… (321)
(一) 线性方程解的结构定理 ……………………… (321)
(二) 常系数线性二阶方程 ………………………… (322)
1. 齐次方程(3.4)的通解………………………… (323)
2. 非齐次方程(3.3)的特解——
待定系数法 ……………………………………… (326)
(三) 常数变易法 …………………………………… (330)
§4 高阶方程 …………………………………………… (333)
(一) 高阶常系数线性方程 ………………………… (333)
(二) 降阶法 ………………………………………… (334)
1. 几类特殊高阶方程的降阶法 ……………… (334)
2. 线性齐次方程的降阶 ……………………… (337)
(三) 尤拉方程 ……………………………………… (338)
(四) 应用实例 ……………………………………… (339)

第一章 数学分析的基本概念

§1 函数

事物总处于运动变化之中，研究事物应深入到从变化过程中考察事物的状态。例如研究卫星，首先得考察卫星的运行轨道，需知注意一个瞬时它处在什么位置，即位置的坐标和时间的依赖关系，而时间是个变动的量。从量的角度研究事物，变量就是第一个基本概念。然而变量这一概念晚到1637年才在笛卡儿(法国)的《几何学》一书中提到。正如恩格斯所说：就是由于有了变量，才在数学中引进了运动与辩证法。

变量就是指在过程中可以取不同数值的量，只取同一数值的量叫常量。比如客机从起飞到降落，飞行时间、高度、速度、飞出的距离、油箱中的存油量都是变量，飞机上的乘客数则是常量。为了方便，把常量看作变量的特殊情形，即在整个变化过程中只取一个值的变量。

事物之间相互联系是一条普遍规律。应该从事物的相互联系上去研究事物，例如研究炮弹在空间的运行，如果孤立地去考察炮弹的高度，不会得出多少有用的结果，需从高度与时间的依赖关系上去研究高度。变量之间有各种不同形式的联系；也可能几乎没有什么关系；也可能联系比较紧密，如人的身高和体重，市场某种商品的销售量和居民的平均收入，但这种联系还没有达到一个变量的值完全能决定另一个量的值的程度；一个变量的值就完全决定了另一个变量的值的情形，如圆的周长和半径，等速运动的路程和所经历的时间，这种完全确定的依赖关系称函数关系。函数是数学分析这门学科研究的基本对象，它是用来表达变量之间完全确定的依赖关系的数学概念。

定义 1：两变量 x, y，当 x 在实数域的某个范围（定义域）取一确定值时，y 有唯一的一个确定值与之对应（y取值的范围叫值域），则称y是x的函数，记为 $y=f(x)$、或 $y=\varphi(x)$，$f: x\to y$等。

在平面直角坐标系中，用横坐标表示自变量 x 取值，纵坐标表示因变量y取值，则满足$y=f(x)$的点(x, y)的轨迹叫该函数在直角坐标系 oxy中的图象。它可以形象地表现函数的概貌，如大家熟悉的正弦曲线，二次曲线等。

在中学所学数学中，大家已熟悉函数这一概念，并知道五类基本初等函数及其图象。这五类基本初等函数是：

幂函数：$y=x^2$

指数函数：$y=a^x$ $(a>0)$

对数函数：$y=\log_a x$ $(a>0)$

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg} x$等

反三角函数：$y=\sin^{-1}x$，$y=\cos^{-1}x$，$y=\operatorname{tg}^{-1}x$等

把这五类函数和数当作"元件"通过有限次加、减、乘、除四则运算和有限次复合函数运算，可以构造出一大类函数来，这个函数类统称初等函数。

例如$y=x^2\log_a(1+\sin^2x)-2^x$是初等函数。

因为它可看作x^2，$\log_a(1+\sin^2x)$，2^x 通过四则运算得到，而 $\log_a(1+\sin^2x)$又是 $\log_a u$，$u=1+\sin^2x$复合而得。

例如：$y=a_0+a_1\sin x+a_2\sin^2x+\cdots\cdots+a_n\sin^n x$，它是$\sin x$和常数通过四则运算得到的。

考察函数的定义，实质乃是两个数集——定义域与值域——之间的一种单值对应。定义域上一个数唯一地映射到值域上一个数。说这种对应是单值对应，而不说一一对应，是因为定义域上不同的数也可能对应值域上同一个数。例如函数 $y=x^2$，定义域是 $(-\infty, +\infty)$，而值域是$[0, +\infty)$，$x=1$时 $y=1$；$x=-1$时，函数值仍然是 1。如果值域上一个值，只有定义域上一个值

与它对应，这就是一一对应，例如 $y=x^3$ 就是 $(-\infty, +\infty)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 上的一种一一对应的函数。在定义域与值域一一对应的情况下，自然也可以说值域上一个值唯一对应定义域上一个值，这种映射是原来映射的逆映射，相应函数的用语就是原来函数的反函数。

可以看出函数的两大要素是对应关系和定义域，如果对应关系不同，或定义域不同就是不同的函数；如果定义域相同，对应规则也相同的两个函数应该视为同一个函数。

例如 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的定义域和值域都相同，但对应关系不同，是不同的函数；

例如 $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域相同，但对应规则不完全相同（$x\geqslant 0$ 时相同，$x<0$ 则不同）。是不同的函数；

例如 $y=x$，和 $y=(\sqrt{x})^2$，定义域不同，故是不同的函数；

例如 $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，定义域和对应关系都相同，因此是同一函数，只是表示的形式有差别而已

函数是很广泛的概念，因为两个集合之间的对应规则可以是多种多样的，不能把函数理解为只是初等函数。

例1 x 的符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ -1 & \text{当 } x<0\\ 0 & \text{当 } x=0\end{cases}$$

符号函数的定义域是全体实数 $(-\infty, +\infty)$，值域只包含三个元素，是 $\{1, -1, 0\}$。这个函数是判断自变量的符号，是正数？负数？还是零？所以叫符号函数。这个函数不仅在数学分析中用到，在微机里是作为标准函数使用的，有专门的程序可供调用。利用这个函数，有如下关系：

$$|x|=x\operatorname{sgn}x. \qquad |f(x)|=f(x)\cdot\operatorname{sgn}f(x)$$

例2 取整函数 $y=[x]$

$\lfloor x \rfloor$表示不大于x的最大整数，例如$\lfloor 3 \rfloor = 3$；$\lfloor 3.15 \rfloor = 3$，$\lfloor -2.7 \rfloor = -3$

（符号 $\lfloor x \rfloor$ 表示超过x的最小整数，例如$\lceil 3.15 \rceil = 4$，$\lceil -2.7 \rceil = -2$；符号(x)表示x的小数部分，例如$(3.15) = 0.15$，$(-2.7) = 0.3$ 即$-3+0.3$，可见 $(x) = x - \lfloor x \rfloor$）

取整函数也是微机中的标准函数，因此，计算机"懂得"取整。比如让计算机把3.14159按四舍五入原则取四位小数，变成3.1416。但计算机不懂四舍五入，取几位小数之类的话。我们可按下列运算顺序编成程序让计算机去做。

$$\lfloor 3.14159 \times 10^4 + 0.5 \rfloor \div 10^4 \qquad (=3.1416)$$

这两个例子，函数的图象如下：

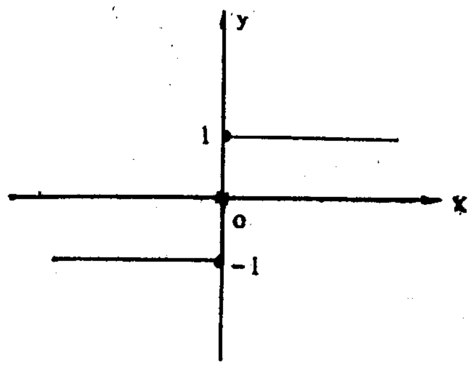

图 1.1 y=sgnx

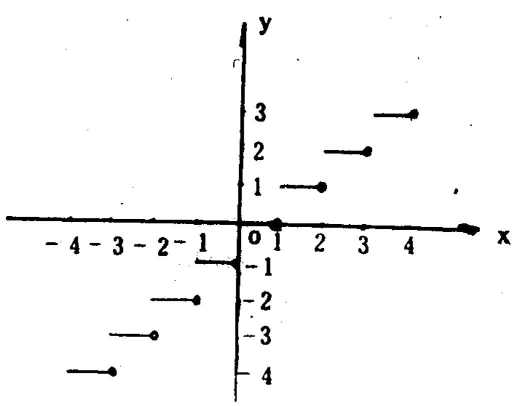

图 1.2 $y = \lfloor x \rfloor$

有些函数在实践中可能碰不到，但在理论上有一定的意义，尤其是作为反例，推翻某个不正确的断言有用。比如"函数的图象总是一段、几段以至无穷段曲线"这一结论。对绝大多数函数这一结论都是对的，但对函数的全体讲，这一结论不成立。

例3 狄里赫策函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$

这一函数把实数域上的有理数都映射到1，无理数都映射到0，它符合函数的定义，但在平面直角坐标系里它的图象却不是曲线段所能表示的。类似此例可构造出很多奇特的函数，

例如 $y=\begin{cases}x^2 & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ -x^2 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$

$$y=\begin{cases}\sin x & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ -\sin x & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

单值函数图象的特点是平行y轴的直线与图象最多只能交一个点，例如

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{当}x\geqslant 0\\ -1-x^2 & \text{当}x<0\end{cases}$$

其图象如图1.3

反之，在直角坐标系中，一段，几段以至无穷段曲线，若符合"平行y轴的直线与它最多交一个点"这个条件，这个曲线就是某函数的图象，也可以说它就表示一个函数。

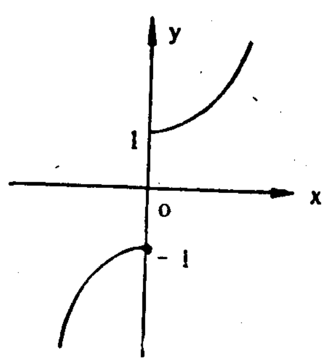

图 1.3

例如图1.4画出的曲线，分段考察，它就是函数：

$$y=\begin{cases}-1 & \text{当}x<-1\\ -x & \text{当}-1\leqslant x<1\\ x & \text{当}x\geqslant 1\end{cases}$$

的图象

例4：河床某断面如图1.5所示，河床深度y为位置坐标x的函数。

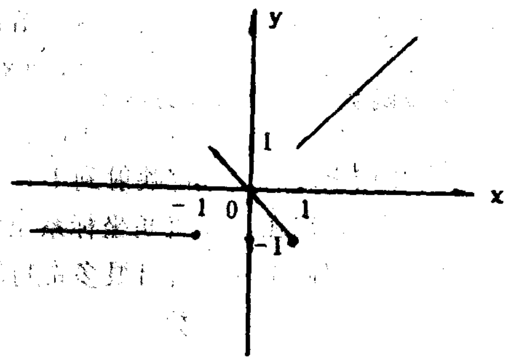

图 1.4.

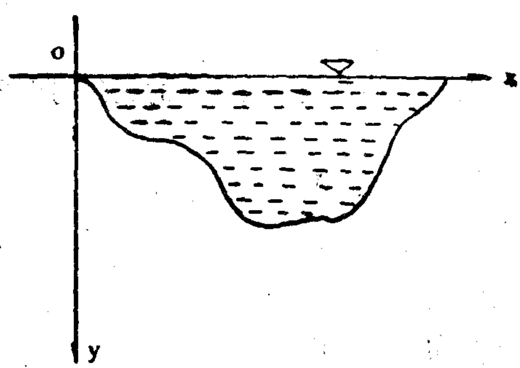

图 1.5

实践中很多函数是通过曲线段表示的。如温度自动记录器记录下温度是时间的函数就是一段曲线；炼油厂控制室测某炼油塔内的温度，压力与时间的关系都是曲线。要想把这些曲线都用某个运算公式精确地表示出来，是不现实且不必要的。图象实际上是函数的一种表示法，称图示法；列表也是一种表示法，如对数表，三角函数表，叫列表法；用某个运算公式表示的函数，如$y=\sin^2x-x^2+2$，叫分析表达式法，它的优点是便于数学上处

理，如进行四则运算或分析运算（求导、求积等）。

上面讲的是一元函数，自变量只有一个。实践中常碰到多个自变量的情形，例如长方体的体积 v 是长 x，宽 y，高 z 的函数：$v=xyz$；气体体积 V 是压力 P 和温度 T 的函数：

$$V=\frac{RT}{P} \quad (R\text{是常数})$$

给 x、y、z 一组值，变量 v 有唯一确定的值与之对应，称 v 是 x、y、z 的三元函数，记为 $v=f(x,y,z)$，或 f：$(x,y,z)\longrightarrow v$

在三维空间中看，一组有次序的数（x、y、z）可看作三维空间的一个点。三元函数 $v=f(x,y,z)$ 乃是三维空间某点集（定义域）与实数的一个集（值域）之间的单值对应。实数可看作一维空间（直线）的点。一元函数 $y=f(x)$ 是一维空间的点集与实数集之间的单值对应；二元函数 $u=f(x,y)$ 可看作二维空间（平面）的某点集与某实数集之间的单值对应。拓广空间概念，把一组有次序的 n 数组（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）看作 n 维空间的一个点（例如火箭在空间运行，在时刻 t 的状态要由时间、位置的三个坐标、速度的三个坐标、质量八个数据来刻划，可看作 8 维空间的点），全体这种点构成 n 维空间。在 n 维空间中，若规定两点。

$M_1=(x_1,x_2,\cdots x_n)$，$M_2(y_1,y_2\cdots\cdots y_n)$ 的距离为

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

则此空间称为 n 维欧几里德空间，一般用 R^n 表示。

n 维空间中某点集与实数域的某子集之间的单值对应，叫 n 元函数，记为 $y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$

例如 $y=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 就是一个 n 元函数。

若把定义域上的点记为 P，值域上的实数记为 u，则函数可统称“点函数”，记为 $u=f(P)$ 或 f：$P\to u$

思 考 题

1．数列 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\cdots\cdots$ 可否看作函数？

2. 两函数，如果定义域相同，对应关系也相同，其值域是否必相同？若定义域相同，值域也相同，其对应关系是否一定相同？

3. 下面图象，你能写出该函数分段的分析表达式吗？

此曲线只画出部分，$f(\frac{1}{n})=(-1)^{n-1}$，（$n=1,2,\cdots\cdots$），

$f(-\frac{1}{n})=(-1)^{n}$，中间都是用直线段连接起来的。

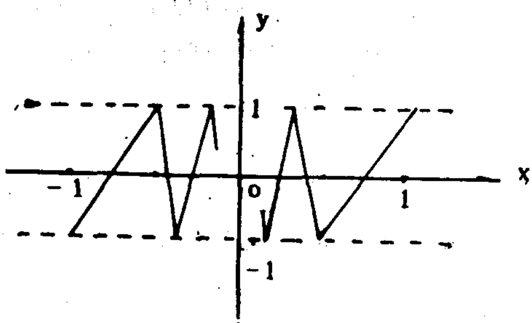

图 1.6

课堂练习题

一、讨论双曲函数的图象及其与三角函数的类似公式

$$\text{sh}x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}),\quad \text{ch}x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}),\quad \text{th}x=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$$

二、讨论双曲函数的反函数，得出：

$$\text{sh}^{-1}x=\ln\ (x+\sqrt{1+x^{2}}),\ \text{ch}^{-1}x=\ln\ (x\pm\sqrt{x^{2}-1})$$

$$\text{th}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

三、讨论复合函数

1. 把 $y=\lg(2+\sin x)+2^{x\lg x}$ 拆成基本初等函数的四则运