

SPT 21世纪高等院校教材

工科类

量子力学

张永德 编著

科学出版社

21 世纪高等院校教材

量 子 力 学

张永德 编著

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书集中讲述非相对论量子力学,内容新颖,阐述清楚,分析深入,针对性强;主要包括量子力学的物理基础、薛定谔方程、一维问题、中心场束缚态问题、量子力学表象与表示、对称性分析及应用、电子自旋、定态微扰论、电磁作用分析及应用、势散射理论、含时问题与量子跃迁、量子信息论物理基础。

本书适合各物理专业教师及研究人员参考,同时,由于书中已针对不同学时,给出了三种不同的选用方案,也适合作为物理类本科生及研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学/张永德编著. —北京:科学出版社,2002

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-010021-2

I. 量… II. 张… III. 量子力学 IV. 0413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 004330 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源 海 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2002年3月第一次印刷 印张:28

印数:1—3 000 字数:543 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前 言

到 19 世纪末,经典物理学的两大支柱——牛顿力学和电磁波理论(包括光学)取得了辉煌的成就.经典物理学巨大成就的灿烂光芒,眩惑了人们的眼睛.原本对立的粒子和波这两种概念,被普适化、绝对化了.与此同时,牛顿力学和波动力学的描述方法也被普适化和绝对化了.仿佛物理学所研究的全部对象必定非此即彼.与此相应,拉普拉斯决定论也被普适化和绝对化起来,成了因果论的惟一正确形式,用 Einstein 的话来说就是:“上帝是不玩掷骰子的”.

当然,这句话并非 Einstein 观点的论据,只能说表达了他的信念.但至少到目前为止,人们可以说,这是一种混入了主观推测的信念,现实物理世界并非如此.正如 Bohr 所说,人们能有什么“根据”去肯定“上帝”是“不玩掷骰子”的呢?就凭经典物理学和拉普拉斯决定论的巨大成就吗?这显然是一种含有主观成分的外推、一种不可靠的根据.因为经典物理学(以及和它相伴的拉普拉斯决定论)在取得辉煌成就的同时,也有着极大的局限性.牛顿力学(包括后来建立的相对论力学)只局限于研究物体在其外在时空中的机械运动,并没有涉及物体的物质结构、物质的内禀属性;而光学(包括后来的电磁波理论)只局限于研究光的传播,并没有真正涉及光的产生和吸收、光和物质相互作用的机制.经典物理学一旦超出原先范畴,进入这些新领域,就显得捉襟见肘、漏洞百出.就在经典物理学处于巅峰的 19 世纪末,也已经发现许多无法用经典物理解释的现象.比如, Becquerel 发现的放射性现象、黑体辐射中的紫外灾难、光电效应等等.虽然它们仅仅是当时经典物理学万里晴空中远在天边的几朵乌云,但预示着暴风雨即将来临.

话说回来,人们经常习惯于根据已有的知识和经验去思考新问题、理解新现象.尤其当现有理论已经取得辉煌成就的情况下,更是如此.也正因为这样,这时的理论也常常会转化成无形的“囚笼”,束缚或钝化人们的创造性思维.不幸的是,这种对思想的束缚或钝化作用经常是习惯性的、不自觉的,因而也就是不易挣脱的.所以,量子力学的初学者,在从经典物理学过渡到量子物理学的时候,必须善于剖析自己从宏观日常经验中积习起来的观念,善于从经典物理学这种“囚笼”中挣脱出来,依照新的实验事实所指引的方向,利用逻辑思维

前进.新的实验事实是医治人们物理思想僵化的特效药方;逻辑思维是帮助我们前进的惟一可靠工具.两者相结合,才是正确指引我们前进的灯塔,才是肯定、修正或否定新旧物理理论的惟一裁判.其中,实验检验又是肯定、修正或否定新旧理论的最高和最后的裁判.

当今的量子理论已经发展成为庞大的理论群体.不夸张地说,量子理论是物理学家迄今为止所建立的最宏伟的物理理论.它博大精深、包罗万象,小至夸克和胶子的量子色动力学,大至宇宙的早期理论,无所不在,已经取得了前所未有的辉煌成就.

正如在经典物理学辉煌成就面前,不应当目眩神夺一样,在量子理论辉煌成就面前,也应保持清醒的头脑.目前的量子理论仍然不是人类追求的最终真理.从量子理论诞生的时刻起,成功和困难就像人的躯体和影子那样,一直相伴相随:成功的躯体越长越高大、越雄伟,困难的阴影也愈来愈浓重、愈清晰. Dirac 在评论这些困难时说,人们期盼建立一个更基本的理论,而这将需要我们基本观念上的某种巨大的变革^①.

量子力学与其后继课程——高等量子力学、量子散射理论、有限自由度系统量子理论、量子统计、量子场论、固体量子理论等联系紧密、逻辑相承、几乎浑然一体.因此,常常遇见“打通”与后继课程的界限,简单地引入一些后继课程内容的做法.但本书取材仅限于非相对论量子力学范畴,只限于阐述这一范畴的基本原理、基本内容和重要应用.书中也常有进一步的分析讨论,那只是“就地”深入,并不涉及繁难的数学运算和进一步的理论阐述,尽量不用后继课程的内容和做法.即便个别处采用了,也已显著减少了其数学的繁难程度.特别是,本书不涉及相对论量子力学.尽管它的数学形式优美,不少结果也很有用.我觉得,如其将这部分内容纳入量子力学,不如将它作为预备知识归入量子场论更为合适.这是由于相对论量子力学的前提假设中隐含着逻辑矛盾——微观粒子力学理论与相对论性能量的矛盾.微观粒子力学理论的前提是粒子数守恒,而相对论性能量却使粒子之间的转化成为可能——导致粒子数不再守恒.由于前提中内在的逻辑不自洽性,使得相对论量子力学变成一个不稳定的、过渡性的理论.只有继续向前,彻底贯彻量子逻辑,为了与相对论性高能量相匹配而解除粒子数定域守恒的限制,考虑粒子真正的(不算以产生、湮没算符表示能级跃迁的情况)产生、湮没和转化,走向量子场论,才能克服由这种前提矛盾造成的一些根本性的理论缺陷.舍去相对论量子力学有关内容之后,本书便维持了量子力学作为微观粒子的力学理论在逻辑上的自洽性.

^① P. A. M. Dirac, *Methods in Theoretical Physics*, included in “from a life of physics”, World Scientific, 1989.

自转入中国科学技术大学从教 20 多年以来,我一直从事近代量子理论方面的科研和教学工作,长期教授物理系本科生的量子力学以及理论物理专业研究生的一些后继量子理论课程,本书便是在这一教学和科研背景下,在所编写的量子力学讲义基础上,历经多次较大修改,最后定稿而成。

写这本书时,从内容选择和阐述侧重上我想尽力实现以下三点想法:一,偏重物理思想的阐述和论证、物理内涵的挖掘和剖析,以求得对量子力学原理有较好的领悟.与此同时,数学推导则力求清楚而简洁.前者比如,波粒二象性和量子力学一些基本特征之间的内在逻辑关联、对一维问题总结的四个定理、全同性原理内涵的剖析、开放系统对封闭系统的三方面发展等.后者比如,么正变换和 Dirac 符号的详细推算、磁场下原子谱线分裂的统一处理、直流交流和磁 Josephson 效应的统一叙述、带自旋的 Born 近似等.二,尽量包容一些最新的进展.量子力学作为一门基础性的理论课程,老面貌的更新比较困难.本书根据近代文献和我个人的体会,尽可能以深入浅出的方式做这方面的工作.比如,相干态及有关问题、非惯性系量子力学、AB 效应及相关问题、中子干涉量度学介绍、Casimir 效应的简单推导、汤川力的物理来源、量子 Zeno 效应及其存在性证明、含时振子求解、量子信息论的物理基础等.三,叙述中注意做到封闭与开放相结合.在展示量子理论优美、力量和逻辑自洽性的同时,不回避问题,尽量随时指出问题的开放的一面,指出目前认识的边界所在,以便明了对该问题认识的局限性、处理方法的近似性,增进对量子理论内在困难的了解.这既有助于加深对现有内容的理解,又能活跃思想,尽量不使量子力学僵化成为新的教条,不成为束缚人们思维的新“囚笼”.比如,非相对论量子力学的局限性、无限深方井问题的争论、Dirac 符号的局限性、Born 近似适用条件讨论、量子理论内在逻辑自洽性分析、封闭系统的局限性等.同时也尽量指明有关文献,供使用者进一步思索时参考.但限于传统的教材内容以及本人的能力和经验,真正做好这三点却是困难的.书中在材料取舍、编排和叙述上的偏颇、不当甚至错误都会存在.在此敬请指正.

这是一本关于非相对论量子力学的参考书,也是一本教材.它既可以供有关专业的教师和研究生使用,也可以用于综合性大学物理系和相近各系本科生的教学.若从后一角度着想,本书在内容分量上约略超过一学期 76 学时传统教材的 30% 左右.这样做基于两点考虑:其一,为教师备课和研究生辅导复习时拓宽思路之用;其二,为讲课教师提供适量多余的讲授和讨论的内容,视授课对象和教学方案作适当的选择,也为少数有余力的学生提供一点在量子力学层次上驰骋的场合.这些超过分量的章节均用“※”标记,按通常教学,略去不讲并不损及我们惯常对量子力学的传统理解.与此同时,作者已将全部内容分为三个部分,即:量 I——基本内容;量 II——进一步内容;量 III——含时

问题和最新应用. 这里, 无“※”号的量Ⅰ为 60 学时所必须的内容; 无“※”号的量Ⅰ加上量Ⅱ是 76 学时所必须的内容, 量Ⅲ以及全部带“※”号的部分则是选学内容. 这些教案可视情况选用. 习题的分量也有所超过, 可以选做其中一部分. 应当指出, 过去传统苏联教材的习题多偏重于基础知识的巩固、基本功的训练和数学技巧的演练. 这当然是必要的, 但仅有这些却是偏颇的. 因此, 从我校出版社出版的《美国物理试题与解答》的量子力学卷, 选用了部分美国著名大学的量子力学试题. 这些试题往往偏新颖、偏应用、偏物理. 我认为, 将两方面适当结合起来会更全面一些. 部分习题是我依据内容自拟的.

最后, 我感谢全国高校量子力学研究会的许多同行好友: 喀兴林、曾谨言、柯善哲、倪光炯、葛墨林等教授, 从他们的多次切磋琢磨中, 颇多受益; 裴寿镛教授还用本书初稿在北京师范大学试讲过. 我还感谢潘建伟博士以及我的朋友 Helmut Rauch 教授、Anton Zeilinger 教授, 他们为我提供了不少近代量子理论方面的信息, 从他们的杰出工作中, 我学习到不少新知识, 拓宽了思路, 有助于本书内容的改进. 在本书出版过程中, 我得到了柯善哲教授、科学出版社鄢德平编审以及周先意、刘万东、向守平等教授和杜江峰博士的热情支持. 侯广、吴盛俊、周锦东以及张涵在打印手稿中付出了辛勤的劳动, 吴盛俊及吴强教授编集了书中大部分习题, 张涵在文字表达上提出不少建设性的意见, 何晓辉帮助绘制过书中的全部插图. 没有这些宝贵帮助, 这本书面世是不可能的. 我在此向他们一并表示谢意.

张永德

2001. 11. 24

目 录

第一部分 基本内容

第一章 量子力学的物理基础	1
§ 1.1 实验基础	1
1. 第一组实验 —— 光的粒子性实验	1
2. 第二组实验 —— 粒子的波动性实验	4
§ 1.2 基本观念	9
1. 基本图像: de Broglie 关系与波粒二象性	9
2. de Broglie 波的初步分析	11
3. 基本特征: 概率幅描述、量子化现象、不确定性关系	12
§ 1.3 不确定性关系的讨论	16
1. Heisenberg 不确定性关系	16
2. 不确定性关系的进一步解释及某些应用	17
§ 1.4 理论体系的公设	19
1. 第一公设 —— 波函数公设	19
2. 第二公设 —— 算符公设	21
3. 第三公设 —— 测量公设(或平均值公设)	25
4. 第四公设 —— 微观体系动力学演化公设(或 Schrödinger 方程公设)	28
5. 第五公设 —— 全同性原理公设	29
* 6. 公设应用举例 —— 广义不确定性关系推导	29
习题	31
第二章 Schrödinger 方程的一般讨论	33
§ 2.1 Schrödinger 方程	33
§ 2.2 Schrödinger 方程基本性质讨论	34
1. 线性性质与态叠加原理	34
2. 概率流密度与概率的定域守恒	35
3. 稳定势场 Schrödinger 方程的一般解	36

4. 势场界面和奇点处波函数的性质	37
5. 能量平均值下限问题	38
6. 能谱分界点问题	38
7. 本征函数族完备性与能量可观测性问题	39
§ 2.3 力学量期望值的运动方程和对易子计算	39
1. 期望值的运动方程	39
2. 对易子和算符时间导数的计算	41
* 3. Hellmann-Feynman 定理和位力定理	44
* § 2.4 Schrödinger 方程向经典力学的过渡	46
1. $\hbar \rightarrow 0$ 过渡方式	46
2. 平均值过渡方式及其局限性	47
习题	48
第三章 一维问题	52
§ 3.1 一维定态的一些特例	52
1. 一维方势阱问题, Landau 与 Pauli 的矛盾	52
2. 一维势垒散射问题	61
3. 一维谐振子问题	65
4. 一维均匀势场问题	72
* 5. Kronig-Penney 势问题	76
* § 3.2 一维定态的一般讨论	82
1. 本征函数族完备性定理	82
2. 束缚态存在定理	83
3. 无简并定理	85
4. 零点定理	86
§ 3.3 一维 Gauss 型波包的自由演化	87
习题	88
第四章 中心场束缚态问题	92
§ 4.1 前言	92
§ 4.2 轨道角动量及其本征函数	94
§ 4.3 几个一般分析	97
1. m 量子数简并和离心势	97
2. 径向波函数 $r \rightarrow 0$ 时的边界条件	99
3. 粒子回转角动量及 Bohr 磁子	100
* 4. 径向解的完备性问题	102
§ 4.4 球方势阱问题	103

1. 束缚态($E < V_0$)问题	104
2. 无限深球方势阱	105
*3. 自由粒子球面波解	106
*4. 非束缚态问题	107
§ 4.5 Coulomb 场——氢原子问题	107
1. Schrödinger 方程及解	107
2. 讨论	111
§ 4.6 三维各向同性谐振子问题	115
1. Schrödinger 方程和解	115
2. 讨论	117
习题	118
第五章 量子力学的表象与表示	122
§ 5.1 幺正变换和反幺正变换	122
1. 幺正算符定义	122
2. 幺正算符的性质	123
3. 幺正变换	124
*4. 反幺正变换	126
§ 5.2 量子力学的 Dirac 符号表示	127
1. Dirac 符号	127
2. Dirac 符号的一些应用	131
*3. 关于 Dirac 符号的局限性	132
§ 5.3 表象的概念	133
1. 波函数的标记和分类	133
2. 量子力学的表象概念	134
3. 几种常用的表象	135
4. Dirac 符号下的表象变换	141
* § 5.4 Wigner 定理	143
1. Wigner 定理	143
2. 讨论	144
* § 5.5 量子力学的路径积分表示	145
1. 传播子与 Feynman 公设	145
2. 和 Schrödinger 方程的等价性	149
3. 传播子 $U(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$ 的再研究	151
4. 路径积分计算举例——自由粒子情况	152
5. 路径积分计算举例——简谐振子情况	155

* § 5.6 Fock 空间与相干态及相干态表象	159
1. 谐振子的 Fock 空间表示	159
2. 相干态	162
3. 相干态表象	166
* § 5.7 非惯性系量子力学	167
1. 等效原理	168
2. Schrödinger 方程的广义 Galileo 变换	168
3. COW 实验, 引力红移	170
习题	171
第六章 对称性分析和应用	175
§ 6.1 一般叙述	175
1. 对称性的含义	175
2. 量子力学中的对称性	175
3. 对称性与守恒律及守恒量	176
§ 6.2 时空对称性及其应用	177
1. 时间均匀和能量守恒定律	177
2. 空间均匀性和动量守恒定律	180
3. 空间各向同性和角动量守恒	181
4. 空间反射对称性和宇称守恒	184
* 5. 时间反演对称性	188
* § 6.3 内禀对称性	188
1. 同位旋空间旋转对称性和同位旋守恒	188
2. 全同粒子置换对称性与全同性原理	189
习题	197
第七章 电子自旋角动量	200
§ 7.1 电子自旋角动量	200
1. 电子自旋的实验基础和其特点	200
2. 电子自旋态的表示法	201
3. 自旋算符与 Pauli 矩阵	202
4. 例算	204
5. $\frac{1}{2}$ 自旋态的极化矢量与投影算符	206
§ 7.2 自旋角动量与轨道角动量的耦合	208
1. S 与 L 的合成	208
2. 角动量的升降算符	209

3. 自旋-轨道耦合作用与碱金属原子光谱的双线结构	211
4. 耦合表象与无耦合表象基矢的相互展开	213
§ 7.3 两个 $\frac{\hbar}{2}$ 自旋角动量的耦合	217
1. 自旋单态和自旋三重态	217
2. 两套基矢——耦合基和无耦合基	218
3. 运算举例	219
4. 自旋交换算符和例算	220
习题	222
第八章 定态微扰论	226
§ 8.1 非简并态微扰论	226
1. 基本方程组	226
2. 一阶微扰论	227
3. 二阶微扰论	229
4. 例算: 光谱精细与超精细结构、van der Waals 力、氢原子的 Lamb 移动、 核力的汤川势	230
§ 8.2 简并态微扰论	240
1. 简并态微扰论要旨	240
2. 简并态微扰论	240
3. 计算举例	242
习题	247

第二部分 进一步内容

第九章 电磁作用分析和重要应用	251
§ 9.1 电磁场中的 Schrödinger 方程	251
1. 最小电磁耦合原理及电磁场中的 Schrödinger 方程	251
2. 方程的某些考察	252
§ 9.2 均匀磁场中 Coulomb 场束缚电子的运动	254
1. 均匀磁场中类氢原子基本方程的考察	254
2. 基本方程的求解	256
3. 能级劈裂效应统一分析: 正常 Zeeman 效应、反常 Zeeman 效应和 Paschen-Back 效应	258
* § 9.3 均匀磁场下入射自由粒子的运动	263

1. 中子极化矢量在磁场中的进动	263
2. 中子的旋量叠加与旋量干涉, 中子干涉量度学 (interferometry)	263
3. 均匀磁场下入射自由电子的运动——Landau 能级	266
§ 9.4 Aharonov-Bohm(AB)效应	267
1. 磁 AB 效应	268
2. 向电磁 AB 效应的推广	269
3. 几点讨论	270
* § 9.5 超导现象的量子理论基础	272
1. 超导体中的流密度与 London 方程	273
2. Meissner 效应	273
3. 磁通量子化(及磁荷)	274
4. 超导 Josephson 结的 AB 效应	275
* § 9.6 电磁场真空态的能量和 Casimir 效应	278
1. 电磁场的真空态及其能量	278
2. Casimir 效应	279
习题	281
第十章 势散射理论	286
§ 10.1 一般描述	286
1. 散射(碰撞)实验的意义及分类	286
2. 基本描述方法——微分散射截面	287
3. 入射波、散射波和散射振幅	287
§ 10.2 分波法——分波与相移	289
1. 分波法的基本公式	289
2. 分波法的一些讨论	292
* 3. 光学定理	293
§ 10.3 Green 函数方法与 Bohn 近似	294
1. Green 函数方法与势散射基本积分方程	294
2. 一阶 Bohn 近似	296
* 3. Bohn 近似适用条件分析	297
4. 例算	298
§ 10.4 全同粒子散射	300
1. 全同性原理在散射问题上的应用	300
2. 例	301
* § 10.5 考虑自旋的散射	303
1. 散射分道的概念	303

2. 分道散射振幅计算 —— 带自旋的 Bohn 近似	303
3. 自旋权重平均	305
4. 例	308
习题	311

第三部分 含时问题与某些新应用

第十一章 含时问题与量子跃迁	314
§ 11.1 含时 Schrödinger 方程求解的一般讨论	314
1. 时间相关问题的一般分析	314
2. 含时系统初始衰变率的一个普遍结论	315
* 3. 衰变系统长期衰变规律的一个分析	316
* 4. 量子 Zeno 效应, 存在性的理论论证	318
* 5. 相互作用图像中的处理	320
* 6. 受迫振子计算	321
* 7. 变频振子计算	323
§ 11.2 时间相关微扰论与量子跃迁	325
1. 含时扰动及量子跃迁的概念	325
2. 量子跃迁系数基本方程组及其一阶近似	326
§ 11.3 几种常见含时微扰的一阶近似计算	328
1. 常微扰情况	328
2. 周期微扰情况	329
§ 11.4 不撤除的微扰情况	329
1. 不撤除微扰	329
2. 特例之一 —— 突然微扰	330
3. 特例之二 —— 绝热微扰	331
4. 突然微扰和绝热微扰的一个比较	332
§ 11.5 光场与物质的相互作用	333
1. 概论	333
2. 受激原子的量子跃迁	333
3. 电偶极辐射	336
* 4. 受激氢原子的光电效应	338
习题	340
* 第十二章 量子信息论的物理基础	343

§ 12.1 EPR 佯谬, Bell 不等式及空间非定域性	343
1. EPR 佯谬和量子理论的完备性	343
2. Bell 不等式	346
3. CHSH 不等式及其最大破坏	347
4. 量子理论非定域性的初步分析	349
§ 12.2 量子测量分析	351
1. 量子测量的正交投影模型——Von Neumann 模型	351
2. 广义测量与 POVM, Neumark 定理	353
3. 量子测量理论存在的问题	356
§ 12.3 两体量子系统状态描述	357
1. 两体的纯态与混合	357
2. 态的密度矩阵表示, Gleason 定理	358
3. Schmidt 分解	359
4. 纠缠态与纠缠度	361
5. 密度矩阵的演化, 超算符	366
6. 超算符的性质, Kraus 定理	368
§ 12.4 作为信息载体的量子态	369
1. 量子态的存贮——量子位与量子存储器	369
2. 量子态的非克隆定理	371
3. 量子态的操控	372
4. 量子网络的可分解定理	374
5. 量子态的超空间传送(quantum teleportation and swapping)	377
6. 量子信息的衰减——退相干	380
7. 单量子位信息衰减模式分析	381
习题	385
附录	390
一、Dirac δ 函数	390
二、时间反演算子	398
三、全同粒子体系的量子统计	406
四、量子算法	412
五、量子 Shor 算法的两点注记	424
名词索引	427

第一部分 基本内容

第一章 量子力学的物理基础

§ 1.1 实验基础

从 19 世纪末到 20 世纪 30 年代做了一些著名实验. 这些实验或是奠定了量子力学的基本观念, 触发了从经典物理学向量子理论的跃变, 或是为这种跃变提供了最初的一批确认. 由于前面课程中常有介绍, 这里只简单的提一下.

1. 第一组实验 —— 光的粒子性实验

黑体辐射、光电效应、Compton 散射给出了能量离散、辐射场量子化的概念, 从实验上揭示了光的粒子性质.

19 世纪末, 黑体辐射谱已被实验物理学家很好地测定了, 但从经典物理学的观念出发却难以通盘地理解. 1894 年, Wien 从经典统计理论和黑体辐射经验规律出发, 给出了黑体辐射谱的公式. 考虑黑体空腔中单位体积的辐射场, 令其中频率在 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 间的能量密度为 $dE_\nu = \epsilon(\nu)d\nu$, 该公式可以明确地写为

$$dE_\nu = \epsilon(\nu)d\nu = c_1 \nu^3 e^{-c_2/\nu} d\nu \quad (1.1)$$

这里 c_1, c_2 是两个常系数, $\beta = 1/kT$. 这一公式在短波长(高频率)区间内与实验符合, 但在中、低频区, 特别是低频区与实验差别很大. 1900 年 Rayleigh、1905 年 Jeans 将腔中黑体辐射场看成是大量电磁波驻波振子的集合, 利用能量连续分布的经典观念和 Maxwell-Boltzmann 分布律, 导出了黑体辐射谱的另一个表达式——Rayleigh-Jeans 公式. 若记 $\epsilon(\nu) = N_\nu \bar{\epsilon}_\nu$, 这里 N_ν 是腔中辐射场单位体积内频率 ν 附近单位频率间隔内电磁驻波振子数目(自由度数

目), 简单计算可得它为 $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$; 而 $\bar{\epsilon}_\nu$ 是频率为 ν 的驻波振子的平均能量, 由 M-B 分布律可得

$$\bar{\epsilon}_\nu = \frac{\int_0^\infty \epsilon e^{-\epsilon\beta} d\epsilon}{\int_0^\infty e^{-\epsilon\beta} d\epsilon} = kT$$

于是得到 Rayleigh-Jeans 公式为

$$dE_\nu = \epsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi k T \nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.2)$$

与 Wien 公式的情况正好相反, 这个公式在低频部分与实验曲线符合得很好, 但在高频波段不但符合, 而且出现黑体辐射能量密度趋于无穷大的荒谬结果. 这就是著名的“紫外灾难”, 是经典物理学最早显露的困难之一.

1900 年 Planck 用一种崭新的观念来计算平均能量 $\bar{\epsilon}_\nu$. 他引入了“能量子”的概念, 即, 假设黑体辐射空腔中振子的振动能量并不像经典理论所主张的那样和振幅平方成正比并呈连续变化, 而是和振子的频率 ν 成正比并且只能取离散值,

$$0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$$

这里的正比系数 h 就是后来所称的 Planck 常数. 与此相应, 腔中辐射场和温度为 T 的腔壁物质之间达到热平衡后, 交换的能量也是这样一份份的. 由此, 按经典统计理论的 M-B 分布律, 与上述能级相对应的比例系数分别为

$$1, e^{-h\nu\beta}, e^{-2h\nu\beta}, e^{-3h\nu\beta}, \dots$$

将这些系数归一化(除以这些系数的总和)使它们变成为权重系数, 就得到对应频率 ν 的驻波振子的平均能量,

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_\nu &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu\beta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\beta} \ln(1 - e^{-h\nu\beta}) = \frac{h\nu}{e^{h\nu\beta} - 1} \end{aligned}$$

将这个平均能量 $\bar{\epsilon}_\nu$ 乘以自由度数目, 就得到下面的 Planck 公式:

$$\epsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu\beta} - 1} \quad (1.3)$$