根据教育部颁布的新课程标准编写
北京市海淀区学校信息中心／策划

2003年版

特级教师解读

高考命题走势

数学

本册主编：宋质彬

- 例题典型
- 导向准确
- 点拨精到
- 练习实用

中国少年儿童出版社

特级教师解读

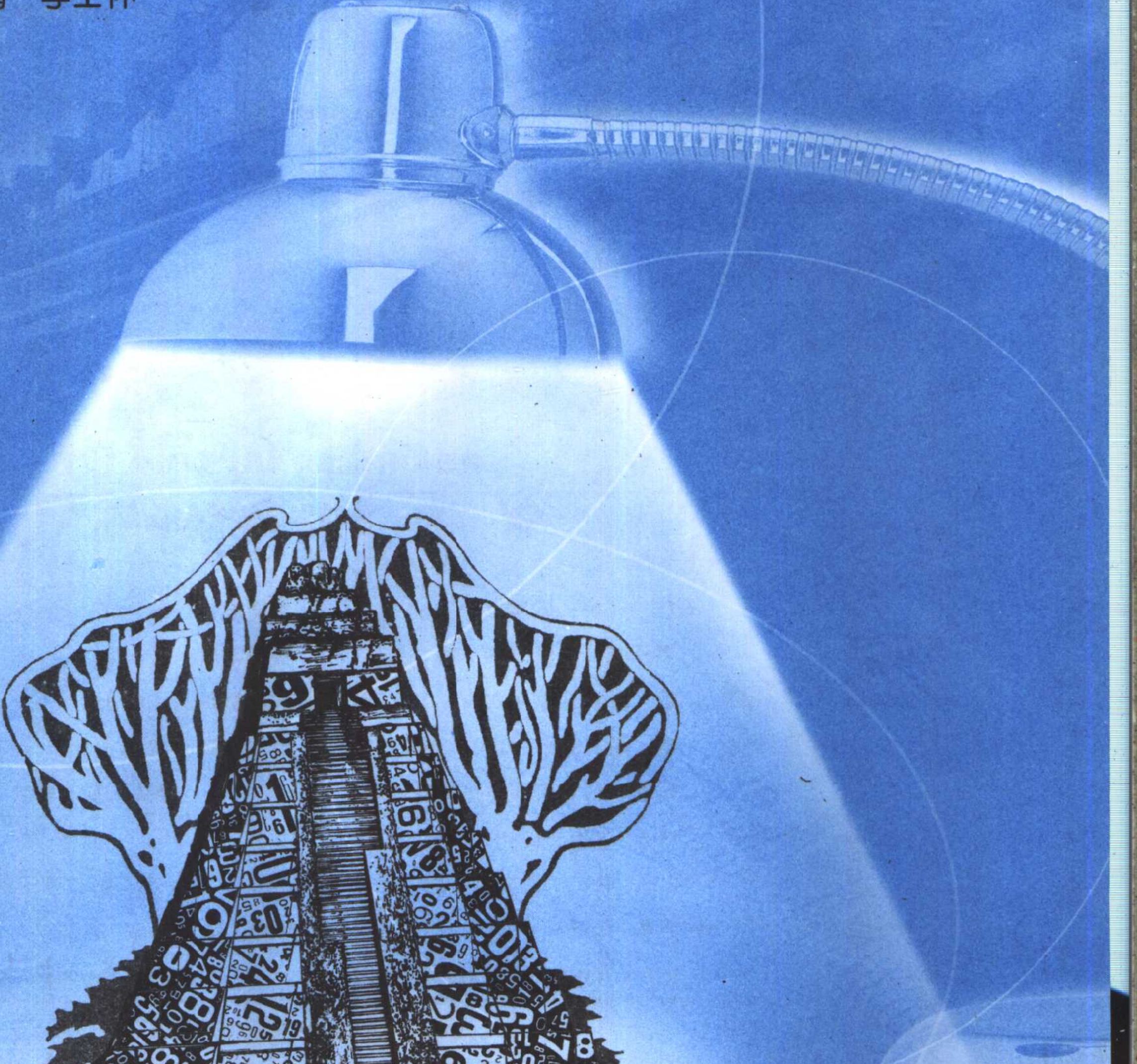
高考命题走势

数学

本册主编 宋质彬

编 写 者 宋质彬 郭大鹏 李士怀

解兴武



中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

特级教师解读高考命题走势·数学/宋质彬主编. —北京：中国少年儿童出版社，2002. 8

（名师导考丛书·高考卷）

ISBN 7-5007-3825-0

Ⅰ. 名… Ⅱ. 宋… Ⅲ. 数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 22116 号

特级教师解读高考命题走势·数学

出版发行：中国少年儿童出版社

出 版 人：

作　者：宋质彬	封面设计：杨　群
责任编辑：尚万春　韩　娟	责任印务：栾永生
社　址：北京东四十二条 21 号	邮政编码：100708
电　话：086－010－64032266	传　真：086－010－64012262
印刷：河北省霸州市福利胶印厂印刷	经销：新华书店
开本：880×1230　1/16	印张：16
2002 年 8 月北京第 2 版	2002 年 8 月北京第 2 次印刷
字数：465 千字	印数：10,000 册
ISBN 7-5007-3825-0 / G·2592	定价：20.00 元

凡有印装问题，可向承印厂调换

前　　言

普通高等学校招生全国统一性考试是一种常模参照性的选拔考试，其目的是为普通高等学校择优录取新生提供依据，同时又是引领中学素质教育的指挥棒。2002年全国高考进入了《3+X》改革的新阶段，改革"稳中有改"、"与时俱进"，逐步呈现了以能力考核为主导，以基础性、应用性、综合性、多元性为特点的新高考格局。

普通高中的教师、学生如何领悟新高考的特点，在复习迎考的最后冲刺阶段又如何运用正确的策略和方法，达到低耗高效，这将是把握机遇走向成功的关键。为此，我们组织全国对高考命题有突出研究的专家和名牌重点中学中长期担任高三教学的知名教师，按高考改革的新思路、课程改革的新理念、复习迎考的新战略的要求，编写了这套《特级教师解读高考命题走势》丛书，奉献给奋发迎战高考的莘莘学子。

本丛书包括语文、数学、英语、物理与综合、化学与综合、政治与综合、历史与综合、地理与综合、理科综合、文科综合、文理大综合等12分册，各分册复习内容又包括"知识结构(提要)、命题趋势走向、名师点拨解疑、基础练习、强化训练，以及高考模拟测试(包括参考答案和评分标准)等部分。丛书有以下特点：

1.依据考试说明，紧扣一个"纲"

紧扣《考试说明》，根据教育部最新颁发的各学科《全日制普通高级中学教学大纲》(2002年修订版)，准确把握复习的要求和重点。

2.知能覆盖面广，突出主干和难点

丛书内容涵盖了《考试说明》中的全部内容，着重对主干知识和能力迁移作了精要阐释，并点明考点和能力训练的关键点，以及相应的解题策略和技巧。

3.题目新颖灵活，强调一个"精"

编者在命题设计中，根据多年追踪的高考命题走向，强调了一个"精"字，即精选精析，所选题目均是高考实践中证明有针对性和实效性的题，具有新颖、灵活的特点：情景新颖、设问新颖；解题往往需要知识重组，能力迁移，体现了能力立意的要求。

4.综合科目复习，体现融合和创新

综合能力测试的实质，在于促进学生融会贯通、综合运用所学知识，在"自主、合作、探索"的多元化学习方式中培养创新意识和实践能力。编者根据中学分科教学的实际，深入研究学科间的知识、能力和方法的结合点，形成相应的"综合板块"——考点，系统地构建了理科综合和文科综合复习的内容、策略和方法的整体框架。

5.分层递进强化训练，实用性强

丛书按高考冲刺的复习要求，由易到难，由简到繁，一专题一个小结，一讲一个强化训练。高考模拟测试按"实、活、快"的实战要求编制。总之《特级教师解读高考命题走势》是一套高考决胜阶段实用高效的丛书。

编　者

《特级教师解读高考命题走势》丛书

编委会

目 录

第一部分 数学基础知识及强化训练

第二部分　数学思想方法及数学解题学初步

第一部分　数学基础知识及强化训练

考点1　集合与映射

命题趋势走向

集合知识是高等数学的重要基础知识，集合语言是重要的数学语言。作为工具，集合渗透于中学数学的各个方面，函数、方程、不等式、排列组合、曲线及动点轨迹等主干知识更常与集合知识网络交汇，提高学生对数学本质的认识和数学语言的阅读、理解能力。

集合是高考每年必考的知识点之一，主要考查集合的概念，交、并、补运算及有关术语、符号，数轴与韦恩图。

题型多为选择题、填空题中的容易题，且多在第1题位置，但以集合语言为工具的中等难度的选择题、填空题可能出现，也可能出现中等难度的解答题。

映射是深入认识函数概念的基础，是沟通两个集合中元素之间关系的桥梁，是近代数学的重要概念之一，但抽象性强，中学不宜深入研究，考纲要求为“了解”层次。近年已经两次在容易题中考查，再加大难度的可能性不大。

名师点拨解疑

【例题1】设集合 $M=\left\{x \mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in z\right\}$　$N=\left\{x \mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in z\right\}$. 则

A. $M=N$　　B. $M\subset N$

C. $M\supset N$　　D. $M\cap N=\phi$

(2002年全国高考题)

分析：本小题考查集合的概念及整数的性质.

解：$\because x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}(k\in z)$

$\therefore M=\left\{\cdots,-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\cdots\cdots\right\}$.

$\because x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}(k\in z)$,

$N=\left\{\cdots,-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\cdots\right\}$.

$\therefore M\subset N$　　选(B).

【点拨解疑】 ①本小题加大了对集合语言的考查力度，因而难度稍有增加，位置后推至第5小题，反映出高考对集合知识考查的新动向，不能总认为集合试题只考第1小题的送分题.

②本题直接解法应从分式结构出发，运用整数奇偶性求解，但由选择题的特殊结构，用特殊值法. 如取 $k=1,2,3,4\cdots$，即可简捷获解，简解就是好解，时间就是分数，是解数学高考选择题的基本原则. 切记.

【例题2】 若集合 $S=\{y \mid y=3^x,x\in R\}$. $T=\{y \mid y=x^2-1,x\in R\}$，则 $S\cap T$ 是(　　).

A. S　　B. T　　C. Φ　　D. 有限集

(2000年上海高考题)

分析：本小题考查集合的概念和函数值域的知识.

解：集合 S 是函数 $y=3^x$ 的值域，$S=\{y \mid y>0\}$. 同理集合 $T=\{y \mid y\geqslant -1\}$，所以 $S\cap T=\{y \mid y>0\}=S$.

【点拨解疑】 这是以集合语言为载体，考查主干知识(函数值域)的范例，解题关键是准确理解集合运算与函数值域.

【例题3】 已知集合 $A=\{x \mid -2k+6<x<k^2-3\}$、$B=\{x \mid -k<x<k\}$，若 $A\subset B$，求实数 K 的取值范围.

分析：注意 ϕ 是任何集合的真子集.

解：由 $A\subset B$，知 $B\neq\phi$，即 $-k<k\Rightarrow k>0$.

(Ⅰ)若 $A=\phi$，即 $-2K+6\geqslant K^2-3\Rightarrow K^2+2K-9\leqslant 0\Rightarrow -1-\sqrt{10}\leqslant K\leqslant -1+\sqrt{10}$，要使 $A\subset B$ 须 $0<k\leqslant -1+\sqrt{10}$

(Ⅱ)若 $A\neq\phi$，要使 $A\subset B$，

$$\begin{cases}-k<k\\-k\leqslant -2K+6\\k^2-3\leqslant k\\-2K+6<K^2-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k>0\\k\leqslant 6\\\frac{1-\sqrt{13}}{2}\leqslant K\leqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\K<-1-\sqrt{10}\text{ 或 }K>-1+\sqrt{10}\end{cases}$$

解得 $-1+\sqrt{10}<K\leqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

由(Ⅰ)、(Ⅱ)知所求 K 的取值范围是 $(0,\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$.

【点拨解疑】 含参数的集合问题，常根据集合元素的性质来解. 注意把集合的运算关系转译为包含关系，例如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，数形结合思想常能简化计算，本例可利用数轴直观求解.

【例题4】 设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{2,3,4,5,6\}$. 映射 $f:M\rightarrow N$，使对任意的 $x\in M$，都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数，这样的映射 f 的个数是多少？

分析：由映射定义依次考虑 M 中每一个元素根据映射 f 对应 N 中的唯一元素的所有情形，有序不乱是关键.

略解：(1)当 x 为奇数时，若 $f(x)$ 为奇数，则 $x+f(x)+x\cdot f(x)$ 为奇数，先看 x 取 -1，$f(x)$ 则可取3或5，共有映射 f 2个；若 $f(x)$ 为偶数，则 $x+f(x)+xf(x)$ 为奇数，仍看 x 取 -1，而 $f(x)$ 取2或4或6，又有不同的映射 f 3个. 所以 M 中元素 -1 有5个映射. 同理 M 中元素1也有5个映射. (2)当 x 为偶数时，若 $f(x)$ 为奇数，则 $x+f(x)+xf(x)$ 为奇数，M 中取0，$f(x)$ 则可取3或5，有2个映射；若 $f(x)$ 为偶数，则 x

$-f(x)+xf(x)$ 为偶数,不合题意.分三步完成,由乘法原理,共有映射 $5\times5\times2=50$.

【点拨解疑】 当情境新颖,读不懂题意,找不到解题的突破口时,深入挖掘题目的隐含条件,如本题中 $-1,1,3,5$ 为奇数,$0,2,4,6$ 为偶数,透彻理解已知条件 $x+f(x)+xf(x)$ 可能为奇+奇+奇×奇等情形,从而转化为数论知识是解信息迁移题的重要策略.

基础知识练习(A组)

一、选择题:

1. 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$,集合 $A=\{0,1,2,3,\}$,集合 $B=\{2,3,4\}$,则 $\bar{A}\cup\bar{B}$(　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

(1994年全国高考题)

2. 设全集为 R,$A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$,$B=\{x\mid |x-5|<a\}$(a 是常数),且 $11\in B$,则(　　)

A. $A\cup B=R$　　B. $A\cup\bar{B}=R$

C. $\bar{A}\cup\bar{B}=R$　　D. $A\cup B=R$

(1998年上海高考题)

3. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 N,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象20的原象是(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

(2000年全国高考题)

4. 已知集合 $M=\{1,2,3\}$ 那么满足关系 $M\cup N=M$ 的集合 N 的个数为(　　)

A. 1　　B. 7　　C. 8　　D. 10

二、填空题:

5. 若集合 $\{x\mid ax^2+3x+1=0\}$ 中有且只有一个元素,则实数 a 的取值集合是____________.

6. 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2-2x-3,x\in R\}$,$B=\{y\mid y=-x^2+2x+13,x\in R\}$,则 $A\cap B=$____________.

高考常考题强化训练(B组)

一、选择题:

1. 已知全集 $I=\left\{a\,\middle|\,\frac{6}{5-a}\in N 且 a\in Z\right\}$,则 $M=$(　　)

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{1,2,3,6\}$　　D. $\{-1,2,3,4\}$

2. 设集合 $A=\{x\mid x\in Z 且 -10\leqslant x\leqslant -1\}$,$B=\{x\mid x\in Z 且 |x|\leqslant 5\}$,则 $A\cup B$ 中元素的个数是(　　)

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

(2000年全国高考题)

3. 设全集为 R,$f(x)=\sin x$,$g(x)=\cos x$,$M=\{x\mid f(x)\neq 0\}$,$N=\{x\mid g(x)\neq 0\}$,那么集合 $\{x\mid f(x)g(x)=0\}$ 等于(　　)

A. $\bar{M}\cap\bar{N}$　　B. $\bar{M}\cap N$

C. $M\cup\bar{N}$　　D. $\bar{M}\cup\bar{N}$

4. 已知 $A=\{a,a+d,a+2d\}$,$B=\{a,aq,aq^2\}$ 若 $A=B$,则 q 的值是(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $1,-\frac{1}{2}$

5. 设集合 $M=\{x\mid x>2\}$,$N=\{x\mid x<3\}$,那么"$x\in M$ 或 $x\in N$"是"$x\in M\cap N$"的(　　)

A. 充分但非必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

6. 设 I 是全集,集合 P,Q 满足 $P\subset Q$,则下面结论中错误的是(　　)

A. $P\cup Q=Q$　　B. $\bar{P}\cup Q=I$

C. $P\cap\bar{Q}=\phi$　　D. $\bar{P}\cap Q=\bar{P}$

(1994年上海高考题)

7. 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 的元素映射成集合 B 的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 下,象 $(2,1)$ 的原象是(　　)

A. $(3,1)$　　B. $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

C. $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$　　D. $(1,3)$

(2000年两省一市高考题)

二、填空题:

8. 设 I 是全集,非空集合 P,Q 满足 $P\subset Q\subset I$,若含 P、Q 的一个集合运算表达式,使运算结果为 ϕ,则这个运算表达式可以是____________(只要写出一个表达式)

(2000年上海春季高考题)

9. 集合 $A=\{3,4\}$,$B=\{5,6,7\}$,那么可建立从 A 到 B 的映射个数是______;从 B 到 A 的映射个数是______.

10. 已知集合 $A=\{1,3\}$,$B=\{x\mid mx-3=0\}$,且 $A\cup B=A$,则 m 的值为____________.

三、解答题:

11. 已知 R 为全集,$A=\left\{x\mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\right\}$,$B=\left\{x\mid \frac{5}{x+2}\geqslant 1\right\}$,求 $\bar{A}\cap B$.

考点2 简易逻辑

命题趋势走向

逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科。学习数学,需要全面地理解概念,正确地进行表述判断和推理。这部分内容在高考中尽管没有单独命题考查,但几乎每一题中都要用到逻辑知识,如要证明一个命题的结论为真,只要找到使这个命题成立的一个充分条件即可,而要否定这个命题是真的,只要找到使这个命题的一个必要条件不成立就可以了。

名师点拨解疑

【例题1】 写出下列命题的否定:

(1) 不论 a 取什么实数,$x^2+x-a=0$ 必有实根

(2) 存在一个实数 x,使得 $x^2+x+1\leqslant 0$.

解:(1) 原命题相当于"对所有的实数 a,$x^2+x-a=0$ 都有实根",它的否定是"对所有的实数 a,$x^2+x-a=0$ 不都有实根",即"至少有一个实数 a,使得 $x^2+x-a=0$ 没有实根."

(2) 原命题的否定指"不存在使得 $x^2+x+1\leqslant 0$ 的实数 x"即"对所有的实数 x,有 $x^2+x+1>0$"

【点拨解疑】 "原命题的否定"和"否命题"不是一回事,前者指把一个命题的结论改为与它相矛盾的判断;而否命题同时包含否定"前提"和"结论".

【例题2】 设甲、乙、丙是三个命题,若① 甲是乙的必要条件,② 丙是乙的充分条件,但不是乙的必要条件,那么( )

(A) 丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件.

(B) 丙是甲的必要条件,但不是甲的充分条件.

(C) 丙是甲的充要条件.

(D) 丙不是甲的充分条件,也不是甲的必要条件.

解:由①"乙$\Rightarrow$甲"由②"丙$\Rightarrow$乙,且丙$\not\Leftarrow$乙",则有:"丙$\Rightarrow$甲".现在判断"甲$\Rightarrow$丙"是否成立,假设:"甲$\Rightarrow$丙"则"甲$\Rightarrow$乙"进而"甲$\Leftrightarrow$乙",从而"乙$\Rightarrow$丙"与②矛盾,故丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件.

【点拨解疑】 命题中的条件和结论是相对的,如 P 是 q 的必要条件,则 q 是 P 的充分条件;若 P 是 q 的充分条件,则 q 是 P 的必要条件.

【例题3】 设 $x,y\in R$,求证:$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

分析:充分性是证 $xy\geqslant 0\Rightarrow|x+y|=|x|+|y|$ 必要性是证:$|x+y|=|x|+|y|\Rightarrow xy\geqslant 0$

证明:充分性:① 如果 $xy=0$,不妨设 $x=0$,于是 $|x+y|=|y|=|x|+|y|$ ② 如果 $xy>0$,即 $x>0,y>0$ 或 $x<0,y<0$

当 $x>0,y>0$ 时 $|x+y|=x+y=|x|+|y|$

当 $x<0,y<0$ 时 $|x+y|=-|x+y|=-x-y=|x|+|y|$

总之,当 $xy\geqslant 0$ 时,有 $|x+y|=|x|+|y|$

必要性:由 $|x+y|=|x|+|y|$ 及 $x,y\in R$,得 $(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$,即 $x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$.

所以,$xy=|xy|$,由此 $xy\geqslant 0$.

【例题4】 有金盒、银盒、铅盒各一个,只有一个盒子里有肖像,金盒上写有命题 P:肖像在这个盒子里;银盒上写有命题 q:肖像不在这个盒子里;铅盒上写有命题 γ:肖像不在金盒里.P,q,γ 中有且只有一个是真命题,问:肖像在哪一个盒子里?为什么?

解:因为 γ 即非 P,所以至少有且只有一个为真,因为 P、q、γ 有且只有一个真命题,则 q 为假命题,则非 q 是真命题,即肖像在银盒里.

【点拨解疑】 本题亦可分类讨论去处理,但没有此解法简便.

高考常考题强化训练

一、选择题:

1. 下列四组条件中,甲是乙的充分不必要条件的是( )

A. 甲:$a>b$　　乙:$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

B. 甲:$ab<0$　　乙:$|a+b|<|a-b|$

C. 甲:$a=b$　　乙:$a+b=2\sqrt{ab}$

D. 甲:$\begin{cases}0<a<1\\0<b<1\end{cases}$　　乙:$\begin{cases}0<a+b<2\\-1<a<-b<1\end{cases}$

2. "P 或 q 为真命题"是"P 且 q 为真命题"的( )

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. 下列语句不是命题的是( )

A. 世界是属于你们的　B. 青岛位于青海中

C. 骄者必败　D. 向英雄致敬

4. 若命题 P 的逆否命题是 q,命题 P 的逆否命题 γ,则 q 是 γ 的( )

A. 逆命题　B. 否命题

C. 逆否命题　D. 都不对

5. 如果命题"P 或 q"是真命题,命题"P 且 q"为假命题,那么( )

A. P、q 都是假命题

B. P、q 都是真命题

C. 命题 P 和命题"非 q"真值不同

D. 命题 q 和命题"非 P"真值相同

二、填空题:

6. 命题"$\sqrt{5}$ 的值不超过3"看作是"非 P"形式时,P 为______看作是"P 或 q"形式时,P 为______,q 为______

7. 命题"各位数字之和是3的倍数的正整数可以被9整除",与它的逆否命题,否命题及逆否命题中假命题有________个,真命题有________个.

8. 命题P是命题q的充分但不必要条件,命题S是命题q的必

要但不充分条件，命题 t 是命题 S 的充要条件，则 t________P

三、解答题：

9. 设 α、β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个实根，试分析 $a>2$ 且 $b>1$ 是两根 α、β 均大于 1 的什么条件？

10. 已知关于 x 的一元二次方程($m\in Z$)：

$mx^2-4x+4=0$ ①

$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ ②

求方程 ①② 的根都是整数的充要条件.

考点 3 函数的解析式，定义域与反函数

命题趋势走向

函数知识是高中数学的主线，函数思想是中学数学的重要基本数学思想，因而函数概念直接影响整个高中数学的学习和后继学习，函数概念的掌握水平是函数学习的重要标志之一。

函数概念、函数解析式与定义域，在近十年的高考中一直是考查频率最高的主干知识，内容上已延拓到包括分段定义函数、复合函数及抽象函数记号，考查力度呈上升趋势。函数定义域的考查，不仅渗透于各种函数问题中，要求考生熟练运用不等式(组)探求函数定义域，深刻理解定义域优先原则，并曾一度(1999 年)要求考生能使用极限方法求定义域。

反函数的定义、函数图像位置关系和求简单的反函数，几乎年年都考、但要求不高。

名师点拨解疑

【例题 1】 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(log_2x)=x+\frac{a}{x}$，a 为常数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式及定义域；

(2) 如果 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

(3) 当 $f(x)$ 为偶函数时，用单调性的定义讨论 $f(x)$ 的单调性.

分析：本例是已知复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式，求 $f(x)$ 的解析式、一般常用换元法，换元时，应立即指出新元的取值范围，注意换元前后函数定义域的变化.

解：(1) 设 $log_2{}^x=t$，

$\therefore\ x=2^t, f(t)=2^t+\frac{a}{2^t}$，

$\therefore\ f(x)=2^x+\frac{a}{2^x}(x\in R)$.

(2) $\because\ f(x)$ 是偶函数，$\therefore\ f(x)=f(-x)$

即 $2^{-x}+\frac{a}{2^{-x}}=2^x+\frac{a}{2^x}$，

即 $2^x-2^{-x}-a\cdot 2^x+a\cdot 2^{-x}=0$

$\therefore\ (2^x-2^{-x})(1-a)=0$，

$\because\ 2^x-2^{-x}$ 不能恒为 0，$\therefore\ a=1$

(3) 当 $a=1$ 时，$f(x)=2^x+\frac{1}{2^x}$，设 $0<x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}+\frac{1}{2^{x_1}})-(2^{x_2}+\frac{1}{2^{x_2}})$$

$$=(2^{x_1}-2^{x_2})+\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}$$

$$=(2^{x_1}-2^{x_2})(\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}})$$

∴ $2^{x_1}-2^{x_2}<0, 2^{x_1+x_2}>0, 2^{x_1+x_2}-1>0$.

∴ $f(x_1)-f(x_2)<0, f(x_1)<f(x_2)$,

∴ $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数,

∵ $f(x)$ 为偶函数,

∴ $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是减函数.

【点拨解疑】 ① 函数的确定分两步:(Ⅰ) 定义域非空,定义域必须是非空数集,坚持定义域优先原则,若定义域是空集,不再看第二步;(Ⅱ) 符合映射定义:任一,惟一,故映射法则 + 定义域,即解析式 + 定义域确定一个函数.

② 复合函数的解析式可分为下列情形探求.(Ⅰ) 已知 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 用换元法;(Ⅱ) 已知 $f[g(x)]$ 的表达式结构简单易凑时,用观察法或配凑法;(Ⅲ) 已知函数解析式的基本结构的类型时,用待定系数法;(Ⅳ) 给出递推关系式时,用递推法;(Ⅴ) 参数法等.

【例题2】 已知两个函数,$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ x^2 & (x\leqslant 0)\end{cases}$

(1) 当 $x\leqslant 0$ 时,求 $f[g(x)]$ 的解析式;

(2) 当 $x<0$ 时,求 $g[f(x)]$ 的解析式.

分析:已知自变量 x 的范围,根据分段函数在不同区间的解析式,先求内层函数值,再由内到外确定对应解析式.

解:(1) 当 $x\leqslant 0$ 时,$g(x)=x^2\geqslant 0$,故 $f[g(x)]=f(x^2)=(x^2)^2=x^4$;

(2) 当 $x<0$ 时,$f(x)=-x>0$,故 $g[f(x)]=g(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$.

【点拨解疑】 分段函数的解析式应分段确定,整个函数的定义域为各段函数定义域的并集,但各段端点不能取两次,例如 $(-\infty,1]\cup[1,2]\cup[2,+\infty)$ 是错误的,应写成 $(-\infty,1]\cup(1,2]\cup(2,+\infty)$.

【例题3】 在如图1-1 所示的直角坐标系中,一运动物体经过点 $A(0,9)$,其轨迹方程为 $y=ax^2+C$, $(a<0)$, $D=(6,7)$ 为 x 轴上的给定区间.

(1) 为使物体落在 D 内,求 a 的取值范围;

(2) 若物体运动时又经过点 $P(2, 8\cdot 1)$,问它能否落在 D 内,说明理由.

(1996年上海高考题)

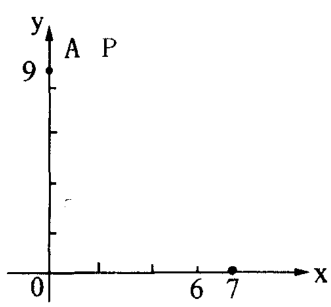


图1-1

分析:由二次函数及不等式知识易解.

解:(1) 把点 A 的坐标代入 $y=ax^2+c$,有 $9=a\cdot 0+C$ 得 $C=9$, ∴ 物体运动轨迹方程为 $y=ax^2+9$.

令 $y=0$,则 $x^2=-\dfrac{9}{a}$,又 $6<x<7, 36<x^2<49$. 则 $36<-\dfrac{9}{a}<49$,因为 $a<0$,所以 $-\dfrac{1}{4}<a<-\dfrac{9}{49}$.

(2) 把 P 点坐标 $(2,8\cdot 1)$ 代入方程 $y=ax^2+9, 8\cdot 1=a\cdot 2^2+9$,得 $a=-\dfrac{9}{40}$,物体运动轨迹方程为 $y=-\dfrac{9}{40}x^2+9$,

∵ $-\dfrac{1}{4}<\dfrac{9}{40}<-\dfrac{9}{49}$,

∴ 物体能落在 D 内.

【点拨解疑】 数学知识在其它学科中的应用是数学应用的重要方面,也是数学应用题的重要素材,应注意本例还可贴近生活,命制成飞船、人造卫星坠落到指定区域等实际应用题.

【例题4】 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$,求 $F(x)=f(x-1)+f(x+1)$ 的定义域.

分析:确定 $f(x-1)$ 与 $f(x+1)$ 的定义域的交集非空是解题关键.

解:要使 $F(x)$ 有意义,必须 $f(x-1)$ 和 $f(x+1)$ 都有意义,于是有 $\begin{cases}a\leqslant x-1\leqslant b\\ a\leqslant x+1\leqslant b\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}a+1\leqslant x\leqslant b+1 & ①\\ a-1\leqslant x\leqslant b-1 & ②\end{cases}$$

当 $b-a\geqslant 2$ 时,① 与 ② 的交集 $[a+1,b+1]$ 就是 $F(x)$ 的定义域;当 $b-a<2$ 时,① 与 ② 的交集是空集 Φ,此时 $F(x)$ 无意义.

【点拨解疑】 求函数的定义域应根据解析式中所包含的各种运算对运算对象的制约要求,通过解不等式(组)求得,因而,求函数的定义域可分为两步,第一步列出所有限制条件要求的不等式或方程,组成条件组;第二步,解条件不等式(组),其解集就是函数的定义域,全面准确揭露全部限制条件,是求函数定义域的重要前提.

【例题5】 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\geqslant 0)\\ 2x-1 & (x<0)\end{cases}$ 的反函数.

分析:依据反函数的定义,分别求出 $y=x^2-1(x\geqslant 0)$ 与 $y=2x-1(x<0)$ 的反函数,再合写成一个新的分段函数.

解:(1) 由 $y=x^2-1$,得 $x^2=y+1$,当且仅当 $y+1\geqslant 0$,即 $y\geqslant -1$ 时,x 在 $\overline{R^-}$ 上有唯一解,即 $x=\sqrt{y+1}$

$y=x^2-1(x\geqslant 0$ 的反函数是 $y=\sqrt{x+1}(x\geqslant -1)$

(2) 由 $y=2x-1$ 得 $x=\dfrac{y+1}{2}$,①

∵ $x<0$ 即 $\dfrac{y+1}{2}<0$,得 $y<-1$.

∴ 当且仅当 $y<-1$ 时,① 在 R^- 上有惟一解.

∴ $y=2x-1(x<0)$ 的反函数是 $y=\dfrac{x+1}{2}(x<-1)$

由(1)、(2) 知,

所求反函数为 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (x\geqslant -1)\\ \dfrac{x+1}{2} & (x<-1)\end{cases}$

【点拨解疑】 求反函数的步骤:

① 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

② 由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$;

③ 在 $x=f^{-1}(y)$ 中,将 x,y 互换得到 $y=f^{-1}(x)$;

④ 由 ① 求出的值域,标明反函数的定义域.

【例题6】 某地为促进淡水鱼养殖业的发展,将价格控制在适当范围内,决定对淡水鱼养殖业提供政府补贴,设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克,政府补贴为 t 元/千克,根据

市场调查,当$8\leqslant x\leqslant 14$时,淡水鱼的日供应量P千克与市场日需求量Q千克近似地满足关系$P=1000(x+t-8)(x\geqslant 8, t\geqslant 0)$,$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}(8\leqslant x\leqslant 14)$.当$P=Q$时的市场价格称为市场平衡价格.(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;(2)为使市场平衡价格不高于每千克10元,政府补贴至少为每千克多少元?

(1995年全国高考题)

分析:数学应用题的解题关键是正确找到数学模型.函数应用题则是正确找到模型函数,为此应分为三步来求.第一步,分清哪一个是自变量,哪一个是函数,本例中政府补贴t是自变量,市价平衡价格x是t的函数;第二步,由题给等量关系建立函数解析式,本例中$P=Q$就可求得$x=f(t)$;第三步,求出函数的定义域.

解:(1)依题意,由$P=Q$得

$$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$$

化简得$5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0$,当判别式$\triangle=800-16t^2\geqslant 0$时,可得

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

结合$\triangle\geqslant 0, t\geqslant 0, 8\leqslant x\leqslant 14$,得不等式组:

$$①\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50}\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14;\end{cases}$$

$$②\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50}\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14\end{cases}$$

解不等式组①,得$0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$,不等式组②无解,故所求函数关系式为$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$.定义域为$[0,\sqrt{10}]$.

(2)为使$x\leqslant 10$应有$8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 10$,化简得$t^2+4t-5\geqslant 0$,解得$t\geqslant 1$或$t\leqslant -5$(舍去),由于$t\geqslant 0$,知$t\geqslant 1$,故政府补贴至少为每千克1元.

【点拨解疑】 数学应用题的最大困难,一是生活背景不熟悉,不能数学地解释题目所给生活问题;二是读不懂题意,特别是题目中给予的临时性定义,专业用语和俚语.

对策:①运用"主题词"浓缩题意,凸现主题,例如本题"主题词"为"淡水鱼养殖、市场平衡价格、政府补贴",立知"鱼价随政府补贴而变动"的函数关系;

②扫除语言障碍,深入理解临时性定义的内涵,掌握数量关系,特别是等量关系,本例中"市场平衡价格"定义中的$P=Q$就是解题的灵魂;

③转化为熟悉的数学模型,解这个数学模型.

基础知识练习(A组)

一、选择题:

1.设函数$f(x)=ax+b$,若$f(1)=-2, f(-1)=0$,则(　　)

A.$a=1, b=-1$　　B.$a=-1, b=-1$

C.$a=-1, b=1$　　D.$a=1, b=1$

2.与函数$y=\sqrt{-2x^3}$有相同图像的一个函数是(　　)

A.$y=x\sqrt{-2x}$　　B.$y=-x\sqrt{-2x}$

C.$y=-\sqrt{2x^3}$　　D.$y=x^2\sqrt{\frac{-2}{x}}$

3.已知函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,且$f(xy)=f(x)+f(y)$,则下列各式错误的是(　　)

A.$f(1)=0$　　B.$f(x^3)=3f(x)\quad(x>0)$

C.$f(x)=0\quad(x>0)$　　D.$f(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f(x)\quad(x>0)$

4.已知$f(x)=\frac{1}{1-x}(x\in R$且$x\neq 1)$,那么当$x\neq 0, x\neq 1$时,下列四个式子中与$f[f(x)]$相等的是(　　)

A.$\frac{1}{x-f(x)}$　　B.$\frac{1}{x+f(x)}$

C.$-\frac{1}{xf(x)}$　　D.$\frac{1}{xf(x)}$

5.设$x\in R$,且$f(x)-2f(\frac{1}{x})=x$,则$f(x)$的表达式为(　　)

A.$f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{2}{3x}$　　B.$f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}$

C.$f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{2}{5x}$　　D.$f(x)=\frac{x}{5}-\frac{1}{5x}$

6.设函数$f(x)$的定义域为区间$(m,n]$,若$g(x)=f(x+1)$,则函数$g(x)$的定义域是区间(　　)

A.$(m,n]$　　B.$(m+1,n+1]$

C.$(m-1,n+1]$　　D.$(m-1,n-1]$

7.设$f(x+1)$的定义域为$[-2,2]$,则函数$f(x^2-1)$的定义域为(　　)

A.$[-1,\sqrt{3}]$　　B.$[-\sqrt{3},1]$

C.$[-2,2]$　　D.$[-4,4]$

8.若函数$f(x)$与函数$y=(x-1)^2-1(x\leqslant 0)$互为反函数,则$f(x)$为(　　)

A.$f(x)=1+\sqrt{x+1}\quad(x\geqslant -1)$

B.$f(x)=1-\sqrt{x+1}\quad(x\geqslant 0)$

C.$f(x)=1-\sqrt{x-1}\quad(x\geqslant -1)$

D.$f(x)=1-\sqrt{x+1}\quad(x\leqslant 0)$

二、填空题:

9.函数$y=log_2\frac{2x-1}{3-x}$的定义域为________.

(2000年上海高考题)

10.$f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}(x>0)$,则$f(x)=$____________.

11.若点$(1,2)$既在函数$f(x)=\sqrt{ax-b}$的图像上,又在函数$f^{-1}(x)$的图像上,则$f(x)$的解析式可以确定为________.

12.设二次函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(2-x)$,且$f(x)=0$的两实根平方和为10,图像过点$(0,3)$,则$f(x)$的解析式为________.

三、解答题:

13.设$f(x)$是有理整函数,且$f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$求$f(1-\sqrt{2})$的值.

14. 已知 $f(x)=\frac{2x+1}{x+a}$ $(x\neq -a, a\neq \frac{1}{2})$

① 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$；

② 若 $f(x)=f^{-1}(x)$，求 a 的值；

③ 作出满足 ② 中条件的 $y=f^{-1}(x)$ 的图像.

高考常考题强化训练(B 组)

一、选择题：

1. 已知 $f(x)=\begin{cases} x-5 & (x\geq 6) \\ f(x+2) & \end{cases}$ $(x\in N)$，则 $f(3)$ 的值等于(　　).

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

2. 函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是$[-2,3]$，则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是(　　).

A. $[0,\frac{5}{2}]$　　B. $[-1,4]$　　C. $[-5,5]$　　D. $[-3,7]$

3. 定义在 R 上的偶函数$f(x)$以 2 为周期，已知当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)$ 的解析式是(　　).

A. $f(x)=x+1$　　B. $f(x)=2-x$

C. $f(x)=3-|x+1|$　　D. $f(x)=2+|x+1|$

4. 已知 $f(x^6)=log_x{}^2$，那么 $f(8)$ 等于(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B.8　　C.18　　D. $\frac{1}{2}$

(2000 年春高考题)

5. 函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 对于任意的实数 x,y 都有(　　).

A. $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$

B. $f(xy)=f(x)+f(y)$

C. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

D. $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(2001 年春高考题)

6. 已知下列各函数中，是同一函数的是(　　).

① $f(x)=lgx$　　$g(x)=\frac{1}{2}lgx^2$

② $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in(-1,0) \\ x-1 & x\in(0,1) \end{cases}$　　$g(x)=f^{-1}(x)$

③ $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$　　$g(x)=x+1$

④ $f(x)=tg2x$　　$g(x)=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$

⑤ $f(x)=x^2+3x$　　$g(t)=t^2+3t$

A. ①③④　　B. ②③④　　C. ②⑤　　D. ①②④⑤

二、填空题：

7. 已知函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$，则 $g(x)=f(x+a)\cdot f(x-a)$ $(-\frac{1}{2}<a\leq 0)$ 的定义域是________.

8. 已知 $f(x)=3x-1, f[h(x)]=g(x)=2x+3, h(x)$ 为 x 的一次函数，则 $h(x)$ 的解析式是________.

9. 已知 $f(x-1)=|x|-|x-2|$，且 $f[f(t)]=f(2002)-\frac{7}{2}$，那么实数 t 的值为________.

10. 将进价为40元/个的商品标价50元/个出售时，每月能售出 500 个，每涨价 1 元，销售量就会减少 10 个，为使利润最高，售价应定为________元/个.

三、解答题：

11. 试求函数 $y=4^x-2^{x+1}$ 的反函数.

12. 在直角坐标系中，设矩形 $OPQR$ 的顶点按逆时针顺序依次为 $O(0,0), P(1,t), Q(1-2t,2+t), R(-2t,2)$，其中 $t\in(0,+\infty)$.

① 求矩形 $OPQR$ 在第一象限部分的面积 $S(t)$；

② 确定函数 $S(t)$ 的单调区间，并加以证明.

(1994 年上海高考题)

考点 4　函数的值域与最值

命题趋势走向

函数最值年年都考，难度不一，方法各异，压轴题也不鲜见，求函数最值的各种常用方法几乎都有可能考查，重要方法还常伴随一定的应用技巧，例如平均值不等式的拆项配凑技巧等，值域难度大，中学一般只涉及初等连续函数的值域的简单情形，并常与函数最值联系在一起，题目不会太难。

名师点拨解疑

【例题1】　函数 $y = a^2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值之和为3，则 $a =$ ________.

(2002年全国高考题)

分析：本小题考查二次函数的区间最大值属逆向思维题.

【例题2】　求下列函数的值域：

(1) $y = (\frac{1}{3})^{|x|}$

(2) $y = Sin^2x + 4Cosx + 1$

(3) $y = \frac{2x^2 - 8x + 3}{x^2 - 4x + 5}$

(4) $y = 2x - 5 + \sqrt{15 - 4x}$

分析：求函数值域没有通用方法和固定模式. 细心观察函数式的结构特征，联想常用方法，优先采用特殊解法，是求函数值域的重要策略. 对于(1)由式子结构，想到数形结合，对称，一望而知值域为(0,1]；对于(2)，由式子结构，立知可化为 $cosx$ 的二次函数，再配方；对于(3)，由式子结构，很快就能想分离常数或用判别式 Δ 法，对于(4)，由二次根式知，最好用换元法.

解：(1) $\because\ |x| \geq 0, 0 < (\frac{1}{3})^{|x|} \leq 1$,

$\therefore$ 值域为(0,1]；

(2) $y = \sin^2x + 4\cos x + 1 = -\cos^2x + 4\cos x + 2 = -(\cos x - 2)^2 + 6$　由 $-1 \leq \cos x \leq 1$.

$\therefore\ -3 \leq \cos x - 2 \leq -1$

$\therefore\ 1 \leq (\cos x - 2)^2 \leq 9$

$\therefore\ -3 \leq -(\cos x - 2)^2 + 6 \leq 5$

$\therefore\ -3 \leq y \leq 5$，值域为 $[-3,5]$

(3) 解法一：$\because\ y = \frac{2x^2 - 8x + 3}{x^2 - 4x + 5}$

$\therefore\ (y-2)x^2 - 4(y-2)x + 5y - 3 = 0$

由 $x \in R$，得 $\Delta = 16(y-2)^2 - 4(y-2)(5y-3) \geq 0$,

$\therefore\ -5 \leq y \leq 2$，经检验当 $x = 2$ 时，$y = -5$ 而 $y \neq 2$.

$\therefore$ 原函数有最小值 -5，无最大值，其值域为 $[-5,2)$

解法二：$y = \frac{2x^2 - 8x + 3}{x^2 - 4x + 5} = 2 - \frac{7}{(x-2)^2 + 1}$

$\because\ (x-2)^2 + 1 \geq 1$,

$\therefore\ 0 < \frac{7}{(x-2)^2 + 1} \leq 7$,

$\therefore\ -5 \leq y < 2$ 故原函数值域为 $[-5,2)$

(4) 令 $t = \sqrt{15 - 4x}(t \geq 0)$，则 $x = \frac{1}{4}(15 - t^2)$,

$\therefore\ y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 3$

当 $t = 1$，即 $\sqrt{15 - 4x} = 1, x = \frac{7}{2}$ 时，$y_{max} = 3$，无最小值，故原函数的值域是 $[-\infty,3]$

【点拨解疑】 ①求函数定义域通常是解不等式(组)，求函数值域通常是进行不等变换，注意它们的区别，结合本例深入体会.

②有的题型有法可依，有的题型无法归纳. 即使有法可套的题目，也常有解法的优劣，应注意积累，如本例(3)小题，解法一采用判别式法，但检验时不易检验出 $y \neq 2$，从而造成错解，但转换思维角度，采用解法二分离常量和配方法，其值域一目了然，准确无误，明显地比判别式法优越.

③值域与最值不是同一概念，值域是函数值的全体组成的集合，而最大值，最小值对一个函数来讲，只能有一个. 当用判别式法求得分式函数的最大值、最小值后，还应检验二次项系数为零时，其对应的 x 的值是否在定义域中.

【例题3】求下列函数的最值：

(1) $f(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1 (x \in R)$

(2) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}\quad (x > 1)$

(3) $f(x) = 2x + \sqrt{1 - 2x}$

(4) $f(x) = \frac{4sinx + 1}{2cosx - 4}$

分析：观察函数的构成，广泛联想，尝试解决，对于(1)，关于 x 的6次有理整函数，无法可依，但各项均为偶次方，可尝试分解因式，运用 $x^2 \geq 0$ 探求；对于(2)，分子次数高于分母次数，且 $x > 1$，可尝试拆项用均值；对于(3)，可从根式换元；对于(4)可化简后用直线斜率，或用正(余)弦函数的有界性.

解：(1) $f(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1 = x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1)$
$= (x^2 - 1)(x^4 - 1) = (x^2 - 1)^2(x^2 + 1)$

$\because\ x \in R, x^2 + 1 > 0$ 恒成立；

又 $x = \pm 1$ 时，$(x^2 - 1)^2 = 0$，而 $x \neq \pm 1$ 时，$(x^2 - 1)^2 > 0$,

$\therefore\ (x^2 - 1)^2(x^2 + 1) \geq 0$,

$\therefore\ f(x) \geq 0$，等号成立时 $x = \pm 1$,

$\therefore\ f(x)$ 的最小值是0，在 $x = \pm 1$ 取得.

(2) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}(x > 1)$ 可化为

$f(x) = 2(x-1) + \frac{2}{x-1} + 3 (x > 1)$,

$\because\ x > 1, \therefore\ x - 1 > 0$.

$\therefore\ f(x) \geq 2\sqrt{2(x-1) \cdot \frac{2}{x-1}} + 3 = 7$

当且仅当 $2(x-1) = \frac{2}{x-1}$

即 $x = 2$ 时取等号：$2 \in (1, +\infty)$

$\therefore$　函数的最小值是7.

(3) 令 $t = \sqrt{1 - 2x}(t \geq 0)$，则 $x = \frac{1 - t^2}{2}$,

$\therefore\ f(x)=-t^2+t+1=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$.

$\therefore$ 当 $t=\frac{1}{2}$ 时即 $x=\frac{3}{8}$ 时，$y_{max}=\frac{5}{4}$，无最小值

(4) $y=\dfrac{4(\sin x+\frac{1}{4})}{2(\cos x-2)}=2\cdot\dfrac{\sin x-(-\frac{1}{4})}{\cos x-2}$

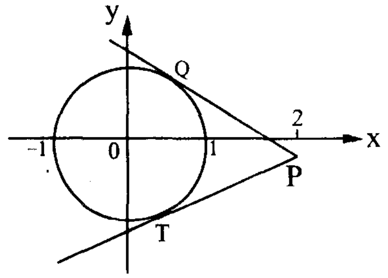


图1-2

可看作单位圆外一点 $P(2,-\frac{1}{4})$ 与圆 $u^2+v^2=1$ 上的点的所连线段的斜率的2倍，由图1-2知 $2K_{PQ}\leqslant y\leqslant 2K_{PT}$. 设过 P 点的直线方程为 $y+\frac{1}{4}=k(x-2)$，即 $kx-y-2k-\frac{1}{4}=0$，令 $\dfrac{\left|2k+\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k_1=-\frac{3}{4}$，$k_2=\frac{5}{12}$，

$\therefore\ -\frac{3}{2}\leqslant y\leqslant\frac{5}{6}$，即 $y_{max}=\frac{5}{6}$，$y_{min}=-\frac{3}{2}$.

解法二：$\because\ y=\dfrac{4\sin x+1}{2\cos x-4}$，$x\in R$

$\therefore\ 2y\cos x-4\sin x=4y+1\Rightarrow\sin(x+\varphi)=\dfrac{4y+1}{\sqrt{16+4y^2}}$

$\because\ |\sin(x+\varphi)|\leqslant 1$，

$\therefore\ \left|\dfrac{4y+1}{\sqrt{16+4y^2}}\right|\leqslant 1$

平方整理得 $12y^2+8y-15\leqslant 0$

$\therefore -\frac{3}{2}\leqslant y\leqslant\frac{5}{6}$ 故 $y_{max}=\frac{5}{6}$，$y_{min}=-\frac{3}{2}$

【点拨解疑】 求函数最值的常用方法有：

① 配方法：适用于二次函数或可化为二次函数的高次函数，根式函数等初等函数，要注意自变量的范围.

② 均值不等式法：对于三次以上的高次函数，不便配方时，应考虑利用平均值定理求最值，步骤是"一全正二凑定值三取等号"，缺一不可，其中"凑"是重要技巧，"取等"是最值的关键，使用此法只能求函数的最值中的一个.

③ 判别式法：适用于可化为二次方程 $a(y)x^2+b(y)\cdot x+c(y)=0$ 的函数 $y=f(x)$，当 $a(y)\neq 0$ 时，由 $\triangle\geqslant 0$ 求出 y 的最值后，要检验此最值对应的 x 是否在定义域中.

④ 换元法：当结构复杂时，应采用整体换元(形如 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$ 或三角换元(形如 $y=ax+\sqrt{b-x^2}$). 用换元法要注意新变量的取值范围.

⑤ 数形结合法：根据函数的图像转化为几何问题.

⑥ 函数单调性法：当上述方法难于凑效时，应考虑函数的单调性，但必须注意区间端点的开闭，在开区间的端点处，单调函数也取不到最值(见考点4).

【例题4】 求下列各函数的最值.

(1) $y=x^2(2-5x)\quad(0<x<\frac{2}{5})$ 求 y 的最大值.

(2) 若 x 满足 $2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-14\cdot\log_4x+3\leqslant 0$，求 $f(x)=\log_2\frac{x}{2}\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x}}{2}$ 的最大值和最小值.

分析：本例为条件最值，所求最值必须符合限制条件.

解：(1) $\because\ 0<x<\frac{2}{5}$，$\therefore\ 2-5x>0$

$\therefore\ y=x^2(2-5x)=\frac{4}{25}\left(\frac{5}{2}x\right)\left(\frac{5}{2}x\right)(2-5x)\leqslant\frac{4}{25}\left(\dfrac{\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}x+2-5x}{3}\right)^3=\frac{32}{675}$

上式等号成立，当且仅当 $\frac{5}{2}x=2-5x$，即 $x=\frac{4}{15}\left(0<\frac{4}{15}<\frac{2}{5}\right)$，$\therefore$ 当 $x=\frac{4}{15}$ 时，函数取得最大值 $\frac{32}{675}$.

(2) 由 $2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-14\log_4x+3\leqslant 0$

$\therefore\ 2(\log_2x)^2-7\log_2x+3\leqslant 0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\leqslant\log_2x\leqslant 3$，

$\therefore\ \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 8$

$f(x)=\log_2\frac{x}{2}\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x}}{2}=(\log_2x-1)\cdot\dfrac{\log_2\sqrt{x}-1}{\log_2\sqrt{2}}$

$=(\log_2x-1)\cdot(\log_2x-2)=\log_2^2x-3\log_2x+2$

$=\left(\log_2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\because\ \frac{1}{2}\leqslant\log_2x\leqslant 3$，

$\therefore$ 当 $\log_2x=\frac{3}{2}$，即 $x=2^{\frac{3}{2}}$ 时 $y_{min}=-\frac{1}{4}$，当 $\log_2x=3$，即 $x=8$ 时，$y_{max}=2$.

【例题5】 设 $0<a<1$，x 和 y 满足 $\log_ax+3\log_xa-\log_xy=3$，如果 y 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，求这时 a 和 x 的值.

分析：本例是逆向思维题，先将条件式由例数关系变形后，分离 x,y，转化为二次函数的最值，求出参数 a 的值.

解：原式可化为：$\log_ax+\dfrac{3}{\log_ax}-\dfrac{\log_ay}{\log_ax}=3$，即 $\log_ay=\log_a{}^2x-3\log_ax+3=(\log_ax-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$，知当 $\log_ax=\frac{3}{2}$ 时，$\log_ay$ 有最小值 $\frac{3}{4}$，$\because 0<a<1$，

$\therefore$ 此时 y 有最大值 $a^{\frac{3}{4}}$，依题意有 $a^{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$，这时 $x=a^{\frac{3}{2}}=(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$

基础知识练习(A组)

一、选择题：

1. 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 的值域为(　　)

A. $[-1,1]$　　B. $(-1,1]$

C. $[-1,1)$　　D. $(-1,1)$

2. 函数 $y=2-\sqrt{4x-x^2}(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域是(　　)