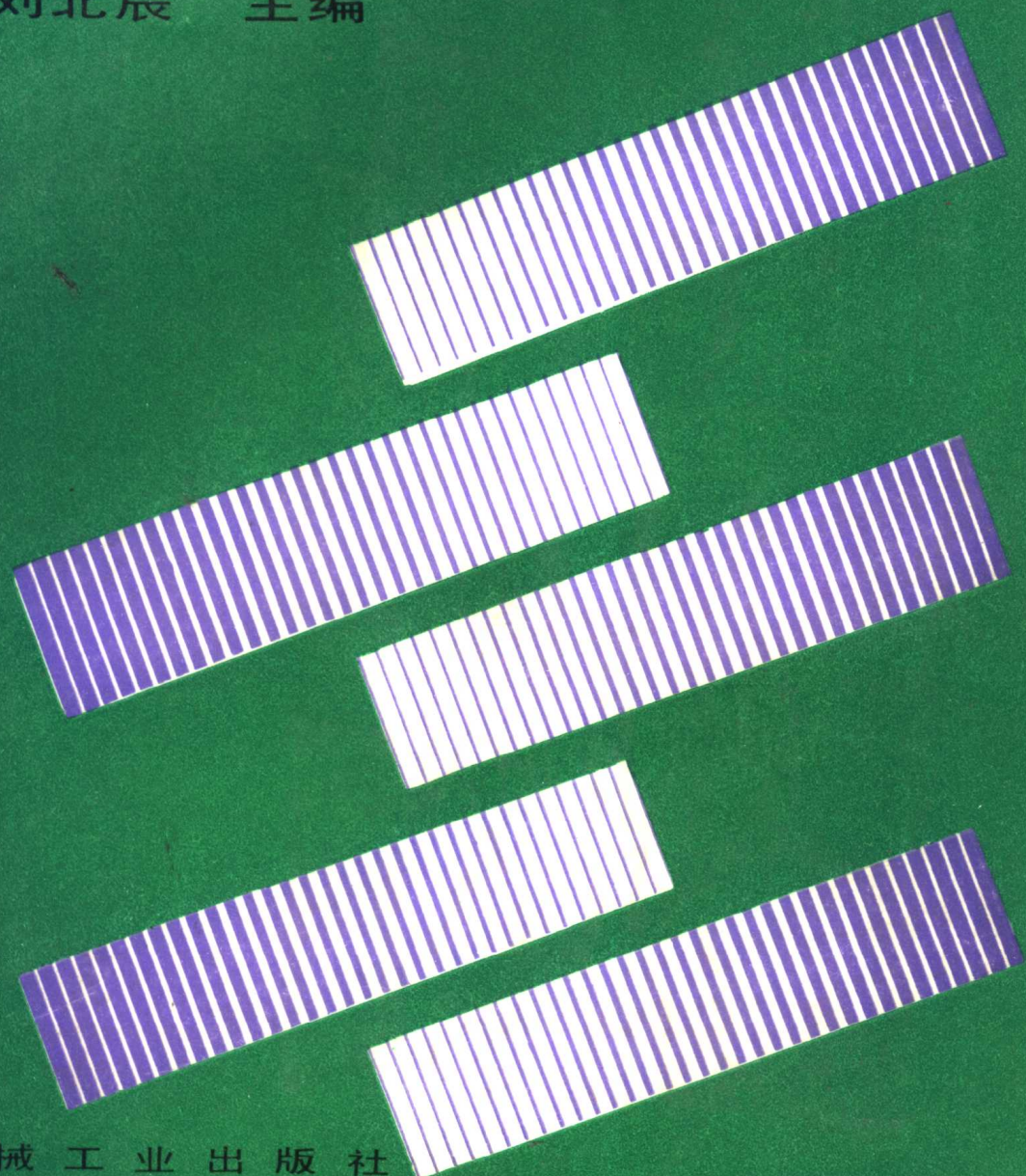


工程计算力学

——理论与应用

刘北辰 主编



机械工业出版社

工 程 计 算 力 学

——理论与应用

刘北辰 主编



机 械 工 业 出 版 社

(京) 新登字054号

本书突出的特点是理论密切结合实际应用,较全面地介绍了计算力学的各数值方法(有限差分方法、加权残数法、有限单元法、边界单元法)。

本书除详尽介绍各种方法外,着重介绍了在计算机上如何实现各种方法的工程计算,即在各种方法的理论介绍之后,附有相应的计算程序、程序使用方法及例题,并且所选程序以目前国内较普遍使用的微机为主,以便读者练习和选用。

希望通过阅读本书,能使读者学习到有关计算力学方面比较全面的知识,以便遇到有关实际问题时,能帮助读者找到适宜而又经济的方法。

本书可供从事力学及机械制造、航天航空、船舶车辆、土木建筑等工作的科技人员阅读使用,也可供高等院校有关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程计算力学:理论与应用/刘北辰主编. —北京:机械工业出版社, 1994.6

ISBN 7-111-03953-X

I. 工…

II. 刘…

III. ①工程力学:工程计算 ②工程计算:工程力学 ③应用数学

IV. TB115

出版人 马九荣(北京市百万庄南街1号 邮政编码100037)

责任编辑:朱亚冠 版式设计:霍永明 责任校对:肖新民

封面设计:肖晴 责任印制:路琳

机械工业出版社印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1994年6月第1版·1994年6月第1次印刷

787mm×1092mm¹/16·34.5印张·846千字

0 001—1 650册

定价:38.50元

前 言

本书的宗旨，是给读者提供一本较全面地介绍固体力学中的数值方法，又密切结合实际应用的书。通过这些介绍，希望能使读者学到比较全面的知识，以便在遇到问题时能找到适宜而经济的方法。在材料的选择上，力图做到理论和实用并重。书中既介绍了基本理论及有关的数值分析的方法和成果，还附有较多的程序与例题，以备读者练习和选用。

本书由刘北辰主编。各章的编者为刘北辰（绪论、第9章、第10章、第12章），屈本宁（第1章、第2章）。李国彦（第3章、第4章），陆鸿森（第5章、第11章、第13章），杨桂生（第6章、第7章、第8章、第14章）。由于我们的水平有限，书中缺点错误在所难免，欢迎批评指正。

编 者

1990年10月

目 录

绪论	1	2.2 按权函数分类	114
1 计算力学与数值方法	1	3 最小二乘配点法	120
2 掌握计算力学的必要性	2	3.1 连续型最小二乘法	120
3 掌握计算力学应注意的事项	2	3.2 离散型最小二乘法	121
第1章 有限差分方法	3	3.3 最小二乘高斯配点法	123
1 有限差分方法的基本概念	3	4 试函数	126
2 差分方程	6	4.1 概述	126
3 差分方程的近似式	9	4.2 梁函数	126
3.1 差分方程的显式近似式	10	4.3 克雷诺夫函数	127
3.2 差分方程的隐式近似式	12	5 收敛性与误差界	128
4 差分方程的稳定性	13	5.1 收敛性	128
4.1 试探法	13	5.2 误差界	130
4.2 冯·诺依曼(傅里叶级数)方法	14	参考文献	132
4.3 矩阵方法	18	第4章 加权残数法的应用	133
参考文献	25	1 弹性平面问题	133
第2章 有限差分方法的应用	26	1.1 直角坐标形式加权残数法	133
1 梁弯曲问题的有限差分解	26	1.2 极坐标形式的加权残数法	137
1.1 梁弯曲的有限差分近似式	26	2 弹性空间问题	140
1.2 变截面梁截面突变的影响	30	3 弹性薄板问题	142
1.3 文克尔弹性地基梁	32	3.1 最小二乘配点法解薄板弯曲	142
1.4 弹性半平面与弹性半空间地基上梁的 计算	37	3.2 正交多项式最小二乘配点法解薄板 弯曲	144
2 直杆扭转问题的有限差分方法	44	3.3 极坐标双调和函数最小二乘配点法	144
2.1 基本方程的差分式	44	4 弹性薄壳问题	146
2.2 外推法	45	4.1 最小二乘配点法解扁壳弯曲	146
2.3 扭转切应力的计算	47	4.2 最小二乘配点法解圆柱形网壳	151
2.4 曲线边界附近节点的差分方程	49	5 固体力学非线性问题	153
3 求解弹性薄板弯曲问题的有限差分 方法	51	5.1 矩形薄板的大挠度弯曲问题	153
3.1 薄板弯曲理论概述	51	5.2 板壳极限分析的加权残数法	155
3.2 求解薄板弯曲问题的有限差分 方法	58	参考文献	162
3.3 程序FDMBRP使用说明	117	第5章 有限单元法的一般理论	164
参考文献	110	1 有限单元法与有关变分原理	164
第3章 加权残数法	111	1.1 概述	164
1 基本概念	111	1.2 有限单元法的基本思想	165
2 方法的分类	113	1.3 几个常用的变分原理	166
2.1 按试函数分类	113	2 有限单元法分析问题的步骤	170
		3 结构离散化的一般原则	172
		3.1 单元剖分的具体方法	172

3.2 单元形状	174	3.2 应变与应力	227
3.3 单元自由度	176	3.3 单元刚度矩阵	229
4 单元位移模式与形函数	176	3.4 等效节点载荷的计算	230
4.1 选取位移模式的方法	177	4 极坐标系中的平面四节点等参单元	231
4.2 位移模式的收敛性问题	180	5 轴对称八节点等参单元	234
5 插值公式	180	6 空间问题二十节点等参单元	236
5.1 拉格朗日插值	181	6.1 坐标变换与位移模式	237
5.2 埃尔米特插值	182	6.2 应变与应力	238
6 自然坐标	184	6.3 单元刚度矩阵	240
6.1 一维自然坐标系	184	6.4 等效节点载荷的计算	240
6.2 二维自然坐标系	186	7 等参元的收敛性问题	242
6.3 三维自然坐标系	189	8 高斯积分	243
参考文献	191	9 八节点(平面与轴对称)等参元程序	245
第6章 平面三角形单元及其应用	193	9.1 P8程序中主要变量标识符	245
1 位移插值函数与形函数	193	9.2 输入数据顺序	245
1.1 单元的位移插值函数	193	9.3 考核例题	246
1.2 形函数的性质	195	9.4 P8源程序	251
2 应变矩阵与应力矩阵	197	10 二十节点空间等参元程序	262
3 单元变形能计算与单元刚度矩阵	199	参考文献	281
4 弹性体总变形能与总刚度矩阵的集成	200	第8章 板壳问题的有限单元法	282
5 等效节点载荷计算与载荷列阵	201	1 概述	282
5.1 载荷向节点移置	201	1.1 薄板弯曲的基本关系式	282
5.2 载荷列阵	204	1.2 平板单元概述	283
6 基本方程与边界条件处理	204	1.3 壳体单元概述	285
6.1 基本方程	204	2 八节点等参板单元	285
6.2 总刚度矩阵 $[K]$ 的性质	205	2.1 位移模式	285
6.3 边界条件处理	206	2.2 应变与应力	286
7 平面问题(常应变元)程序	207	2.3 单元刚度矩阵	288
7.1 P3程序中主要变量标识符	207	2.4 节点载荷	289
7.2 输入数据顺序	208	2.5 位移边界条件	289
7.3 计算简例	209	3 薄板三角形单元的混合法	289
7.4 源程序	211	3.1 基本未知量	290
参考文献	220	3.2 位移模式	291
第7章 等参数单元	221	3.3 内力模式	291
1 等参数单元的一般概念	221	3.4 单元混合矩阵	292
1.1 坐标变换	221	3.5 等效节点载荷与边界条件	295
1.2 等参概念	222	4 薄壳三角形单元的混合法	295
2 杆单元刚度矩阵的等参数推导	223	4.1 整体坐标系与局部坐标系	296
2.1 一维杆单元的插值函数	223	4.2 基本未知量与对应物理量	297
2.2 杆单元的刚度矩阵	224	4.3 局部坐标系中的单元混合矩阵 $[k']$	298
3 平面问题八节点等参单元	225	4.4 整体坐标系中的单元混合矩阵 $[k]$	298
3.1 坐标变换与位移模式	226	4.5 薄壳应力计算	299

5 八节点壳单元 239	6.3 例题 343
5.1 单元几何形状的描述 239	7 阻尼矩阵 355
5.2 位移模式 310	7.1 阻尼比 355
5.3 应变计算 312	7.2 阻尼矩阵的求得 356
5.4 应力计算 315	8 结构动力响应问题与振型叠加法 357
5.5 单元刚度矩阵 315	9 直接积分法 358
5.6 等效节点载荷的计算 316	9.1 纽马克法 359
6 八节点圆柱壳单元 316	9.2 威尔逊 θ 法 359
6.1 单元几何形状的描述 316	9.3 纽马克法与威尔逊 θ 法的计算 步骤 360
6.2 位移模式 317	10 逐步积分法的稳定性与精度问题, 基于有理近似的逐步积分法 362
6.3 应变计算 318	10.1 稳定性分析 362
6.4 应力计算 319	10.2 精度分析 365
6.5 单元刚度矩阵 319	10.3 基于有理近似的逐步积分法 366
6.6 等效节点载荷 310	参考文献 368
7 八节点等参单元程序 310	
参考文献 326	
第9章 结构动力分析的有限单元法 327	第10章 边界单元法 369
1 运动方程与质量矩阵 327	1 概述 369
1.1 有限单元动力分析的运动方程 327	2 虚应力法 370
1.2 两种质量矩阵 328	2.1 平面应变问题的克尔温解 370
2 特征值问题及其基本性质 329	2.2 边界单元的划分与基本方程 371
2.1 特征多项式与特征对 330	2.3 影响系数的计算 374
2.2 正实数特征值及其序列性 330	2.4 初应力问题与沿边界周向正应力 计算问题,任意点应力与位移的 计算 378
2.3 归一化的特征矢量与特征矢量的正 交性 330	3 虚应力法与位移不连续法的计算程 序FSTDTP 378
3 广义雅可比法 331	3.1 输入参数与输入数据文件的准备 379
3.1 求解的基本过程 331	3.2 运行中屏幕显示的内容与输出的 结果 380
3.2 变换的实现 332	3.3 例题 380
4 迭代法 333	4 位移不连续法 389
4.1 迭代法的具体步骤 334	4.1 线段两侧位移不连续的克劳契解 389
4.2 迭代法的原理简述 335	4.2 边界单元的划分与基本方程 391
4.3 正交化过程与最前几个特征对的 求法 336	4.3 影响系数的计算 392
4.4 带移动的迭代法 337	4.4 位移不连续法的解题步骤与裂纹 问题 394
5 子空间迭代法 338	4.5 位移不连续法的算例 395
5.1 瑞利商及其极值原理 338	5 直接边界积分法 397
5.2 瑞利-里兹解法 339	5.1 功的互等定理与直接边界积分法 的基本方程 397
5.3 子空间迭代法 340	5.2 边界影响系数的计算 399
6 子空间迭代法的程序LSJ2与例题 342	5.3 域内点的位移与应力计算 403
6.1 数据输入顺序与数据文件准备 342	
6.2 运行中屏幕显示的内容与输出 结果 343	

5.4 直接边界积分法的计算程序	406	1.2 切线刚度法	469
参考文献	415	1.3 初应力法	472
第11章 弹性稳定问题的有限单元法	416	1.4 初应变法	474
1 杆单元的几何刚度矩阵	416	2 塑性的数学理论	475
2 梁单元的几何刚度矩阵	419	2.1 材料在简单拉伸试验中的表现	475
3 杆系结构的稳定性分析	423	2.2 屈服准则	477
4 板单元的几何刚度矩阵	427	2.3 弹塑性应力-应变关系	483
5 板的稳定性	432	3 弹塑性矩阵的表达式	488
参考文献	434	3.1 三维空间问题弹塑性矩阵显式	488
第12章 几何非线性问题的有限单元法	435	3.2 轴对称问题的弹塑性矩阵显式	490
1 牛顿-拉斐逊方法	435	3.3 平面问题的弹塑性矩阵显式	490
2 大变形柔索结构的有限单元法	438	4 弹塑性问题的求解方法	492
2.1 单元的划分与形函数	438	4.1 增量切线刚度法	492
2.2 单元刚度矩阵	439	4.2 增量初应力法	494
2.3 柔索结构的有限元基本方程	441	4.3 增量初应变法	496
2.4 牛顿-拉斐逊法的具体运用, 切向刚度矩阵	442	4.4 增量法的特点、各方法比较以及关于收敛性的说明	497
3 按位移求解的几何非线性问题的普遍有限元模式	444	4.5 数值计算实例	497
3.1 几何非线性问题的有限元基本方程	444	5 弹-粘塑性体的基本理论	498
3.2 牛顿-拉斐逊法的应用, 切向刚度矩阵	445	5.1 弹-粘塑性体的概念	498
4 杆单元与梁单元的切向刚度矩阵	446	5.2 弹-粘塑性体的宾哈姆模型	502
4.1 杆单元的切向刚度矩阵	446	6 弹-粘塑性问题的有限单元法	503
4.2 梁单元的切向刚度矩阵	448	6.1 基本表达式	503
5 大挠度板单元的切向刚度矩阵	451	6.2 粘塑性应变增量与应力增量	504
5.1 基本关系式	451	6.3 平衡方程与平衡校正	505
5.2 $[B_0]$ 和 $[B_L]$ 计算	452	6.4 矩阵 $[H]$ 的计算	506
5.3 大挠度板的切向刚度矩阵	454	6.5 计算步骤	507
5.4 平板大挠度问题的求解步骤	455	6.6 时间步长的限制条件	508
6 大变形八节点圆柱壳单元的切向刚度矩阵	456	6.7 数值计算实例	509
7 几何非线性动力响应问题解法	461	参考文献	512
7.1 一般理论介绍	461	第14章 常用的 Basic 程序和例题	513
7.2 纽马克法与威尔逊 θ 法	462	1 求解线性代数方程组	513
7.3 用有理近似法求解非线性的动力响应问题	463	2 求逆矩阵	514
附录: K_F 中的各元素	464	3 用迭代法求矩阵的特征值与特征向量	516
参考文献	465	4 用广义雅可比法求特征值与特征向量	517
第13章 材料非线性问题的有限单元法	466	5 平面刚架程序	520
1 求解非线性弹性问题的基本方法	466	6 弹性平面问题(常应变单元)程序	530
1.1 割线刚度法	467	7 紧配合应力分析程序	534
		7.1 紧配合问题的有限元基本方程	534
		7.2 输入数据	535
		7.3 示例	536
		参考文献	542

绪 论

1 计算力学与数值方法

计算力学是以电子计算机为主要工具,用数值方法解决各种力学问题的学科。目前它在力学的各部门中都得到了很大的发展,同时在工程技术和科学研究中得到普遍应用。本书所介绍的,只限于弹性力学和塑性力学中常用的计算力学理论和方法,以及有关的计算程序。

众所周知,力学与人类社会的生产和生活有密切的联系。就变形固体力学而论,最起码的事实是:无论建造何种结构物,人们都会自觉或不自觉地考虑到它的承载能力和变形大小。随着生产的发展和生活水准的提高,结构物的形状和受力情况日益复杂,所用材料和周围的介质日益多样化,同时对整体结构和构件的设计计算也日益要求精确。生产的需求必然推动力学发展。而电子计算机的发展、完善与普及,无疑对近代力学产生了深刻的影响。

弹性力学和塑性力学在19世纪初已确立了其基本原理和基本方程。以后的长时期中,除理论上继续有发展外,大量工作集中于如何运用基本原理求解具体问题。所得成果固然是可观的,但因数学上的困难,许多解答都建立在使问题简化的假定之上,致使有的解答与实际情况相去甚远。即便是这样,仍有大量的迫切问题得不到解决,需求助于特定场合的实测或模拟实验。这除需耗费大量资金之外,还有不全面和不准确的缺点。需求和能力之间的矛盾,迫使人们不断地进行探索。在计算工具迅速发展 and 完善的背景下,从运用数值方法求解方面获得了突破性的进展。

数值方法是解决物理数学问题的手段之一,它并非近代才有,事实上目前所用的许多方法,在现代数学产生之初就曾以某种形式出现。这些方法的数值计算量极大,故在像台式计算机这样起码的运算工具出现以前,其使用很有限。随着电子计算机时代的到来,人们再度认识到数值方法的价值,并使之得到迅速发展和广泛应用。时至今日,它已成为强有力的工具。有许多问题,若不采用数值方法而仅借助于古典数学,则即使最精明的应用数学家,也难以按照当前技术所要求的水平去解决它们。所以,在计算机已相当完善和普及的现代,拒绝和轻视数值方法是不明智的。

当然,数值方法并非万能。作为一种求解方法,其结果的正确性首先取决于它得以对之实施的数学模型,而数学模型又依赖于相应的物理模型。直接把数值方法用于经典力学基本方程的求解,并不能在任何情况下都获得成功。这里还需要新型的力学定理和模式,它们既要在物理上正确,又要便于用数值计算的方法求解。这正是计算力学肩负的使命之一。往往有这样的情况,首先从力学而不是从数学角度出发提出的方法,发展成了新的、具有普遍意义的数值方法。在此过程中,数学上的深入分析是必不可少的,但这些发展毕竟导源于力学。再者,即使有了正确和完整的数学模型,也存在着由于计算量太大而无法在当前计算机的水平下得到解答的问题。例如,曾经有人估计,为求得一个紊流问题随时间变化的详细解,且将最小旋涡的影响包括在内,在1968年的技术条件下,需要的计算时间约为30年。这显然是不现实的。尽管随着技术的进步,能求得解答的问题正在不断增多,但就现在的水平

来说,总还有一些问题由于计算能力有限或花费太大而得不到解决。总之,数值方法本身也需要发展,并且正在发展,它不可能停留在一个水平上,它也不会是万能的。

2 掌握计算力学的必要性

有这样一些工程师和科学家,他们对计算力学和数值方法本身的重要性并不怀疑,但认为现在已经有了不少的大程序和许多解决个别问题的精致的小程序,作为从事工程技术或某一专门研究的人员,能使用已有成果就够了,没有必要花费时间去学习计算力学的详细内容。这种看法反映了事情的一个方面,现在的确有许多程序可供选用。但对于那些只希望找现成程序来解决问题的工程师和科学家来说,结果还是会使他们失望的。事实上,专业人员和计算机用户,如果不具备为自己的问题选用某一计算力学的方法和基本的编制程序的能力,则他能处理的问题在范围上将极其有限。即使找到了所需类型的程序或子程序,则因已有程序所用的数学模型未必准确地符合需要,或者在要求的重点上不一致,也难免出现一些问题。再者,没有一种数值方法能在任何条件下都不出麻烦、都是最优的。这些麻烦可能导致现成的程序产生错误,甚至使工作失败。进一步说,即便是有条件去请教熟悉所需资料的专家,也需具备有关知识,用正确的语言提出问题,才会得到有益的解答。

从以上的简单叙述不难看出学习计算力学及有关数值方法的必要性。严格地说,凡应用计算力学的人都应具备基本的编制程序或修改程序的能力,只有这样才能发挥出应有的效率。更值得注意的是,现有各种模拟复杂工程或物理问题的程序,事实上多由熟悉专业要求和过程内在联系的工程师和科学家所创造。由此可见,计算力学一旦为工程技术人员和从事研究工作的科学家所掌握,将会很快地转化为生产力,发挥其应有效能。

3 掌握计算力学应注意的事项

为掌握计算力学的基本内容,我们认为有以下几点值得注意。

(1) 应基本上具备弹性力学、塑性力学、结构力学的知识,以及与之有关的变分原理和基本方程。最好备有有关的各种书籍及资料,以便随时查阅。

(2) 本书中所介绍的四种方法(有限差分法、加权残数法、有限元法和边界元法),彼此有较强的独立性,可以根据需要选学,不一定要按照前后的顺序阅读。

(3) 注意基本内容的掌握与上机实算相结合。本书中附有较多的程序和例题,供读者练习或采用。读完有关章节之后,应自拟题目用这些程序试算,进一步还可改变这些程序或参照它们自己编制程序。

(4) 本书中在论述到方法的稳定性、收敛性和精度时,不可避免地会涉及一些有关的数学内容。如果对这些内容感到生疏,可以暂时跳过它们,待认为有必要时再进一步钻研。因为这样做不会影响对计算力学基本方法的掌握。

第1章 有限差分方法

有限差分方法是求解工程力学问题的有效数值方法之一。这种方法的核心是用一组有限差分方程代替微分方程或偏微分方程,从数学上作近似,使问题最终归结为求解线性代数方程组。

本章介绍有限差分方法的概念、偏微分方程的有限差分方程的建立及有限差分方程的稳定性问题,也即有关差分的基础理论。

1 有限差分方法的基本概念

以一维函数为例。设 $u(x)$ 为 x 的连续函数,其函数曲线由图1-1所示。将变量 x 的区间划分为间距为 $h = \Delta x$ 的一系列小区间。并将 $u(x)$ 在 x_r 处用泰勒级数展开得

$$u(x_r + h) = u(x_r) + hu'(x_r) + \frac{h^2}{2!}u''(x_r) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_r) + \dots \quad (1-1a)$$

及

$$u(x_r - h) = u(x_r) - hu'(x_r) + \frac{h^2}{2!}u''(x_r) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_r) + \dots \quad (1-1b)$$

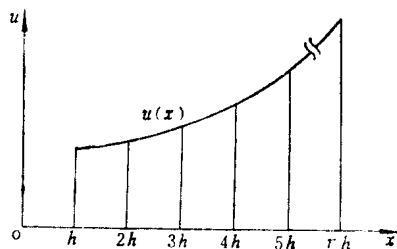


图 1-1

$$\text{令 } u_x|_r = u'(x_r) = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_r}, \quad u_{xx}|_r = \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_r}, \quad \dots$$

由式 (1-1a) 及式 (1-1b) 分别得到

$$u_x|_r = \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} - \frac{h}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}|_r - \frac{h^3}{4!}u_{xxx}|_r - \dots \quad (1-2a)$$

$$u_x|_r = \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}|_r + \frac{h^3}{4!}u_{xxx}|_r - \dots \quad (1-2b)$$

于是 x_r 点一阶导数的两个差分近似式分别为

$$u_x|_r \approx \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} = \frac{u_{r+1} - u_r}{h} \quad (1-3a)$$

$$u_x|_r \approx \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} = \frac{u_r - u_{r-1}}{h} \quad (1-3b)$$

为方便计,用 u_r 、 u_{r+1} 及 u_{r-1} 分别表示式中的 $u(x_r)$ 、 $u(x_r + h)$ 及 $u(x_r - h)$ 。

因级数被任意截断,显然有误差 E_r 。这个误差可用被截断级数部分中最大的项表示,即

$$E_r = \pm \frac{h}{2} u_{xxx}|_r = O(h) \quad \begin{matrix} x_r \leq \xi \leq x_r + h \\ x_r - h \leq \xi \leq x_r \end{matrix}$$

我们称这个误差为 h 阶的, 表为 $O(h)$ 。E, 称为截断误差。

将式 (1-2 a) 加上式 (1-2 b), 得到 u 在 x_r 处一阶导数的另一形式的差分近似式

$$u_x|_r \approx \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h} \quad (1-3c)$$

级数截断首项为

$$-\frac{h^2}{6} u_{xxx}|_r; \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

所以式 (1-3 c) 的误差是 $O(h^2)$ 阶的。

由图 1-2 可知, 式 (1-3 a) 和式 (1-3 b) 分别为以弦 PB 和 AP 表示在 $u(x)$ 曲线上过 P 点切线斜率的近似式。前一式用的是 x_r 的前一差分点的 u 值与 x_r 处的 u 值之差, 故称“向前差分”, 而后一式用的是 x_r 的后一差分点处与 x_r 处的 u 值之差, 故称“向后差分”。式 (1-3 c) 表示用弦 AB 表示 $u(x)$ 在 P 处切线斜率的近似式, 两差分点 $(x_r - h)$ 和 $(x_r + h)$ 与 x_r 对称, 故称式 (1-3 c) 为“中心差分”近似式或称为一阶中心差分近似式。

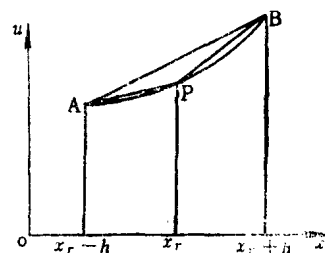


图 1-2

若以算符 Δ 、 ∇ 和 δ 分别表示向前差分、向后差分

和中心差分, 则式 (1-3 a)、式 (1-3 b) 和式 (1-3 c) 可分别写为

$$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r \approx h u_x|_r$$

$$\nabla u_r = u_r - u_{r-1} \approx h u_x|_r$$

和

$$\delta u_r = \frac{1}{2} (u_{r+1} - u_{r-1}) \approx h u_x|_r$$

应用一阶导数的差分式可推得二阶导数的差分式。

由于

$$u_{xx}|_r \approx \frac{\Delta u_r - \Delta u_{r-1}}{h}$$

将 Δu_r 及 Δu_{r-1} 代入, 经整理后得到二阶导数中心差分近似式

$$\delta^2 u_r = h^2 u_{xx}|_r = u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}$$

与此类似, 可写出三阶导数和四阶导数的中心差分式

$$\delta^3 u_r = \delta(\delta^2 u_r) = \delta(u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}) = \delta u_{r+1} - 2\delta u_r + \delta u_{r-1}$$

$$= \frac{1}{2} (u_{r+2} - u_r) - (u_{r+1} - u_{r-1}) + \frac{1}{2} (u_r - u_{r-2})$$

$$= \frac{1}{2} (u_{r+2} - 2u_{r+1} + 2u_{r-1} - u_{r-2}) \approx h^3 u_{xxx}|_r$$

$$\delta^4 u_r = \delta^2(\delta^2 u_r) = \delta^2 u_{r+1} - 2\delta^2 u_r + \delta^2 u_{r-1}$$

$$= (u_{r+2} - 2u_{r+1} + u_r) - 2(u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}) + (u_r - 2u_{r-1} + u_{r-2})$$

$$= u_{r+2} - 4u_{r+1} + 6u_r - 4u_{r-1} + u_{r-2} \approx h^4 u_{xxxx}|_r$$

上述有限差分概念可推广到多变量函数。如设 $u(x, y)$ 为变量 x 、 y 的连续函数, 将 x 、 y 平面用边长分别为 h 和 k 的矩形划分, 矩形的角点称之为节点, 如图 1-3 所示。

$x-y$ 平面内某节点 P 的坐标为

$$x = rh, \quad y = sk$$

其中, r, s 为整数。

P 点的函数值为

$$u_P = u(rh, sk) = u_{r,s}$$

$$(r, s = 0, 1, 2, \dots)$$

参照一阶导数差分近似式, 可直接写出一阶偏导数的差分式

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{r,s} = u_x|_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{h} + O(h)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r,s} = u_y|_{r,s} = \frac{u_{r,s+1} - u_{r,s-1}}{k} + O(k)$$

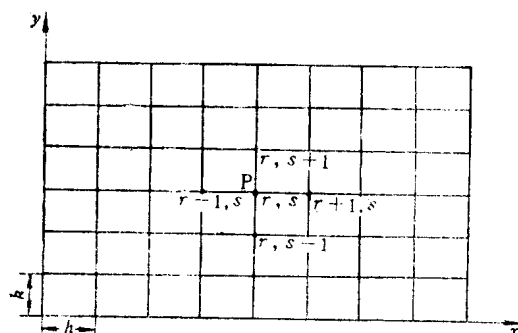


图 1-3

$u_x|_{r,s}$ 差分式中, 下标 s 不变 ($y = \text{常量}$), 在 $u_y|_{r,s}$ 差分式中, 下标 r 不变 ($x = \text{常量}$)。同理, 可获得二阶偏导数的有限差分近似式

$$u_{xx}|_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + O(h^2)$$

$$u_{yy}|_{r,s} = \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} + O(k^2)$$

混合偏导数的差分可如下导出, 即

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{r,s} = u_{xy}|_{r,s} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r,s} \right]$$

由式 (1-3 c), 得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r,s} \right] = \frac{1}{2h} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r+1,s} - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r-1,s} \right] + O(h^2)$$

式中两个对 y 方向的导数, 可用中心差分近似表示, 故

$$u_{xy}|_{r,s} = \frac{1}{2h} \left[\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1}}{2k} + \frac{k^2}{3!} u_{yyy}|_{r+1,s} + \dots - \frac{u_{r-1,s+1} - u_{r-1,s-1}}{2k} - \frac{k^2}{3!} u_{yyy}|_{r-1,s} \right] + O(h^2)$$

可写为

$$u_{xy}|_{r,s} = \frac{1}{2h} \left[\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} - u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1}}{2k} \right] + O(h^2) + O(k^2)$$

若 $k = h$, 则

$$u_{xy}|_{r,s} = \frac{1}{4h^2} [u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} - u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1}] + O(h^2)$$

同理, 可导出更高阶的混合偏导数的差分式。常用的偏导数差分式列于表1-1中。

表1-1 二变量偏导数有限差分近似式 ($h = \Delta x$)

偏 导 数	有 限 差 分 近 似 式	误 差 阶
$u_x _{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_{r,s} - u_{r-1,s}}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{2h}$	$O(h^2)$
	$\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s-1}}{4h}$	$O(h^2)$
$u_{xx} _{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2}$	$O(h^2)$
	$\frac{-u_{r+2,s} + 16u_{r+1,s} - 30u_{r,s} + 16u_{r-1,s} - u_{r-2,s}}{12h^2}$	$O(h^4)$
$u_{4x} _{r,s}$	$\frac{u_{r+2,s} - 4u_{r+1,s} + 6u_{r,s} - 4u_{r-1,s} + u_{r-2,s}}{h^4}$	$O(h^2)$
$u_{xy} _{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s+1} + u_{r-1,s-1}}{4h^2}$	$O(h^2)$
$u_{xxyy} _{r,s}$	$\frac{1}{h^4}(u_{r+1,s+1} + u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1} - 2u_{r+1,s} - 2u_{r-1,s} - 2u_{r,s+1} - 2u_{r,s-1} + 4u_{r,s})$	$O(h^2)$

2 差分方程

利用上述有限差分概念及差分式,可写出偏微分方程在某一点的有限差分近似式,这个近似式称为在该点的有限差分近似式。差分方程的建立,其实就是将偏微分方程中的偏导数用相应的差分近似式代替。

现以

(1) 热传导方程 (x 表时间) [抛物型]

$$u_x = u_{yy} \quad (1-4)$$

(2) 拉普拉斯或泊松方程 [椭圆型]

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1-5)$$

(3) 双谐调方程 [椭圆型]

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = f(x, y) \quad (1-6)$$

为例,说明建立差分方程的方法。方程的初始条件和边界条件暂不考虑。

对式 (1-4) 将方程中各偏导数用相应的差分式代入,得

$$[u_x - u_{yy}]_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} - \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{h^2} + O(h) + O(h^2) = 0$$

略去截断误差,有限差分方程表示为

$$u_{r+1,s} = \rho u_{r,s+1} + (1 - 2\rho)u_{r,s} + \rho u_{r,s-1} \quad (1-7)$$

式中, $\rho = \frac{h}{k^2}$ 。

式 (1-7) 在差分网格中涉及到的节点如图 1-4 a 所示, 方程包括 4 个节点值。

若 $\rho = 1/2$, 则 $u_{r+1,s}$ 表为 $u_{r,s+1}$ 和 $u_{r,s-1}$ 的平均值, 即

$$u_{r+1,s} = \frac{1}{2}(u_{r,s+1} + u_{r,s-1})$$

图 1-4 b 表明此时方程包含三个节点值。

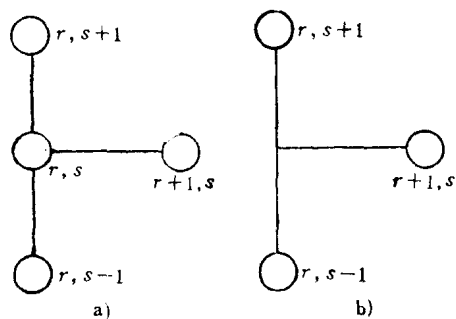


图 1-4

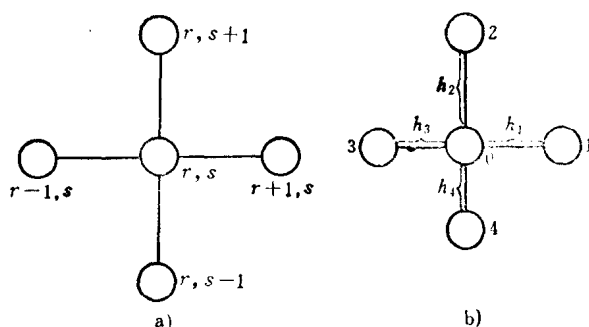


图 1-5

同理, 由表 1-1 中的偏导数差分式, 可写出拉氏方程 (1-5) 的有限差分方程式

$$[u_{xx} + u_{yy}]_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} + O(h^2) + O(k^2) = 0$$

略去截断误差, 上式可写作

$$\frac{2(h^2 + k^2)}{h^2 k^2} u_{r,s} = \frac{1}{h^2} (u_{r+1,s} + u_{r-1,s}) + \frac{1}{k^2} (u_{r,s+1} + u_{r,s-1}) \quad (1-8)$$

如图 1-5 a 所示, 式 (1-8) 包含 5 个节点值。

当 $k = h$ 时, 有

$$4u_{r,s} = u_{r+1,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s+1} + u_{r,s-1} + O(h^2) \quad (1-9)$$

此式具有 $O(h^2)$ 阶精度。

写差分方程式 (1-8) 和式 (1-9) 时, 认为各节点水平方向间距 (步长) 为 h , 垂直方向为 k 。现若允许节点 0 到 4 个节点的距离都不相同, 如图 1-5 b 所示, $0 \leq h_i \leq h$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 则可利用待定系数法确定拉氏方程的适当的差分式。为此, 可将式 (1-5) 左端表示为 5 个节点处 u 值的线性组合

$$u_{xx} + u_{yy} = \sum_{i=0}^4 \alpha_i u_i \quad (1-10)$$

式中, α_i 称为待定系数。

式 (1-10) 可解释为用 5 个指定离散点的函数值的加权线性组合来表示等号左边的项在 0 点的值。加权数 (系数) 可如下确定, 即

利用 u 在 0 附近的泰勒展开式, 有

$$u_1 = u_0 + h_1 u_x \Big|_0 + \frac{h_1^2}{2!} u_{xx} \Big|_0 + \frac{h_1^3}{3!} u_{xxx} \Big|_0 + \dots$$

$$u_2 = u_0 + h_2 u_y \Big|_0 + \frac{h_2^2}{2!} u_{yy} \Big|_0 + \frac{h_2^3}{3!} u_{yyy} \Big|_0 + \dots$$

$$u_3 = u_0 + h_3 u_{,1} \Big|_0 + \frac{h_3^2}{2!} u_{xx} \Big|_0 + \frac{h_3^3}{3!} u_{xxx} \Big|_0 + \dots$$

$$u_4 = u_0 - h_4 u_{,1} \Big|_0 + \frac{h_4^2}{2!} u_{yy} \Big|_0 - \frac{h_4^3}{3!} u_{yyy} \Big|_0 + \dots$$

将它们代入式 (1-10), 得

$$\begin{aligned} [u_{xx} + u_{yy}]_0 = & [\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4] u_0 + [\alpha_1 h_1 - \alpha_3 h_3] u_{,1} \Big|_0 \\ & + [\alpha_2 h_2 - \alpha_4 h_4] u_{,2} \Big|_0 + \frac{1}{2} [\alpha_1 h_1^2 + \alpha_3 h_3^2] u_{xx} \Big|_0 \\ & + \frac{1}{2} [\alpha_2 h_2^2 + \alpha_4 h_4^2] u_{yy} \Big|_0 + \sum_{i=1}^4 [O(\alpha_i h_i^3)] \end{aligned} \quad (1-11)$$

略去截断误差, 对比等式两端的系数, 可得

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 h_1 - \alpha_3 h_3 &= 0 \\ \alpha_2 h_2 - \alpha_4 h_4 &= 0 \\ \alpha_1 h_1^2 + \alpha_3 h_3^2 &= 2 \\ \alpha_2 h_2^2 + \alpha_4 h_4^2 &= 2 \end{aligned}$$

由这 5 个方程解得

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -2 \left(\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right), & \alpha_1 &= \frac{2}{h_1 (h_1 + h_3)} \\ \alpha_2 &= \frac{2}{h_2 (h_2 + h_4)}, & \alpha_3 &= \frac{2}{h_3 (h_1 + h_3)}, & \alpha_4 &= \frac{2}{h_4 (h_2 + h_4)} \end{aligned}$$

代入式 (1-10) 得到拉氏方程差分近似式的一般式

$$\left(\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right) u_0 = \frac{1}{h_1 (h_1 + h_3)} u_1 + \frac{1}{h_2 (h_2 + h_4)} u_2 + \frac{1}{h_3 (h_1 + h_3)} u_3 + \frac{1}{h_4 (h_2 + h_4)} u_4 \quad (1-12)$$

考察式 (1-11) 的最后一项可知式 (1-12) 的误差阶为 $O(h)$ 。

在式 (1-12) 中, 如果 $h_1 = h_3 = h$, $h_2 = h_4 = k$, 则得式 (1-8); 如果 $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, 则得式 (1-9)。

待定系数法可用于处理曲线边界附近的节点值, 因为这些节点到边界与到相邻内节点的距离不相等, 通常要作特别处理。

利用表 1-1 中偏导差分式, 可写出双谐方程 (1-6) 的差分方程。取 $k = h$, 由表 1-1 的 $u_{xx}|_{r,s}$, $u_{yyy}|_{r,s}$ 及相应的 $u_{,1}|_{r,s}$, 经整理可将式 (1-6) 写成

$$\begin{aligned} u_{r,s} = & \frac{1}{20} [8(u_{r+1,s} + u_{r,s+1} + u_{r-1,s} + u_{r,s-1}) - 2(u_{r+1,s+1} + u_{r-1,s+1} + u_{r-1,s-1} \\ & + u_{r+1,s-1}) - (u_{r+2,s} + u_{r,s+2} + u_{r-2,s} + u_{r-2,s-2})] + h^4 f_{r,s}/20 \end{aligned} \quad (1-13a)$$

式中, $f_{r,s} = f(rh, sh)$ 。

按图 1-6 的节点编号, 上式写为

$$u_0 = \frac{1}{20} [8(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - 2(u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - (u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}) + h^4 f_0] \quad (1-13b)$$

式中, $f_0 = f(x_0, y_0)$ 。

式 (1-13) 的截断误差阶是 $O(h^2)$ 的。

双谐方程 (1-6) 可用两个二阶方程代替。若引入新函数 $v(x, y)$, 则式 (1-6) 可写成两个式子, 即

$$u_{xx} + u_{yy} = v$$

$$v_{xx} + v_{yy} = f$$

当 $h = h$ 时, 它们的有限差分方程分别为

$$u_{r+1,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s+1} + u_{r,s-1} - 4u_{r,s} = h^2 v_{r,s}$$

$$v_{r+1,s} + v_{r-1,s} + v_{r,s+1} + v_{r,s-1} - 4v_{r,s} = h^2 f_{r,s}$$

按图1-6的节点编号, 此两式写为

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = h^2 v_0 \quad (1-14 a)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0 = h^2 f_0 \quad (1-14 b)$$

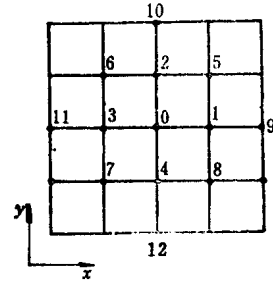


图 1-6

求解四阶的双谐方程可以转变为求解两个二阶的偏微分方程, 在某些情况下可以带来方便。差分方程 (1-13) 与式 (1-14) 比较, 前者包含13个节点的值, 后者只包含5个节点的值。列差分方程时, 后者要简便些。

3 差分方程的近似式

为建立偏微分方程的差分方程, 只要将偏微分方程中的导数用相应的差分近似式代替即可。从本章1中知, 同一阶偏导数的差分近似式并不是唯一的, 可以有多种形式, 但人们总是力求找到误差最小的形式。例如, 一阶偏导数就有“向前”、“向后”及“中心”等差分格式。应用不同的差分格式, 就能导出不同形式的差分方程; 而不同形式的差分方程, 往往具有不同的性质和精度。本节主要以抛物型方程为例, 着重说明不同形式的差分方程有不同的误差等级。

设典型抛物型方程为

$$u_t = u_{yy} \quad (1-15)$$

式中, $u(x, y)$ 为连续函数并有任意阶导数。

不考虑初始及边界条件, 容易证明

$$u_{xx} = u_{yyyy}, \quad u_{xxx} = u_{byy}, \quad \dots, \quad u_{x^m} = u_{x^m y} \quad (1-16)$$

式中, m 为任意正整数。

将 u 在点 r, s 附近展开为泰勒级数, 可得

$$u_{r+1,s} = u_{r,s} + h u_x \Big|_{r,s} + \frac{h^2}{2!} u_{xx} \Big|_{r,s} + \frac{h^3}{3!} u_{x^3} \Big|_{r,s} + \dots$$

令 $\rho = h/k^2$, 并由式 (1-16) 可写为

$$u_{r+1,s} = u_{r,s} + \rho k^2 u_{yy} \Big|_{r,s} + \frac{\rho^2 k^4}{2} u_{t^2} \Big|_{r,s} + \dots$$

或写为

$$u_{r+1,s} = u_{r,s} + \rho B + \frac{1}{2} \rho^2 D + \dots \quad (1-17)$$