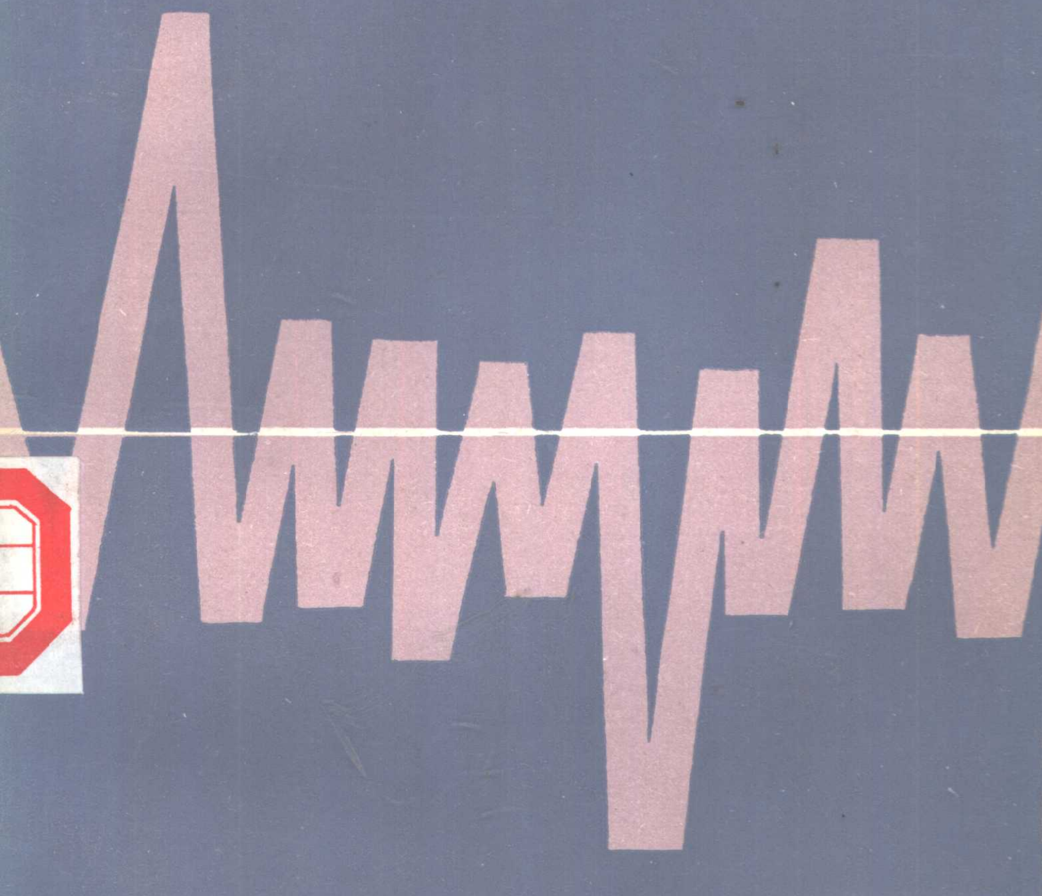
伊曼纽尔·帕尔逊 著

随机过程

邓永录 杨振明 译



高等教育出版社

随 机 过 程

伊曼纽尔·帕尔逊 著
邓永录 杨振明 译

高 等 教 育 出 版 社

内容提要

本书是根据 Emanuel Parzen 著«Stochastic Processes», 1967 年第三版译出的. 原书是伊曼纽尔·帕尔逊在斯坦弗大学开设随机过程课程时用的教科书,叙述了正态过程、协方差平稳过程、计数过程、泊松过程、更新计数过程、离散参数马尔科夫链、连续参数马尔科夫链等内容,只要求读者具备微积分和初等概率论的知识. 本书还包含大量的实际例子,可供需要学习随机过程初步的读者使用或参考.

随机过程

伊曼纽尔·帕尔逊 著

邓永录 杨振明 译

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 11.125 字数 266,000

1987 年 10 月第 1 版 1987 年 12 月第 1 次印刷

印数 00,001—3,110

书号 13010·01155 定价 2.85 元

序　　言

随机过程论通常被定义为概率论的“动态”部分．在这个理论中，人们着眼于从相互依赖关系和极限性态来研究随机变量族(称之为随机过程)．每当人们考察一个在某种意义上受概率规律支配并随时间而发展的过程时，他正是在观察一个随机过程．布朗运动质点的轨迹，象细菌群这样的群体的增长，某放射源发射出的波动的粒子数，以及在一炼油装置连续运转过程中波动的汽油产量等都是随机过程的例子．随机过程遍及自然界．它出现在医学、生物学、物理学、海洋学、经济学以及心理学中．这里列举的学科只不过是一小部分，如果一个科学家要考虑他所面临的现象的概率性质，那么，他肯定应该运用随机过程论．

在过去几年中，我在斯坦弗大学一直致力于开设随机过程论的一个初级课程，它只要求学生具备微积分和初等的连续概率论知识．这个课程有三个目的：

(i) 给出以随机过程为其数学模型的各种各样的实际现象的例子；

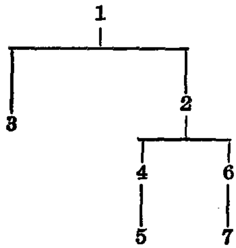
(ii) 提供建立概率模型的方法入门；

(iii) 为不具备高深的数学背景知识的读者提供坚实的数学技巧和达到充分的熟练程度，使他们有能力进一步学习随机过程论．

本书就是为达到上述目的的课程而写的教科书，它适用于有各种不同兴趣和背景的学生．书中许多章能够独立地阅读而不失

其连贯性．各章的逻辑关系如下图所示．

引论这一章说明随机过程怎样自然地产生，因而它在许多科学领域中起着基本的作用．第一章给出随机变量与随机过程概念的精确定义，并且引入维纳过程和泊松过程．为学习随机过程论，人们必须懂得如何运用条件概率和条件数学期望，第二章致力于给读者提供这些工具．第三章讨论具有有限二阶矩的随机过程理论的某些基本概念与方法，并引进正态过程与协方差平稳过程．



第四章论述泊松过程的性质，说明泊松过程不仅经常作为对随机事件进行计数的模型而出现，而且它还提供了构造其它有用的随机过程的建筑基石．更新计数过程的讨论在第五章．第六、七两章论述马尔科夫链(离散参数和连续参数)、随机游动和生灭过程，并且给出了可以应用这些随机过程的各种不同现象的例子．

每一节都有许多例题和习题．许多节还包含一些补充材料，这些材料是正文所述理论的推广，它们只以论断的形式叙述出来而要求读者去证明．

尽管有大量的原始参考材料，但我既没有试图逐一指出那些对早期的发展首先作出贡献的人的名字，也不打算给出供进一步研究用的完全的参考文献目录．对于那些想要参阅此书所论及任何课题的有关材料的读者，我欢迎他们提出意见和询问．

教科书的作者从理智上感谢那些在他的领域中工作的所有的人．要记下对本书各个部分提供了思想的书籍和论文的全部作者的名字是不可能的，在我能够确切地指出他们的地方我已经尽力给予应有的评价．但是，由于本书的材料已经加工了多次，因此我可能忽略了一些更值得我公开表示敬意的人，我谨向这些人表示

歉意，并保证这绝不是有意的忽略．我将会感激地接受有关保持历史记载正确性的任何批评意见，这样，在本书修订时我就有可能把这些意见考虑进去。

（致谢．略）

伊曼纽尔·帕尔逊
1962年1月于伦敦

目　　录

引论　随机过程论的作用

当科学家在他的实验室内进行测量，气象学家试图预报天气，控制系统工程师设计随动机构(例如飞机的自动驾驶仪或恒温控制器)，电气工程师设计通信系统(例如在表演者和观众之间或在仪表和把信息从一点传输到另一点的电缆之间的无线电联系)，经济学家研究价格波动和商业循环，以及神经外科医生研究脑信号的记录时，他们都会遇到与随机过程有关的问题. 在开始研究随机过程论之前，我们先来说明为什么这一理论是象统计物理学、群体增长理论、通信与控制论、管理科学(运筹学)以及时间序列分析这样一些不同领域的一个不可缺少的部分. 关于随机过程的其它应用，特别是在天文学、生物学、工业和医学中的应用的全面评述，读者可参看 Bartlett (1962), Neyman 和 Scott (1959) 等的著作①.

统计物理学

随机过程论的许多部分在开始建立时是和物理系统中的波动与噪声的研究密切联系着的(Einstein [1905], Smoluchowski [1906], Schottky [1918]). 因此，随机过程论可以看作统计物理学的数学基础.

随机过程为象电路中的热噪声以及沉浸在液体或气体中质点的布朗运动这样一些物理现象提供了模型.

① 参考文献在书末详细地列出.

布朗运动 当某个微小的质点沉浸在流体中时，由于分子的碰撞而使质点受到许许多多独立的随机冲击，这就得到一个表示质点位置的向量值函数 $(X(t), Y(t), Z(t))$，它作为时间的函数就称做布朗运动.

热噪声 考虑电网络中的一个电阻. 由于电阻中传导电子的随机运动，在电阻两端的电压 $X(t)$ 会出现微小的随机波动，波动的电压 $X(t)$ 就称做热噪声(可以证明，它的概率分布律只依赖电阻值 R 和电阻的绝对温度 T).

发射噪声 考虑连接一个电阻的真空二极管. 由于热阴极的电子发射是不稳定的，通过电阻的电流 $X(t)$ 由一系列电脉冲组成，每一脉冲相应于一个电子从阴极到阳极的跃迁，这个波动的电流 $X(t)$ 就称做发射噪声.

群体增长的随机模型

一个群体(无论它是由有生命的有机物，还是由分裂的原子和放射性衰变的物质构成)的大小及其组成是在经常波动的. 随机过程提供了描述这种波动的规律的一个工具(参看 Bailey [1957], Bartlett [1960], Bharucha-Reid [1960], Harris [1964]).

以随机过程作模型的一些生物学现象有：(i)家族姓氏的消失，(ii)在进化论中基因变异与基因重组的结果，(iii)植物和动物群落的空间分布，(iv)两个相互影响或对抗的群体间的生存竞争，(v)流行病的传播，(vi)致癌现象等.

通信和控制

在通信和控制中涉及的许多不同问题(其中包括运动目标的自动追踪，有自然和人为的干扰存在时无线电信号的接收，声音和图象的再现，导航系统的设计，工业生产过程中控制系统的设计，

预测预报，经济波动的分析以及对任何类型的随着时间变化而进行观测所得记录的分析）都可以看作下述一般问题的特殊情形：

设 T 表示时间轴上的一个点集，在每个点 $t\in T$ 对随机变量 $X(t)$ 进行一个观测．给定观测结果 $\{X(t),\ t\in T\}$，并且在某种意义上规定了一个与这些观测结果有关的量 Z，人们想以最佳的方式构造对 Z 和各种函数 $h(Z)$ 的估计以及关于它们的假设检验．这个陈述得不太精确的问题一般地概括了下列有关通信和控制的常见问题．

预测（或外推） 在区间 $s-L\leqslant t\leqslant s$ 内对随机过程进行了观测，人们希望对任意 $\alpha>0$ 预测 $X(s+\alpha)$．在这里，观测区间的长度 L 可以是有限，也可以是无穷．

平滑 假设观测结果 $\{X(t),\ s-L\leqslant t\leqslant s\}$ 可以写作

$$X(t)=S(t)+N(t),$$

$S(\cdot)$ 与 $N(\cdot)$ 是两个分别表示信号和噪声的随机过程（时间序列）．人们想要估计在区间 $s-L\leqslant t\leqslant s$ 中任意时刻 t 的信号值 $S(t)$．平滑这一术语由以下事实得出：噪声 $N(\cdot)$ 经常是由频率比信号 $S(\cdot)$ 高得多的成份组成，因此，估计或提取信号 $S(\cdot)$ 就可以看作是想要通过一个摆动得很厉害的记录作一条平滑的曲线．对任意 $\alpha>0$，预测 $S(s+\alpha)$ 的问题称做平滑预测问题．

参数估计（信号的提取和检测） 假设观测结果 $\{X(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 可以写作

$$X(t)=S(t)+N(t),$$

其中 $S(\cdot)$ 表示运动物体的轨道（比如说 $S(t)=x_0+vt+(a/2)t^2$），而 $N(\cdot)$ 表示测量的误差．人们想要估计物体的速度 v 和加速度 a．更一般地，人们想要在信号 $S(\cdot)$ 属于某一已知函数类的假设下，对 $0\leqslant t\leqslant T$ 中任一时刻 t，估计象 $S(t)$ 和 $\frac{d}{dt}S(t)$ 这样一些量．

易见，上述问题的解既依赖于人们对接收的信号和噪声所作的假设,也取决于选定最优解所用的标准.大家公认(参看Lanning和 Battin [1956], Helstrom [1960], Middleton[1960]),在设计最优通信和控制系统时，最好把在这样系统中出现的信号和噪声看作是随机过程．因此，学习现代通信和控制系统理论的第一步是学习随机过程论．这样做有两个目的：

（i）提供一种可以阐明通信和控制问题的语言,因为通信和控制系统必须通过它们在一定的环境范围中的平均性态来计算,而这些环境又是从概率上来描述的.

（ii）使人们对用随机过程表示信号和(或)噪声这个最现实的假设有透彻的理解.

管理科学

随机过程提供了一种从数量上研究和安排经营管理的方法,因而它在管理科学和运筹学的现代课程中起着重要作用．在这方面,随机过程应用得最多的两个领域是存储控制和等待线分析(参看 Arrow, Karlin 和 Scarf [1958], Syski [1960]).

存储控制　对于象零售商店、批发部、工厂和有备件储存的消费者这样一些不同的机构来说，两个值得考虑的重要问题是：(i)决定什么时候定货来补充他们的储存，(ii)决定定多少货．在作出这些决定时必须考虑到两种不确定性：(i)在一个给定的时间内货物的需求量是不确定的，(ii)交货时间的延迟——定货时间和实际收到定货的日期之间的时间间隔是不确定的．如果不存在这些因素,他们在定一批新的货物时也许能这样安排：使得所定的货物恰好在需要的时候到达，于是他们不必保持储备，因为储存货物常常是很费钱的．存储控制涉及到一方面要使保持储备的成本最小，同时又保持足够的存货在手中以应付由于随机的需求和新

定货交货时间的随机延迟而产生的所有意外．解决最优存储控制问题的一个途径是研究实际使用的存储策略并描述这些策略的效果．给出一个特定的存储策略，所得的波动存储水平就是一个随机过程．

排队 当顾客（或服务员）到达某一点接受（或提供）服务，并在那里必须等待接受（或提供）服务时就产生一个排队（或等待线）．等待接受（或提供）服务的，也许还包括那些正在接受（或提供）服务的，人群就称作排队．

有许多排队的例子．在火车站或飞机场等候买票的人构成一排队，在机场着陆的飞机构成一排队，到达港口装货或卸货的轮船形成一排队，在出租汽车站等候乘客的出租汽车是一排队，由电缆传输的电报构成一排队，某工厂的技工在储存工具的工具房柜台前形成一排队，在某个生产线上发生故障后需要修理的机器是处于被修理工服务的排队中．

在排队的数学理论中，等待线是按照四个方面来分类的：(i)输入分布（顾客相继到达的时间间距的概率分布律）；(ii)服务时间分布（一个顾客需要的服务时间的概率分布律）；(iii)服务线路的数目；(iv)排队规则（即以什么方式选择被服务的顾客，可能的策略有“先来先服务”、随机选择的服务以及按照优先权的次序服务等）．排队论所关心的正是这四个方面对人们感兴趣的各种量（例如排队长度和顾客等候服务的时间）的影响．

时间序列分析

按时间先后顺序排列的观测结果的一个集合称做时间序列．各种不同专业的学者对极不相同的现象进行观测都可以得到时间序列．例如(i)经济学家观察每年的小麦价格，(ii)遗传学家观察某一新品种鸡每天的产蛋量，(iii)气象学家研究某城市的日降雨

量，(iv)物理学家研究海洋中某指定点的环境噪声水平，(v)空气动力学家研究大气湍流的阵风速度，(vi)电子工程师研究无线电接收机的内部噪声.

我们可以这样描述时间序列：用 T 表示进行观测的时间点集合，在应用中，T 常常是一离散的等距时间点集(此时我们记 $T=\{1, 2, \cdots, N\}$，其中 N 为观测次数)，或者 T 是实时间轴上的一个区间(这时记 $T=\{0\leqslant t\leqslant L\}$，其中 L 是区间的长度)．在时间 t 所得的观测结果记作 $X(t)$，观测结果的集合 $\{X(t), t\in T\}$ 就称为时间序列.

在随机过程论的发展中，经济学时间序列的研究起了重要作用．考虑某种商品或交易所中某公司股票的价格，价格随着时间变化的记录可以表示为一波动的函数 $X(t)$．对于希望阐明经济系统动态的经济学理论家和想要预测价格的投机商人来说，分析这样的经济时间序列是一个很有意义的问题.

时间序列 $\{X(t), t\in T\}$ 分析的统计理论的基本思想(参看 Wold[1938]，Bartlett[1955]，Grenander 和 Rosenblatt[1957]，Hannan [1960])是把时间序列看作是对随机变量族所作的一个观测，即对每一 $t\in T$，观测结果 $X(t)$ 是随机变量的一个观测值．随机变量族$\{X(t), t\in T\}$称做随机过程．当我们假设观测到的时间序列$\{X(t), t\in T\}$是随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一次观测(或者说，一个现实)时，时间序列分析的统计理论就是想要根据观测到的时间序列来推断随机过程的概率规律．处理这个问题的方法实质上类似于(尽管它需要更复杂的分析技巧)古典统计理论中处理如下问题的方法：当人们掌握了随机变量 X 的有限多个独立的观测结果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 时，想要由此推断 X 的概率规律.

为了分析时间序列，人们必须首先假定 $\{X(t), t\in T\}$ 符合某个模型，除了一些要根据观测样本进行估计的参数之外，这个模

型是完全确定的. 因此，学习时间序列分析的第一步是学习随机过程论，其目的是:

（i）提供一种语言来说明对被观测的时间序列所作的假设；

（ii）使人们能透彻地理解，我们对作为时间序列模型的随机过程所作的假设是最符合实际和(或)在数学上容易处理的。

第一章 随机变量与随机过程

在本书中，概率论被看作研究随机现象的数学模型的科学. 随机现象就是受概率规律而不是受确定性规律支配的实际现象.

考虑作布朗运动的质点的移动，诸如细菌群这样的群体的增长，某电路中由热噪声或发射噪声而引起的波动的电流，或者某炼油装置在连续运转过程中波动的产油量等等. 这些随机现象表现为以某种方式受概率规律制约的、随时间推移而发展的过程，称之为**随机过程**.

正如引论中所指出的，在概率论的数学理论中，最好把随机过程定义为一个随机变量族 $\{X(t),\ t\in T\}$ ("$\in$"读作"属于"或"在……中变化"). 集 T 称做过程的**附标集**. 对集 T 的性质通常不作什么假定，但是如下两种情形非常重要：$T=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ 或 $T=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，此时称随机过程为**离散参数过程**；$T=\{t:\ -\infty<t<\infty\}$ 或 $T=\{t:\ t\geqslant 0\}$，此时称随机过程为**连续参数过程**.

这一章讨论随机变量和随机过程的精确定义，本书将沿用这些定义. 此外，还要引入两类随机过程——维纳过程与泊松过程，它们在随机过程论中起着核心的作用.

§1-1 随机变量和概率分布律

直观地说，随机变量 X 就是这样一个实值的量，对每一个实数集 B，X 取值于 B 中的概率 $P[X\in B]$ 存在. 于是 X 是一个随机地(即按照某一概率分布)取值的变量. 在概率论中，随机变量定义为样本空间上的函数. 运用这一定义，我们能够建立随机

变量的微积分学，以研究由某些随机变量经过各种分析运算而产生的另一些随机变量的特征①.

为给出随机变量概念的精确定义，必须首先引进下述概念：

(i) 样本空间;

(ii) 事件;

(iii) 概率函数.

一个随机现象的样本空间 S 是描述这个随机现象的所有可能结果的空间.

事件就是样本的集合. 称事件 E 发生，当且仅当随机现象的观测结果有 E 中的某个样本.

应当指出，由于技术上的原因，人们通常不允许 S 的所有子集都是事件，而宁可采用 S 的具有下述性质的子集族 $\mathscr{F}$ 作为事件族:

(i) S 属于 $\mathscr{F}$;

(ii) 对 $\mathscr{F}$ 中任何集 E，余集 E^c 也属于 $\mathscr{F}$;

(iii) 对 $\mathscr{F}$ 中的任何集列 $E_1, E_2, \cdots$，它们的并 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 也属于 $\mathscr{F}$.

注意由 S 的所有子集构成的族有性质(i)至(iii). 但是，这个族常常显得太大，以致对于某些样本空间 S 而言，不可能在这样的族上定义满足下述公理 3 的概率函数 $P[\cdot]$. 为建立概率的数学理论，通常只需把事件族取为具有性质(i)至(iii)并且包含了我们感兴趣的所有集合的 S 的最小子集族. 例如，当样本空间 S 是实直线时，人们采用波雷耳集族 $\mathscr{B}$ 作为事件族，它是具有性质(i)至

---

① 这一节概述了初等概率论的一些主要概念. 较详细的讨论和例子可参见作者的书《现代概率论及其应用》(纽约，1960)第 4 至 9 章. 今后把这本书简称为"现代概率论".

中文书可参看，比如，中山大学数学力学系《概率论及数理统计》编写小组编《概率论及数理统计》(高等教育出版社，1980 年版)——译者.