

全国部分高等院校研究生

高等数学试题解答

上 册

湖 北 人 民 出 版 社

全国部分高等院校研究生

高等数学试题解答

上 册

王益姝 胡源福

王仁德 李培生 欧阳家之

湖北人民出版社

高等数学试题解答

下 册

王益姝 胡源福

王仁德 李培生 欧阳家之

湖北人民出版社

全国部分高等院校研究生
高等数学试题解答

上 册

王益姝 胡源福

王仁德 李培生 欧阳家之

湖北人民出版社出版、发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 12印张 256,000字

1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷

印数: 1—83,000

统一书号: 7106·1584 定价: 1.25元

全国部分高等院校研究生
高等数学试题解答

下 册

王益姝 胡福源

王仁德 李培生 欧阳家之

湖北人民出版社出版、发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 10.875印张 231,000字

1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷

印数：1—83,000

统一书号：7106·1591 定价：1.13元

前 言

这本全国部分高等院校研究生《高等数学试题解答》，是根据收集到的 1979 年度全国百余所高等学校招收研究生的高等数学试题及 1978 年度、1980 年度部分高校招收研究生的试题、一机部出国留学生的试题编写的。编排顺序以校名首字笔划为序。由于试题的选取基本上包括了全国工科院校的各专业，从试题的深度和广度，可以看出工科院校研究生对高等数学的基本要求。因此对准备报考研究生的读者有直接的参考作用。又因研究生的试题，大部分有一定的难度，并形式多样（有基本概念、基本理论和基本运算技巧方面的大量问题；有富有启发性的典型问题；还有各种综合题、证明题和应用问题），故对各类学校正在学习高等数学的读者亦有复习、巩固和提高的辅导作用。还由于试题的鲜明典型性，对从事高等数学教学的同志也有一定的参考价值。总之，我们编写这本研究生试题解答，力求满足广大读者对学习高等数学各方面的不同要求，使之成为一本适合以上读者需要的参考资料。

我们在编写这本研究生试题解答过程中，陈桢福等同学曾做过一定的工作，完稿后承副教授王传法、吴修珉审查校阅，并对某些问题的证明或解法提供了许多宝贵意见。同时，得到了我院各级领导的鼓励与支持。此外，我院数学教研室戴莉芬、蔡宏才、张小柔等许多同志都给了很大的帮

1980/6/5

助，谨向他们表示感谢。

由于编写工作仓猝，错误之处，请读者指正。

最后向提供试题的兄弟院校和单位，谨致谢意。

编 者

于武汉工学院

1981 年元月

目 录

上 册

一机部出国进修生(1978年度)	1
一机部出国进修生数学专业(1978年度)	7
上海工业大学(1979年度)	18
上海化工学院(1979年度)	28
上海师范大学(1979年度)	35
上海交通大学(1979年度)	43
上海机械学院(1979年度)	49
上海海运学院(1979年度)	58
上海纺织工学院(1979年度)	67
上海科技大学(1979年度)	72
上海铁道学院(1979年度)	80
山东工学院(1979年度)	88
大连铁道学院(1979年度)	95
大连海运学院(1979年度)	103
大连工学院(1979年度)	109
广西大学(1979年度)	116
中山大学哲学系自然辩证法专业(1979年度)	123
中国人民解放军国防科技大学(一)(1979年度)	128
中国人民解放军国防科技大学(二)(1979年度)	134

中国科学技术大学化学专业 (1979 年度).....	138
中国矿业学院 (1979 年度).....	143
中南矿冶学院 (1979 年度).....	150
太原机械学院 (1979 年度).....	156
太原工学院 (1979 年度).....	162
天津大学 (1979 年度).....	171
天津纺织工学院 (1979 年度).....	176
无锡轻工业学院 (1979 年度).....	183
北方交通大学 (1979 年度).....	190
北京工业大学 (1979 年度).....	198
北京工业学院 (1979 年度).....	202
北京化工学院 (1979 年度).....	206
北京邮电学院 (1979 年度).....	211
北京钢铁学院 工科类型 (1979 年度).....	218
北京钢铁学院 理科类型 (1979 年度).....	223
北京航空学院 (1979 年度).....	224
四川大学(一) (1979 年度).....	231
四川大学(二) (1979 年度).....	236
四川大学(三) (1979 年度).....	239
四川大学(四) (1979 年度).....	244
兰州铁道学院 (1979 年度).....	247
华中工学院 (1979 年度).....	254
华北电力学院 (1979 年度).....	264
华北水利水电学院 (1979 年度).....	271
华东工程学院 (1979 年度).....	279
华东水利学院 (1979 年度).....	288

华东石油学院 (1979 年度).....	296
华南工学院 (1979 年度).....	302
长沙铁道学院 (1979 年度).....	308
长春光机学院 (1979 年度).....	315
东北重型机械学院 (1979 年度).....	322
西北工业大学 (1979 年度).....	326
西北农学院 (1979 年度).....	332
西北电讯工程学院 (1979 年度).....	340
西安公路学院 (1979 年度).....	350
西安交通大学 (1979 年度).....	364
西安冶金建筑学院 (1979 年度).....	372

目 录

下 册

成都电讯工程学院 (1979 年度)	377
成都地质学院 (一) 地质类 (1979 年度)	381
成都地质学院 (二) 工程地质类 (1979 年度)	385
成都地质学院 (三) 核子地球物理勘探类 (1979 年度)	391
成都科学技术大学 (1979 年度)	398
同济大学 (一) 工科类 (1979 年度)	405
同济大学 (二) 理科类 (1979 年度)	410
合肥工业大学 (1979 年度)	417
吉林工业大学 (1979 年度)	423
沈阳机电学院 (1979 年度)	427
武汉工学院 (1980 年度)	433
武汉工学院 (1979 年度)	438
武汉水利电力学院 (1979 年度)	445
武汉测绘学院 (1980 年度)	450
武汉测绘学院 (1979 年度)	456
武汉钢铁学院 (1979 年度)	465
武汉地质学院 (一) 北京研究生部岩浆岩专业 (1979 年度)	471

武汉地质学院(二)钻探工程专业(1979年度).....	475
武汉地质学院(三)磁法勘探专业(1979年度).....	480
河北工学院(1979年度).....	486
哈尔滨电工学院(1979年度).....	494
南开大学物理专业(1979年度).....	498
南京工学院(1979年度).....	503
南京化工学院(1979年度).....	510
南京林产学院(1979年度).....	517
陕西机械学院(1979年度).....	524
清华大学(1979年度).....	529
浙江大学(1979年度).....	535
湖北建筑材料工业学院(甲组)(1979年度).....	544
湖北建筑材料工业学院(乙组)(1979年度).....	549
湖南大学(1979年度).....	556
福州大学(1979年度).....	564
镇江农业机械学院(1979年度).....	570
上海机械学院(1978年度).....	576
太原工学院(1978年度).....	582
中南矿冶学院(1978年度).....	591
北京工业大学(1978年度).....	594
西北轻工业学院(一)(1978年度).....	600
西北轻工业学院(二)(1978年度).....	606
西安交通大学(一)(1978年度).....	612
西安交通大学(二)(1978年度).....	620
西安交通大学(三)(1978年度).....	627
华中工学院(1978年度).....	632

华东工程学院(一) (1978 年度)	636
华东工程学院(二) (1978 年度)	643
华东水利学院 (1978 年度)	651
华东石油学院(一) (1978 年度)	656
华东石油学院(二) (1978 年度)	663
长沙铁道学院 (1978 年度)	665
长春光机学院 (1978 年度)	670
成都电讯工程学院 (1978 年度)	680
吉林工业大学 (1978 年度)	684
南京邮电学院 (1978 年度)	690
湖北建筑材料工业学院 (1978 年度)	697
湖南大学 (1978 年度)	706
福州大学 (1978 年度)	711

一机部出国进修生

(1978 年度)

一、(8 分)求极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x) \frac{1}{x}}{(x - \sin x) \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = 1. \end{aligned}$$

二、(12 分)已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3), & -3 \leq x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{2}(x-3), & 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

1. 写出 $f(x)$ 的定义域.
2. $f(x)$ 是否处处连续? 为什么?
3. $f'(x)$ 是否处处存在? 为什么?
4. 作出函数的图形.

解: 定义域为 $[-3, 3]$. 在此定义域内除 $x = \pm 1$. 外根据初等函数的连续性可以说明 $f(x)$ 是连续的. 而

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = f(-1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 1.$$

故 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处也连续, 这说明 $f(x)$ 在其定义域内连续. 因为

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{\frac{1}{2}(x+3) - (-1)^2}{x+1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 - (-1)^2}{x+1} = -2.$$

故 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ 不存在.

即 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处不可导.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-\frac{1}{2}(x-3) - 1}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 不存在, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.

在其它各点处 $f'(x)$ 均存在. $f(x)$ 的图形如图 1) 所示.

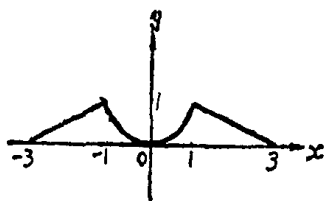


图 1

三、(20 分)解下列各题.

1. $\int \frac{a+x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx.$

解: 原式 $= \int \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$
 $= a \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \sqrt{a^2+x^2} + c.$

2. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. f 与 φ 均连续可微三次. 求 $y = f(\varphi(x))$ 的一阶与三阶导数.

解: $\frac{dy}{dx} = f'(u) \varphi'(x),$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(u) [\varphi'(x)]^2 + f'(u) \varphi''(x),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{dx^3} &= f'''(u) [\varphi'(x)]^3 + f''(u) 2\varphi'(x) \varphi''(x) \\ &\quad + f''(u) \varphi'(x) \varphi''(x) + f'(u) \varphi'''(x) \\ &= f'''(u) [\varphi'(x)]^3 + 3f''(u) \varphi'(x) \varphi''(x) \\ &\quad + f'(u) \varphi'''(x). \end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 求证

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx.$$

证: 令 $x = -u.$

则 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^{-a} f(-u) d(-u) = - \int_a^{-a} f(-u) du$

$$= \int_{-a}^a f(-x) dx$$

4. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x}(x-3)$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$,

特征根为 $r = -1$ (二重根)

则齐次方程通解为

$$Y = e^{-x}(c_1 + c_2 x).$$

设非齐次方程的特解为 $y^* = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2)$.

将 y^* 代入原方程整理化简后得

$$e^{-x}(6Ax + 2B) = e^{-x}(x - 1).$$

比较系数得 $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{3}{2}$. 于是原方程通解为

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + e^{-x}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right).$$

四、(10分) 设 $f(xy)$ 具有中间变量 $u = xy$ 的一阶连续导数,

求证沿分段光滑的任意闭路积分

$$\oint_C f(xy)(ydx + xdy) = 0.$$

$$\text{解: } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial [xf(xy)]}{\partial x} = f(xy) + xyf'(xy),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial [yf(xy)]}{\partial y} = f(xy) + xyf'(xy).$$

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故在 $f(xy)$ 有一阶连续偏导数的区域内所

给曲线积分与路径无关, 从而沿闭路积分为零.

五、(15分) 若函数 $f(x, y, z)$ 适合关系式

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z).$$

求证: $f(x, y, z)$ 满足