代数习题类型和解法

高考复习参考丛书

高考复习参考丛书

代数习题类型和解法

王志亭　孙金铭　苏继昌

甘肃人民出版社

·高考复习参考丛书·
代数问题类型和解法
王志宇　孙全[illegible]　苏[illegible]编
甘肃人民出版社出版
（兰州庆阳路230号）
甘肃省新华书店发行　兰州新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1／32　印张7.75　字数1[illegible],000
1979年9月第1版　1979年9月第1次印刷
印数：1——100,000
书号：13096·45　定价：0.62元

出版说明

《高考复习参考丛书》是为了帮助参加高考的青年复习时参考用的，也可作为在校高中学生课外阅读和社会青年自学的参考读物。

这套丛书，主要是根据教育部新编中学各学科教学大纲（征求意见稿）的要求，并参考近两年来全国高考复习大纲和全国高考试题而编写的，将按高中各学科分政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语等几个方面分册陆续编辑、出版。在编写体例上，有的本子以解题为主；有的本子则以讲述基础知识为主，附有部分题解。

我们编辑、出版这类读物还缺有经验，缺点和错误在所难免，希望广大读者提出指正意见，以便不断修改，使其日臻完善。

前　　言

本书以教育部中学数学教学大纲（草案）中所列的代数课的内容为依据，把现行初高中代数课程的内容综合在一起，并参考历年全国高考试题的侧重点，按学习顺序将其整个习题分成九大部分加以介绍，可供高中毕业生、知识青年和中学生复习参考之用。

本书在编写过程中，根据编者的教学实践，在每一部分中均尽量选择具有典型性的习题，并给予较详细的解答或证明，试图通过这种方式介绍解题的一般步骤和方法，以帮助读者巩固代数的基本概念，进一步提高分析习题的能力和解题技巧。

由于我们的思想和业务水平低，特别是本书的编写方法是否恰当，对书中存在的缺点和错误，希广大读者批评指正。

编　者

1979年2月

目　录

一 数的概念

数的概念及其发展是中学数学的基础知识之一。各种数的概念、性质及其运算是我们必需熟悉和掌握的，而实数集合尤为重要．因为方程和不等式的解的集合，函数的定义域和值域，曲线上点的坐标，几何体的面积和体积等，都是在实数集合内讨论的．实数的连续性和有序性，使实数与数轴上的点形成一一对应的关系，从而使数与形统一起来，奠定了解析几何和微积分学的基础．

下面的数系表可以使我们了解各种数的集合和它们之间的从属关系．

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（正、负）
        - 有限小数
        - 无限循环小数
    - 无理数（正、负）—无限不循环小数
  - 虚数 $(b\neq 0)$

1 实数

题1 什么叫质数？什么叫合数？

答 除1以外的自然数中，只能被1和这个数本身整除的数，叫做质数（也叫素数）。如2、3、5、7、11、……

不但能被1和它本身整除，还能被其它数整除的自然数，叫做合数．如4、6、8、9、10、12、……

1既不是质数，也不是合数，叫做单位1．

题2 把360分解为质因数的连乘积．

解 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$．

注意 1．相同的因数要写成乘方的形式．

2．分解质因数与整式的因式分解的意义相同．合数分解成质因数时只能得到唯一的结果．

3．利用分解质因数的方法，可以求几个数的最大公约数和最小公倍数，并且其方法也和代数式的完全一样，这是应当注意的．

4．分解质因数只是对整数而言，对分数就不能说分解质因数．

题3 求168、84、180的最大公约数和最小公倍数．

解 ∵ $168 = 2^3 \times 3 \times 7$，

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$，

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$；

它们的最大公约数是 $2^2 \times 3 = 12$，

它们的最小公倍数是 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$．

注意 1．最大公约数的求法：相同的因数要指数最小的，不同的因数不要．代数式的最高公因式的求法与此相同．

2．最小公倍数的求法：相同的因数要指数最大的，不同的因数全要．代数式的最低公倍式的求法与此也相同．

题4 哪些分数可以化为有限小数？哪些分数可以化为

无限循环小数？

答　分母只含有2或5，或者同时含有2和5作为因数的分数，都可以化为有限小数.

如　$\frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}=0.5$,

$\frac{3}{5}=\frac{3\times 2}{5\times 2}=\frac{6}{10}=0.6$,

$\frac{3}{2\times 5}=\frac{3}{10}=0.3$,

$\frac{7}{2^2\times 5}=\frac{7\times 5}{2^2\times 5^2}=\frac{35}{100}=0.35$.

分母若含有2或5以外的因数的分数，在化为小数时，都得到循环小数.

如　$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{6}=0.1\dot{6}$,

$\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$,

$\frac{8}{3\times 5}=\frac{8}{15}=0.5\dot{3}$.

题5　怎样把循环小数化成分数？

解　①纯循环小数化成分数.

例如，把$0.\dot{1}8\dot{9}$化成分数.

$$0.\dot{1}8\dot{9}\times 1000=189.189189\cdots\cdots \quad (1)$$

$$0.\dot{1}8\dot{9}=0.189189\cdots\cdots \quad (2)$$

(1)－(2)　$(1000-1)\times 0.\dot{1}8\dot{9}=189$,

$\therefore$　$999\times 0.\dot{1}8\dot{9}=189$,

$\therefore$　$0.\dot{1}8\dot{9}=\frac{189}{999}=\frac{7}{37}$.

法则：把纯循环小数化成分数，就是把一个循环节的数字作分子，循环节有几个数就用几个9作分母。

②混循环小数化成分数。

例如，把$0.26\dot{3}7\dot{5}$化成分数。

$$0.26\dot{3}7\dot{5} \times 100000 = 26375.375375\cdots\cdots \quad (1)$$

$$0.26\dot{3}7\dot{5} \times 100 = 26.375375\cdots\cdots \quad (2)$$

(1)-(2)

$$0.26\dot{3}7\dot{5} \times (100000-100) = 26375-26,$$

$$\therefore \quad 0.26\dot{3}7\dot{5} \times 99900 = 26375-26,$$

$$\therefore \quad 0.26\dot{3}7\dot{5} = \frac{26375-26}{99900}.$$

法则：混循环小数化成分数，就是以第二个循环节前的数字减去非循环的数字作分子，循环节有几个数字就写几个9，非循环的数字有几个就在9的后面添上几个0作分母。

题6　什么叫有理数？

答　正、负整数，零，正、负分数总称叫做有理数。

又因一切整数都可以看做分母是1的分数，一切有限小数和无限循环小数都可以化成分数，所以有理数又可以定义为：能用分数表示的数叫有理数。

题7　求绝对值大于3而小于100的所有整数的和。

解　因绝对值大于3而小于100的所有整数是：

± 4，± 5，± 6，……，± 99.

故它们的和是0。

题8　什么叫无理数？写出一个非根式的无理数。

答　无限不循环小数叫做无理数。如$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、π、$\lg 3$、$\sin 10^\circ$、$\sqrt[3]{2}$、……都是无理数。

要作一个无理数，可以根据定义作成一个无限的并且不循环的小数就行了．如

0.121221222……，

2.8373773777……．

都是无理数。

注意 要作成无理数，只要在两个相同的数字之间（如上例中的1与1之间，3与3之间）依次增加某一个数字的个数，用以保证这个数是不循环的并且是无限的。

题9 求证$\sqrt{2}$不是有理数。

证 （1）因为$1^2<2<2^2$，所以任何整数的平方不等于2。

（2）用反证法：

假设$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$可以表示成分数，即$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$（其中m，n是正整数，且m、n互质）

$$\therefore\quad 2=\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{n^2}{m^2}，\text{即}\quad n^2=2m^2．$$

这说明n^2是偶数，即n是偶数。

设　$n=2p$．

那么　$4p^2=2m^2$，$2p^2=m^2$，

这说明m也是偶数。

这样，m、n都是偶数，与m、n互质的假设相矛盾．因此$\sqrt{2}$不是有理数。

注意 仿此可以证明$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等也不是有理数。

题10 在数轴上记出表示$\sqrt{2}$、$-\sqrt{3}$两数的点。

解 根据勾股定理，

∵ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$-\sqrt{2^2-1^2}=-\sqrt{3}$,

∴ 表示如下图。$OA=\sqrt{2}$，$OB=\sqrt{3}$。

即C、D两点分别表示$\sqrt{2}$和$-\sqrt{3}$。

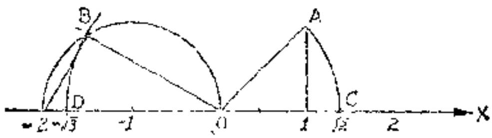

图 1—1

注意 本题说明$\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$这样的无理点是很多的，即有理数点有稠密性，但不具有连续性，它与数轴上的点不能建立一一对应的关系。只有把有理数扩大到实数以后，实数与数轴上的点才能建立一一对应的关系，所以实数是连续的。

用这个题的方法，我们还可以在数轴上描出表示$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$、$\sqrt{5}-\sqrt{3}$、……等数的点。

题11 计算$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}$，其中$x$是任意实数。

解 $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}=|x-2|+|x-9|$,

式中2和9将全体实数分为三部分。

∴ 当$x\leqslant 2$时，

原式$=-(x-2)+[-(x-9)]=-2x+11$;

当$2<x<9$时，

原式$=x-2-[-(x-9)]=7$;

当$x\geqslant 9$时，

$\therefore$ 原式 $= x-2+x-9=2x-11$.

注意 1.本题的计算（或化简）要首先掌握算术根和绝对值的概念。

2.本题的计算与作函数 $y=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-9)^2}$ 或 $y=|x-2|+|x-9|$ 的图象有直接的关系。请读者务必领会这一实质性的问题。

题12 把 $\sqrt{5}$ 表示成无限连分数。

解 利用恒等式

$$(\sqrt{m^2+1}-m)(\sqrt{m^2+1}+m)=1 \qquad (1)$$

当 $m=2$ 时，则有

$$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=1,$$

$$\therefore \quad \sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}$$

对等号右端分母中的 $(\sqrt{5}-2)$，再代以

$$\sqrt{5}-2=\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \sqrt{5}-2=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}},$$

$$\therefore \quad \sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}},$$

继续用（2）式代替最末一个分母的括号中的数，就得到一个无限连分数。

$$\therefore \quad \sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots\cdots}}}$$

注意 上面所用的方法是以恒等式（1）为根据的。此法

并不能适用于一切无理数$\sqrt{a}$，只适用于当整数a可以表示为$a=m^2+1$（m是非零的整数）的情况。当$m=1$、2、3、4时，可得到$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{17}$的展开式。有的不尽根式，可用其它的恒等式。

题13 设$a_3a_2a_1$是一个三位数，且$a_3>a_1$，$a_3a_2a_1$减去$a_1a_2a_3$又得到一个三位数$b_3b_2b_1$，$b_3\geqslant 0$.试证明：$b_3b_2b_1+b_1b_2b_3=1089$。

证 $\because$

$$\begin{array}{r} a_3a_2a_1 \\ -\,a_1a_2a_3 \\ \hline b_3b_2b_1 \end{array}$$

又 $a_3>a_1$，所以在个位数相减时a_1需借位。

$\therefore$ $b_1=10+a_1-a_3$， (1)

$b_2=10+(a_2-1)-a_2=9$ (2)

$b_3=a_3-1-a_1$ (3)

由(2)知 $b_2=9$。

又(1)+(3)得

$$b_1+b_3=10+a_1-a_3+a_3-1-a_1=9.$$

$$\therefore \begin{array}{r} b_3b_2b_1 \\ +\,b_1b_2b_3 \\ \hline 1\,0\,8\,9 \end{array}$$

问题得证。

2 复数

$i=\sqrt{-1}$叫做虚数单位，虚数单位i与实数的乘积叫做纯虚数。

$i^2=-1$。且i有下列性质。

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=i^2=-1,$$

$$i^{4n+3}=i^3=-i.$$

形如$a+bi$的数叫做复数（其中a、b都是实数）。

在$a+bi$中，

当　$b=0$时，$a+bi$是实数，

当　$b\neq0$时，$a+bi$是虚数，

当　$a=0$，$b\neq0$时，$a+bi=bi$是纯虚数，

当　$a\neq0$，$b\neq0$时，$a+bi$是混合虚数。

复数是实数和虚数的总称。

表示复数的平面叫做复平面。

在复平面上，复数与平面上的点有一一对应的关系。

$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$叫做复数的模数（或绝对值）。实际上，它就是复平面上$a+bi$的对应点到原点的距离。

（1）复数的三角函数表示法（图1—2）：

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中$r=\sqrt{a^2+b^2}$，θ叫做幅角，θ可以由下面两个式子决定。

$$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

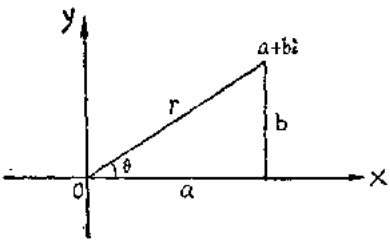

图　1—2

（2）复数的运算

复数代数式的运算适合于一般代数式的运算。

复数三角函数式的运算，有下面的公式：

若 $a+bi=r_1(\cos\theta_1+\sin\theta_1)$,

$c+di=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$.

则 $(a+bi)(c+di)$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$,

$(a+bi)\div(c+di)$

$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

若 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

则 $(a+bi)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$〔棣美弗定理〕.

$(a+bi)$的n次方根有n个:

$$a_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$k=0, 1, 2, \cdots, (n-1)$.

题14 计算

(1) $1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$;

(2) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$; (3) $\frac{5-3i}{1+i}$;

(4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

解 (1)原式$=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}=0$;

(2) $\because$ $r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$,

$\cos\theta=\frac{a}{r}=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ θ的主值是$\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

$\therefore\quad \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{12}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{12}$

$=\cos\frac{24\pi}{3}+i\sin\frac{24\pi}{3}=1;$

（3） $\frac{5-3i}{1+i}=\frac{(5-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{5-3i-5i+3i^2}{2}=\frac{2-8i}{2}=1-4i.$

（4） $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$

$=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\quad(k=0,1,2)$

$\therefore\quad \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ 有三个值，它们分别是

$\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$，$\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}$，

$\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}$。

注意 在复数集合里，一个数的n次方根有n个值。

题15 计算$(1+i)(-1+\sqrt{3}i)$。

解1 $(1+i)(-1+\sqrt{3}i)$

$=-1-i+\sqrt{3}i-\sqrt{3}$

$=-1-\sqrt{3}+(-1+\sqrt{3})i;$

解2 若用三角函数式进行计算，则有

$(1+i)(-1+\sqrt{3}i)$

$=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\cdot 2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$