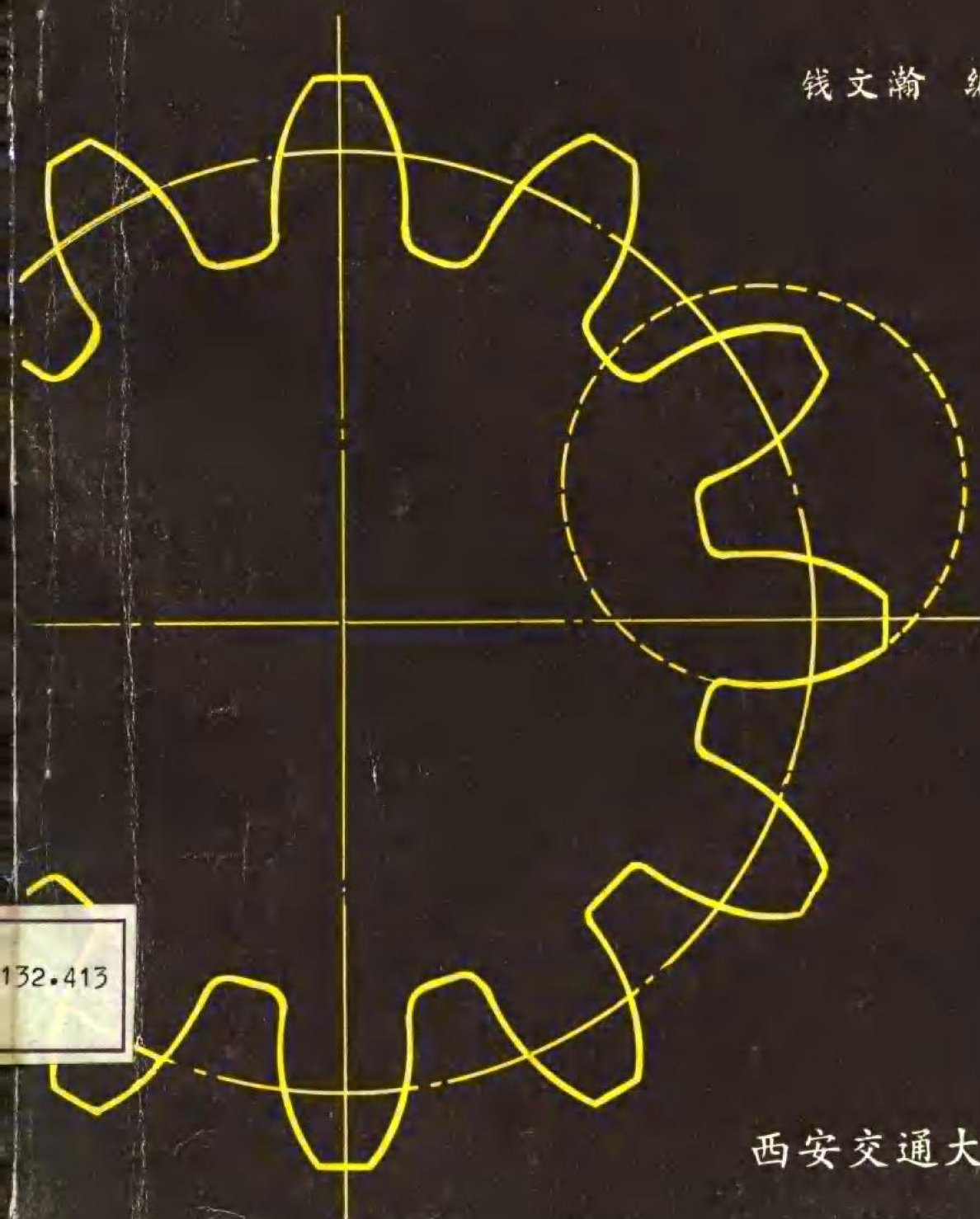


# 渐开线齿廓的 圆弧拟合

钱文瀚 编著



132.413

西安交通大学出版社

## 内 容 简 介

本书介绍了用近似圆弧逼近渐开线齿廓的理论基础,齿廓周向位置的确定,BASIC 计算程序(单圆弧和多圆弧拟合的优化程序,拟合任意渐开线的程序,分析偏差的程序),以及近似圆弧参数和查表方法,各种应用实例等。

本书主要适用于具有中等文化程度的有关技术人员阅读,也可供大学、中专、技校机械类的师生和从事线切割、成型磨齿、木模等工作的工人参考。

## 渐开线齿廓的圆弧拟合

编 著 钱 文 瀚

责任编辑 赵 孝 昶

★

西安交通大学出版社出版

(西安市咸宁路28号)

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

★

1984年10月第一版 1985年9月第一次印刷

开本 787×1092 1/16 印张 11.25 字数 267千字

印数 1-3,000

统一书号 15340·020 定价 2.40

## 序

齿轮和花键生产技术的需要，促使人们寻求渐开线齿廓的近似圆弧。经过几十年来各国齿轮工作者的不断努力，特别是利用电子计算机优化以后，求得的圆弧对渐开线已经逼近到如此精度，即不仅作图和粗加工，甚至测量和精加工，都可以近似地用圆弧来代替渐开线。这样就从根本上简化了齿轮和花键的许多生产工艺，例如：样板、铣刀、拉刀、木模的设计与制作，数控线切割编程，齿形检查和成形磨齿等。

为了推广这一成果，笔者以浅近的笔法撰写了这本书。内容取材面向生产，从事上述各项工作的工程技术人员和工人是本书的主要读者，预期它也会引起齿轮工艺、计算几何、计算机绘图、计算机辅助制造等方面的师生和研究人员的兴趣。

全书分六章。第二、三章是基础。读者可根据使用计算机的方便程度，有所侧重地阅读第四章和第五章。为了及时解决生产问题，不妨先结合第六章例题选读有关部分，而把系统地消化留待实践以后。

限于笔者的水平，书中缺点和错误在所难免，敬祈读者批评指正。

笔 者

一九八四年五月于西安交通大学

## 符 号 说 明

- $a$  中心距,  $a = \overline{OO'}$  (图 2-5~2-7)  
 $c$  近似圆弧数  
 $C$  近似圆弧的圆心 (单圆弧拟合, 图 2-12)  
 $C_i$  近似圆弧  $i$  的圆心 (多圆弧拟合, 图 2-14)  
 $C_0$  二齿之间与齿根圆相切的过渡圆弧圆心  
 $C'_0$  最小极限轮廓线上过渡圆弧圆心  
 $d$  分度圆直径  
 $d_a$  齿顶圆直径 (图 2-5~2-8)  
 $d'_a$  配对齿轮的齿顶圆直径 (图 2-5~2-7) 或齿顶圆直径的最小极限尺寸  
 $\text{deg}$  度  
 $d_f$  齿根圆直径  
 $d_f^{\sim}$  齿根圆直径的最小极限尺寸  
 $DP$  径节,  $DP = \frac{25.4}{m}$   
 $e$  偏差或最大偏差  
 $e^*$   $m=1$  时的最大偏差  
 $e_0$  工作齿廓起点的偏差  
 $e_1$  偏差的极小值  
 $e_2$  偏差的极大值  
 $e_{1000}$   $r_b=1000\text{mm}$  时的最大偏差  
 $e_a$  工作齿廓终点的偏差  
 $F$  目标函数  
 $h_a^*$  齿顶高系数  
 $h'_a$  配对齿轮的齿顶高  
 $i$  近似圆弧的序号 ( $i=1, 2, \dots, c$ , 从小到大) 或变元的序号  
 $\text{inv}$  渐开线函数,  $\text{inv} \alpha = \tan \alpha - \alpha$   
 $k$  放大倍数  
 $L$  理论啮合线  $\bar{N}\bar{N}'$  长度 (图 2-5~2-7)  
 $m$  模数  
 $M$  跨棒距  
 $\text{mm}$  毫米  
 $N$  直线与基圆相切的切点, 或步长减半的次数  
 $O$  轮心, 原点  
 $O'$  配对齿轮中心 (图 2-5~2-7)

$P$  渐开线上一点, 或特指渐开线与分度圆的交点, 或节点

$P_0$  工作齿廓的起点(图 2-4)

$P_e$  工作齿廓的终点(图 2-4)

$P_b$  渐开线齿廓与基圆的交点

rad 弧度

$r_b$  基圆半径

$r'_b$  配对齿轮的基圆半径

$r_a$  近似圆弧半径(单圆弧拟合), 或最大近似圆弧半径(多圆弧拟合)

$r_a^*$   $m=1$  时近似圆弧半径

$r'_a$  计入齿厚减薄量的近似圆弧半径

$r_i$  近似圆弧  $i$  的半径

$r_i^*$   $m=1$  时近似圆弧  $i$  的半径

$r'_i$  计入齿厚减薄量的近似圆弧  $i$  的半径

$r_f$  齿根圆半径

$r'_f$  齿根圆半径的最小极限尺寸

$\overline{S}$  分度圆弦齿厚

$\overline{S}_e$  固定弦齿厚

$W$  公法线长度

$x$  变位系数

$x, y$  渐开线上一点的坐标

$x_0, y_0$  工作齿廓的起点坐标

$x_e, y_e$  工作齿廓的终点坐标

} 渐开线位置如图 2.1 所示

$x_a, y_a$  近似圆弧(单圆弧拟合)或最大近似圆弧(多圆弧拟合)的圆心坐标, 第二章各式按图 2-12 或 2-14 所示渐开线位置, 式(5-2)、(5-3)取图 5-3、5-4、5-7 中渐开线位置

$x_a^*, y_a^*$   $m=1$  时近似圆弧的圆心坐标(图 5-1、5-5)

$x_i, y_i$  近似圆弧  $i$  的圆心坐标, 第二章各式按图 2-14 所示渐开线位置, 式(5-3)取图 5-4 中渐开线位置

$x_i^*, y_i^*$   $m=1$  时近似圆弧  $i$  的圆心坐标(图 5-2、5-6)

$z$  齿数

$z'$  配对齿轮齿数

$\alpha$  齿形角, 分度圆上压力角

$\delta$  收缩率

$\Delta M$  跨棒距平均偏差的绝对值

$\Delta r$  近似圆弧半径的修正量

$\Delta \overline{S}$  分度圆弦齿厚平均偏差的绝对值(图 3-5)

$\Delta \overline{S}_e$  固定弦齿厚平均偏差的绝对值(图 3-4)

$\Delta W$  公法线长度平均偏差的绝对值(图 3-3)

$s$  以圆心角计量的齿厚(单边)减薄量

$\eta$  槽宽半角 (图 3-1)  
 $\eta'$  计入齿厚减薄量的槽宽半角  
 $\eta_b$  基圆上槽宽半角 (图 3-2), 程序 4-4 中按照图 4-7  
 $\eta'_b$  计入齿厚减薄量的基圆上槽宽半角  
 $\theta = \angle COP$  (图 5-3、5-7)  
 $\mu\text{m}$  微米  
 $\xi = \angle COJ = \angle COK$  (图 2-12、2-14)  
 $\xi^*$  由式(5-8)定义  
 $\pi$  圆周率  
 $\rho_c$  近似圆弧圆心的向径,  $\rho_c = \overline{OC}$  或  $\overline{OC}_i$  (图 2-12、2-14)  
 $\rho_c^*$   $m=1$  时近似圆弧圆心的向径  
 $\sigma$  齿厚半角 (图 3-1)  
 $\sigma'$  计入齿厚减薄量的齿厚半角  
 $\sigma_b$  基圆上齿厚半角 (图 3-2)  
 $\sigma'_b$  计入齿厚减薄量的基圆上齿厚半角  
 $\tau_{i,i-1}$   $\overline{C_i C_{i-1}}$  的方向角 (图 5-2、5-6)  
 $\phi$  展开角 (图 2-1)  
 $\phi_0$  工作齿廓起点的展开角  
 $\phi_e$  工作齿廓终点的展开角  
 $\psi_c$  近似圆弧圆心 (单圆弧拟合) 或最大近似圆弧圆心 (多圆弧拟合) 的幅角 (图 2-12、2-14)  
 $\psi_c^*$  由式(5-7)定义  
 $\psi_i$  近似圆弧  $i$  的幅角 (图 2-14、5-4)  
 $\psi_i^*$  由式(5-9)定义  
 $\overline{\psi} = \psi_{i+1} - \psi_i$  (图 2-14、5-4)  
 $\overline{\psi}^*$  由式(5-10)定义

# 目 录

|                                               |        |
|-----------------------------------------------|--------|
| 第一章 引言                                        | ( 1 )  |
| § 1 问题的提出                                     | ( 1 )  |
| § 2 历史的回顾                                     | ( 2 )  |
| 表 1-1 系数 $r_1^*$ , $r_2^*$                    | ( 2 )  |
| 第二章 渐开线齿廓圆弧拟合的理论基础                            | ( 5 )  |
| § 1 渐开线的特性与参数方程                               | ( 5 )  |
| § 2 工作齿廓的起点与终点                                | ( 5 )  |
| § 3 代用圆弧与渐开线齿廓之间的偏差                           | ( 7 )  |
| 表 2-1 $e$ 、 $\frac{de}{d\phi}$ 随 $\phi$ 变化的情况 | ( 9 )  |
| § 4 单圆弧拟合                                     | ( 10 ) |
| § 5 多圆弧拟合                                     | ( 11 ) |
| 第三章 齿廓的周向位置                                   | ( 14 ) |
| § 1 齿厚半角与槽宽半角                                 | ( 14 ) |
| § 2 侧隙对周向位置的影响                                | ( 15 ) |
| § 3 修正量 $\Delta r$ 与 $e$ 的计算                  | ( 16 ) |
| 表 3-1 修正量计算公式                                 | ( 18 ) |
| 第四章 渐开线齿廓圆弧拟合的 BASIC 程序                       | ( 19 ) |
| § 1 单圆弧拟合的优化程序                                | ( 19 ) |
| 表 4-1 标识符说明                                   | ( 19 ) |
| 程序 4-1                                        | ( 21 ) |
| [例 4-1] 拟合 $m=1$ 、 $z=48$ 的标准齿廓               | ( 25 ) |
| § 2 多圆弧拟合的优化程序                                | ( 26 ) |
| 程序 4-2                                        | ( 27 ) |
| 表 4-2 标识符的补充说明                                | ( 29 ) |
| [例 4-2] 拟合 $m=22$ 、 $z_1/z_2=23/47$ 的标准齿廓     | ( 30 ) |
| § 3 分析偏差的程序                                   | ( 31 ) |
| [例 4-3] 分析 HKM3 双圆弧拟合偏差                       | ( 31 ) |
| 程序 4-3                                        | ( 32 ) |
| [例 4-4] 分析《齿车便览》三圆弧拟合偏差                       | ( 34 ) |
| § 4 拟合任意渐开线廓线的程序                              | ( 35 ) |
| 程序 4-4                                        | ( 36 ) |
| [例 4-5] 渐开线凸轮廓线的多圆弧拟合                         | ( 38 ) |

|                                                                                      |         |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>第五章 近似圆弧参数表及查找方法</b> .....                                                        | ( 39 )  |
| § 1 标准渐开线齿轮.....                                                                     | ( 39 )  |
| § 2 $\alpha=14\frac{1}{2}^\circ$ 而 $h_a^*=1$ 的渐开线齿轮.....                             | ( 42 )  |
| § 3 标准渐开线花键.....                                                                     | ( 42 )  |
| § 4 任意渐开线齿廓.....                                                                     | ( 44 )  |
| 表 5-1 $m=1$ 的标准渐开线齿轮与齿条啮合时工作齿廓的近似圆弧参数 ...                                            | ( 46 )  |
| 表 5-2 $m=1$ 的标准渐开线齿轮与几种齿轮啮合时工作齿廓的<br>近似圆弧参数.....                                     | ( 60 )  |
| 表 5-3 $m=1$ 、 $\alpha=14\frac{1}{2}^\circ$ 、 $h_a^*=1$ 的齿轮与齿条啮合时工作齿廓的<br>近似圆弧参数..... | ( 95 )  |
| 表 5-4 $m=1$ 的标准渐开线花键工作齿廓的近似圆弧参数.....                                                 | ( 43 )  |
| 表 5-5 任意渐开线齿廓的近似圆弧参数 .....                                                           | ( 113 ) |
| <b>第六章 应用</b> .....                                                                  | ( 144 ) |
| § 1 成形磨齿.....                                                                        | ( 144 ) |
| [例 6-1]分度机构中齿轮的成形磨齿(表 5-2).....                                                      | ( 144 ) |
| § 2 齿轮模具的数控线切割.....                                                                  | ( 145 ) |
| [例 6-2]仪表齿轮的精冲模(表 5-2).....                                                          | ( 145 ) |
| [例 6-3]扇形齿轮的精冲模(表 5-5 及电算) .....                                                     | ( 146 ) |
| [例 6-4]电视机高频头塑料齿轮的注射模(表 5-1).....                                                    | ( 148 ) |
| [例 6-5]仪表用塑料齿轮的注射模(表 5-2).....                                                       | ( 149 ) |
| [例 6-6]柴油机油泵(变位)齿轮的粉末冶金成形模(表 5-5 及电算) .....                                          | ( 150 ) |
| § 3 齿轮配件的数控线切割.....                                                                  | ( 154 ) |
| [例 6-7]不完全齿轮机构(表 5-2).....                                                           | ( 154 ) |
| [例 6-8]塑料挤出机的齿轮联轴器(表 5-2 及电算) .....                                                  | ( 155 ) |
| [例 6-9]计数器的变位齿轮(表 5-5 及电算) .....                                                     | ( 157 ) |
| [例 6-10]齿轮磨床的渐开线凸轮廓线(电算).....                                                        | ( 162 ) |
| § 4 成形刀具样板、靠模、量规的设计与制作.....                                                          | ( 163 ) |
| [例 6-11]球磨机齿圈指形铣刀的样板和靠模(表 5-2) .....                                                 | ( 163 ) |
| [例 6-12]织机铸铁齿轮铝模的专用铣刀(表 5-3) .....                                                   | ( 165 ) |
| [例 6-13]渐开线花键的通过环规(表 5-4) .....                                                      | ( 165 ) |
| [例 6-14]联轴器内齿圈铣刀(表 5-1) .....                                                        | ( 166 ) |
| § 5 齿形放大图的绘制.....                                                                    | ( 167 ) |
| [例 6-15]石英电子表齿轮的齿形放大图(电算).....                                                       | ( 167 ) |
| § 6 齿轮木模的划线.....                                                                     | ( 169 ) |
| [例 6-16]轧面机的铸铁齿轮木模(表 5-2) .....                                                      | ( 170 ) |
| 参考文献.....                                                                            | ( 170 ) |

# 第一章 引言

## § 1 问题的提出

为什么要用近似圆弧来代替渐开线齿廓？它在生产上有什么价值？

大家知道，齿轮是通过齿廓来传递运动和动力的。齿廓的形状和精度不仅直接影响运动精度，还同强度、噪声、效率等有密切关系。十八世纪中叶，数学家欧拉(Leonhard Euler)提出用圆的渐开线作为齿廓曲线。除了共轭这一基本特性(理论上，一对渐开线齿廓啮合时，能保证传动比严格不变)外，它还有许多别的优点：

- 一齿轮可以跟不同齿数的齿轮相啮合；同样，一把滚刀或插齿刀可以切出不同齿数的齿轮；
- 中心距偏差不影响传动比；
- 压力角不变，因而传动平稳；
- 齿条齿廓是直线，渐开线的形成也不难，所以工艺装备较简单、精确；
- 可以通过变位改变齿轮的参数，以适应生产上不同的要求。

凡此种种，使渐开线齿廓的齿轮在齿轮中占压倒多数，估计这种情况在本世纪内不会有多大变化。此外，渐开线齿廓还广泛用于花键与联轴器。

最简单的曲线是圆弧。它的绘制和加工比渐开线方便得多。用近似圆弧代替渐开线齿廓(图 1-1)，可以从根本上简化齿轮和花键的一系列作图、加工和测量问题。

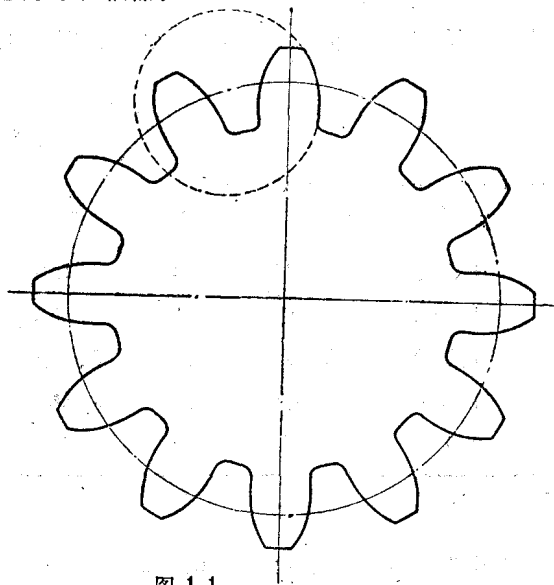


图 1-1

与展成法相比，成形磨齿的生产率要高好多倍，而且精度稳定，可以磨内齿轮、小齿数齿轮等，其要害在于砂轮的修整，按圆弧修整比按渐开线修整简单。另外，生产上有很多齿轮或花键的模具(如仪表齿轮的冲模、塑料齿轮的注射模、粉末冶金齿轮的成形模)、量具(如渐开线花键的量规)和配件(尤其是特殊齿轮、内齿轮、花键孔)需要在数控线切割机上加工，但数控装置通常只能作直线或圆弧插补，不能作渐开线插补，如后者代以近似圆弧，问题就迎刃而解了。至于近似圆弧给设计和制作样板、铣刀、拉刀、木模带来的方便，就不赘述了。

据估计，全世界年产齿轮约二百亿个，对其生产工艺的每一项改进，都会带来巨大的经

济效益。

## § 2 历史的回顾

早在三十年代, 在一本美国《机构学》教科书<sup>[1]</sup>里, 为了绘制齿轮的方便, 已经给出了圆心设在基圆上的①近似圆弧半径表。嗣后, 苏联新克拉马托尔斯克机器制造厂(HKM3)在齿轮铣刀设计中也用圆弧代替渐开线<sup>[2]</sup>, 既简化了计算, 又便于磨刀砂轮的修整。他们的方法是: 在分度圆上截取对称于轮齿中线的二点 $P$ 、 $P'$ (图 1-2),  $PP'$ 之长等于分度圆弦齿厚 $\bar{S}$ 。以 $P$ 为圆心,  $r_1$ 、 $r_2$ 为半径在基圆上截取 $C_1$ 、 $C_2$ 二点, 再以 $C_1$ 、 $C_2$ 为圆心,  $r_1$ 、 $r_2$ 为半径作 $\widehat{PB}$ 、 $\widehat{PA}$ 二条圆弧, 分别代替渐开线齿廓的齿根部分与齿顶部分。取

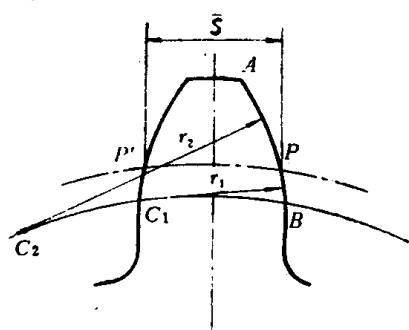


图 1-2

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= m r_1^* \\ r_2 &= m r_2^* \end{aligned} \right\} (1-1)$$

式中  $m$ ——模数;

$r_1^*$ 、 $r_2^*$ ——系数, 对于  $\alpha=20^\circ$  的标准齿形, 按下式计算或从表 1-1 查取。

$$r_2^* = \frac{z}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \frac{z-1}{z+1}} \quad (1-2)$$

$$r_1^* = \frac{z^2 \sin^2 \alpha}{4 r_2^*} \quad (1-3)$$

式中  $z$ ——齿数;

$\alpha$ ——齿形角。

当  $z \geq 55$  时, 只要用半径为  $r_2$  的一条圆弧来代替渐开线就可以了。

表 1-1 系数  $r_1^*$ 、 $r_2^*$

| $z$ | $r_1^*$ | $r_2^*$ | $z$ | $r_1^*$ | $r_2^*$ | $z$ | $r_1^*$ | $r_2^*$ |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 12  | 1.396   | 3.017   | 19  | 2.453   | 4.304   | 35  | 5.024   | 7.131   |
| 13  | 1.542   | 3.205   | 21  | 2.766   | 4.663   | 42  | 6.179   | 8.349   |
| 14  | 1.690   | 3.391   | 23  | 3.082   | 5.020   | 55  |         | 10.598  |
| 15  | 1.840   | 3.576   | 26  | 3.561   | 5.552   | 80  |         | 14.901  |
| 17  | 2.144   | 3.942   | 30  | 4.207   | 6.256   | 135 |         | 24.334  |

就渐开线齿廓的齿顶部分来说, 曲率半径在 $P$ 点最小, 为 $\frac{mz}{2} \sin \alpha$ , 越近齿顶, 曲率半径越大。式(1-2)所取近似圆弧半径, 相当于半径(与齿轮中心的距离)约为 $\frac{mz}{2} + 0.4m$ 处

① 其依据也许是: 渐开线上任一点的曲率中心都在基圆上(请参看第二章§1)。

渐开线的曲率半径。式(1-3)是根据二圆弧在 $P$ 点相切的条件推出的。② 这些公式一直沿用至今<sup>[8]</sup>。

苏联在刀具设计中还采用：(1)过齿廓上三点作圆弧<sup>[2]</sup>。(2)圆心在齿廓上二点连线的垂直平分线上而弧长等于这段齿廓长度的代用圆弧<sup>[2][4]</sup>。这些方法计算虽较复杂，但适用面广，齿轮参数不受限制。

1950年，休森(Douglas Hughson)在一篇提交美国工业数学会齿轮研究组的论文中，对近似圆弧的偏差作了精辟的理论分析<sup>[5]</sup>。Vince公司依据他的理论制作了大齿轮齿形检查仪。

日本会田俊夫<sup>[6]</sup>和斋藤博等<sup>[7]</sup>也先后制成以圆弧为基准的大齿轮齿形检查仪。前者以 $N$ 为圆心， $NP$ 为半径(图1-3)；后者在渐开线齿廓上半径分别为 $m\left(\frac{z}{2}-1\right)$ 、 $\frac{mz}{2}$ 、 $m\left(\frac{z}{2}+1\right)$ 处取三点来决定近似圆弧。此外，《齿车便览》介绍了用3~4条圆弧拟合 $\alpha=14\frac{1}{2}^\circ$ 齿形的样板尺寸<sup>[8][9]</sup>。

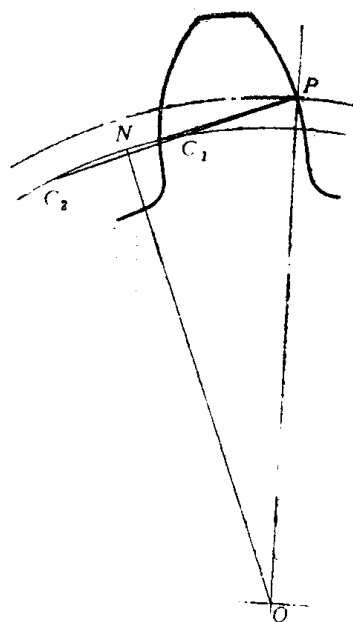


图 1-3

电子计算机的普及，为进一步提高拟合精度创造了条件。七十年代初津田等用最小二乘法得到当时最好的单圆弧逼近<sup>[10]</sup>。以 $m=1$ 、 $z=48$ 的标准齿轮为例，其最大偏差约为 $3.3\mu\text{m}$ ，此值为<sup>[6]</sup>的 $\frac{1}{4}$ 或<sup>[7]</sup>的 $\frac{2}{3}$ 。

把津田法的偏差与日本工业标准JIS0级齿轮齿形的容许偏差(大致相当于我国齿轮标准的5级)相比(图1-4)，无怪他的成果能应用于成形磨齿了。

作者出于数控线切割编程的需要<sup>[11][12][13]</sup>

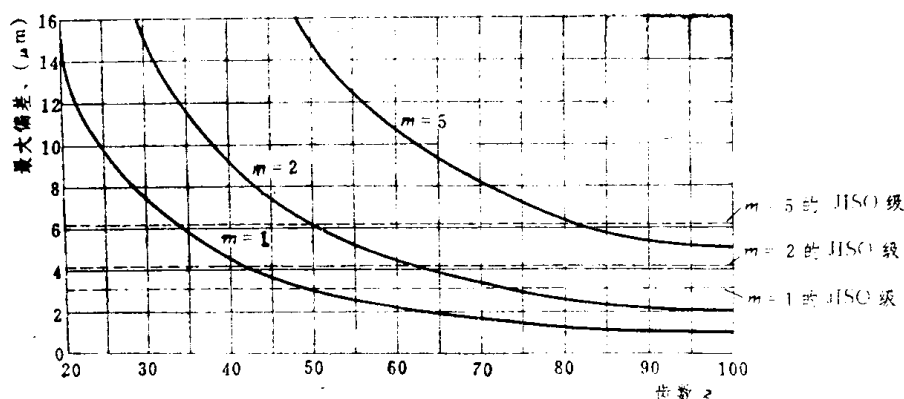


图 1-4

② 为了保证大小圆弧在 $P$ 点相切， $C_1C_2P$ 应当在同一直线上(图1-3)。过 $P$ 作基圆的切线 $PN$ 。

$$\text{弦切角 } \angle C_1NP = \frac{1}{2} \widehat{C_1N} = \angle C_1C_2N$$

$$\therefore \triangle PC_1N \sim \triangle PNC_2$$

$$\text{有 } \frac{C_1P}{PN} = \frac{PN}{C_2P}$$

$$\text{于是 } r_1 = C_1P = \frac{PN^2}{C_2P} = \frac{\left(\frac{mz \sin \alpha}{2}\right)^2}{r_2} = \frac{mz^2 \sin^2 \alpha}{4r_2}$$

$$\therefore r_1 = \frac{z^2 \sin^2 \alpha}{4r_2}$$

而涉猎这一课题。反复推敲触发了灵机：既然评价拟合好坏的准则并非若干点偏差的平方和而是最大偏差，以减少后者为目标岂不更好！计算的结果令人惊喜，所得偏差还不到津田的一半（图1-5）<sup>[14][15]</sup>。偏差大幅度下降的部分原因，是以该齿轮与齿条相啮合时的工作齿廓而不是以工作齿高内的齿廓为拟合对象。若该齿轮与其他外齿轮相啮合，则工作齿廓更短，偏差更小。

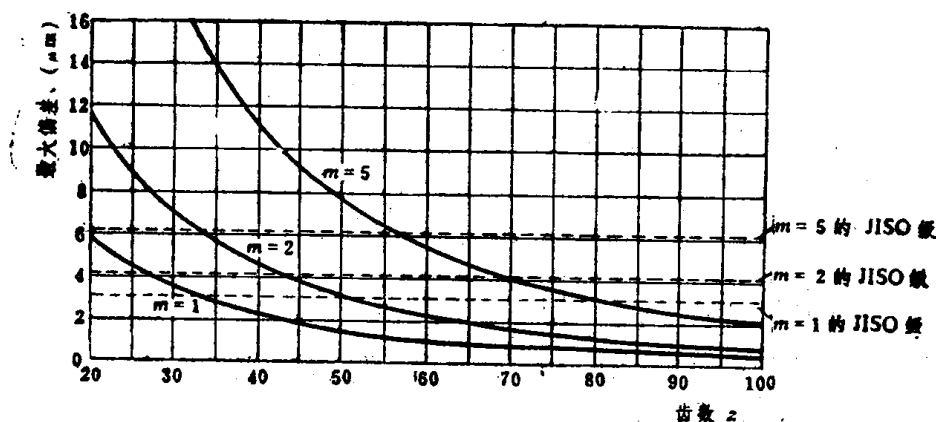


图 1-5

近年来，作者针对微型计算机运算速度慢和精度低的缺点而采取有效措施，把近似圆弧的优化程序移植到微型机上，建立了多圆弧拟合渐开线齿廓的理论和算法。以  $m=1$ 、 $z=48$  的标准齿轮为例，这样得到的双圆弧拟合偏差约为  $0.258\mu m$ ，是单圆弧拟合的  $\frac{1}{6.29}$ ，是 HKM3<sup>[2]</sup> 双圆弧拟合的  $\frac{1}{8.44}$ 。再比较  $z=35$ 、 $\alpha=14\frac{1}{2}^\circ$  的三圆弧拟合，其偏差仅为《齿车便览》<sup>[8][9]</sup> 的  $\frac{1}{12.89}$ 。随着拟合精度的提高，近似圆弧的适用范围大大地扩大了。

综上所述：这一课题能取得今天的进展，是各国齿轮工作者不断努力的结果。

## 第二章 渐开线齿廓圆弧拟合的理论基础

### § 1 渐开线的特性与参数方程

将直线沿一圆作纯滚动(图 2-1),直线上任一点  $P$  的轨迹,就是该圆的渐开线。这个圆叫做渐开线的基圆。直线  $\overline{PN}$  叫做渐开线的发生线。

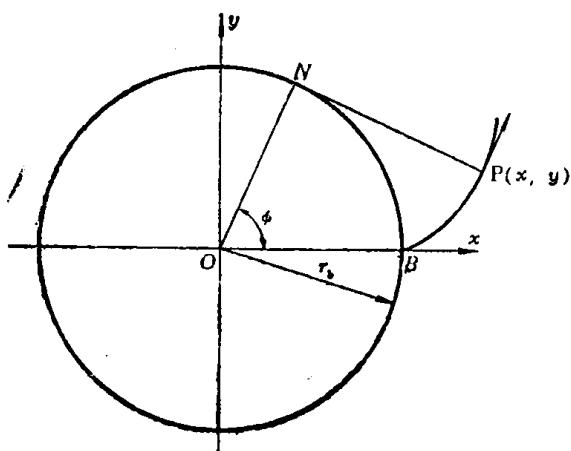


图 2-1

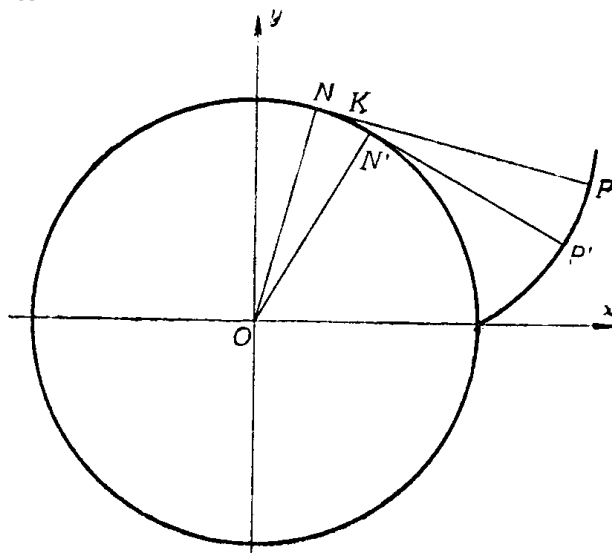


图 2-2

由此可知渐开线有以下特性:

1. 发生线沿基圆滚过的长度等于它在基圆上滚过的弧长, 即

$$\overline{PN} = \widehat{BN} = r_b \phi \quad (2-1)$$

式中  $r_b$ ——基圆半径;

$\phi$ ——展开角(rolling angle)。

2.  $P$  的瞬时速度垂直于发生线  $PN$ 。既然瞬时速度与  $P$  的轨迹——渐开线相切, 所以  $\overline{PN}$  是渐开线的法线, 同时又是基圆的切线。

3. 设在  $P$  近旁的渐开线上取另一点  $P'$  (图 2-2), 其法线为  $P'N'$ 。二法线的交点记作  $K$ 。当  $P'$  趋近  $P$  时,  $N'$  连同  $NN'$  间的  $K$  也趋近于  $N$ 。这时的  $K$  即  $N$  就是渐开线在  $P$  点的曲率中心。 $PN$  是曲率半径。由式(2-1)知,  $\phi$  越大则曲率半径越大。

根据前二个特性可写出渐开线的参数方程

$$\left. \begin{aligned} x &= r_b (\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ y &= r_b (\sin \phi - \phi \cos \phi) \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

### § 2 工作齿廓的起点与终点

渐开线齿廓通常只有一部分在工作过程中与共轭齿廓相接触, 这部分叫做工作齿廓。它

的几何精度关系到齿轮传动的运动精度、接触情况和平稳性，所以重要的是把近似圆弧尽可能地逼近工作齿廓而不必顾及其余部分。

至于齿轮联轴器和渐开线花键联接，工作齿廓指的是轴（被包容面）与孔（包容面）相接触的那部分（图 2-3）。

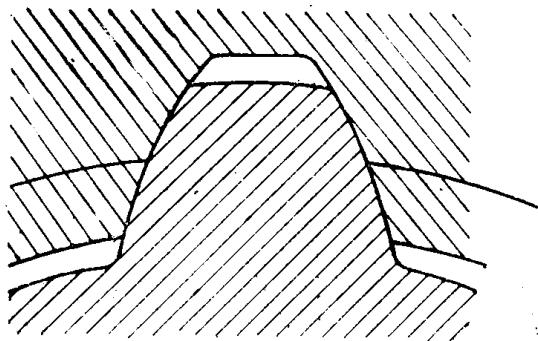


图 2-3

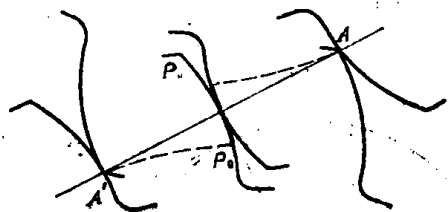


图 2-4

在一对齿轮的啮合过程中（图 2-4），主动齿廓的接触点从齿根逐渐移向齿顶；从动齿廓的接触点从齿顶逐渐移向齿根，而接触点始终在二基圆的一条内公切线  $\overline{NN'}$  被两个齿顶圆所截的线段——啮合线  $\overline{AA'}$  上。以二轮中心  $O, O'$  为圆心， $\overline{OA'}$ 、 $\overline{O'A}$  为半径分别作圆弧（虚线），它们和齿顶圆之间的渐开线就是工作齿廓（粗线），后者两个端点分别记作  $P_0$ （靠近齿根）和  $P_1$ （齿顶圆上）。

现在来求  $P_0$  和  $P_1$  的展开角  $\phi_0$  和  $\phi_1$ 。

在外啮合中（图 2-5），

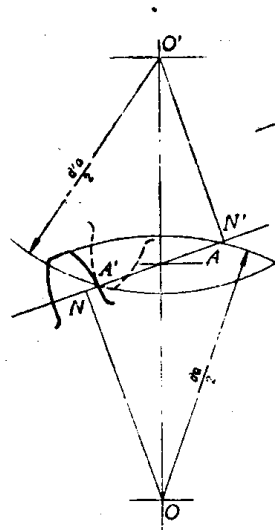


图 2-5

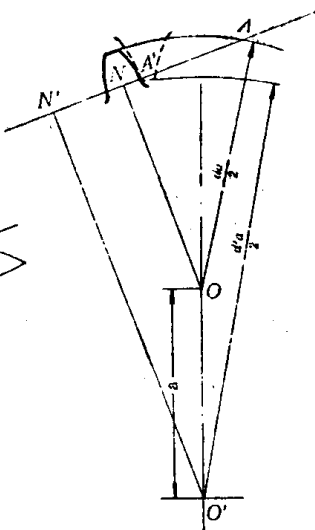


图 2-6

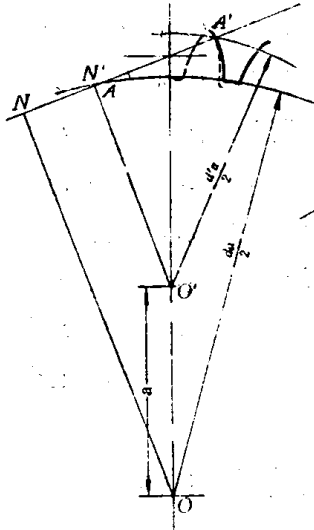


图 2-7

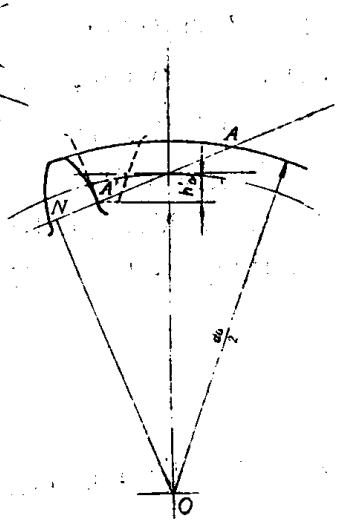


图 2-8

$$\phi_0 = \frac{\overline{A'N}}{r_b} = \frac{\overline{NN'} - \overline{A'N'}}{r_b} = \frac{\sqrt{a^2 - (r_b + r'_b)^2} - \sqrt{(d'_a/2)^2 - r'^2_b}}{r_b} \quad (2-3)$$

式中  $a$  ——中心距;

被研究的齿廓在齿数为  $z$ , 基圆半径为  $r_b$ , 齿顶圆直径为  $d_a$  的齿轮上, 而配对齿轮的相应参数是  $z'$ ,  $r'_b$ ,  $d'_a$ 。

对于内啮合的外齿轮 (图 2-6),

$$\phi_0 = \frac{\overline{A'N}}{r_b} = \frac{\overline{A'N'} - \overline{NN'}}{r_b} = \frac{\sqrt{(d'_a/2)^2 - r'^2_b} - \sqrt{a^2 - (r'_b - r_b)^2}}{r_b} \quad (2-4)$$

对于内啮合的内齿轮 (图 2-7),

$$\phi_0 = \frac{\overline{A'N}}{r_b} = \frac{\overline{A'N'} + \overline{NN'}}{r_b} = \frac{\sqrt{(d'_a/2)^2 - r'^2_b} + \sqrt{a^2 - (r'_b - r_b)^2}}{r_b} \quad (2-5)$$

式(2-3)~(2-5)可归并为一式

$$\phi_0 = \frac{\operatorname{sgn} a \sqrt{a^2 - (r_b + r'_b)^2} - \operatorname{sgn} z' \sqrt{d'^2_a/4 - r'^2_b}}{r_b} \quad (2-6)$$

请注意: 式(2-6)中内齿轮的  $z$  或  $z'$ ,  $r_b$  或  $r'_b$ , 取负值, 内啮合的  $a$  也取负值; 而式(2-3)~(2-5)中都是正的。

与齿条啮合时 (图 2-8),

$$\phi_0 = \frac{\overline{A'N}}{r_b} = \frac{\overline{NP} - \overline{A'P}}{r_b} = \frac{\frac{mz \sin \alpha}{2} - \frac{h'_a}{\sin \alpha}}{r_b} \quad (2-7)$$

式中  $h'_a$  ——齿条的齿顶高。

另外,

$$\phi_a = \frac{\overline{AN}}{r_b} = \sqrt{\left(\frac{d_a}{2r_b}\right)^2 - 1} \quad (2-8)$$

以上  $P_0$  和  $P_a$  分别指靠近齿根和齿顶圆上的端点。因为内齿轮的齿根圆大于齿顶圆, 所以从式(2-6)、(2-8)算出的  $\phi_0 > \phi_a$ 。为了一致起见, 把它们交换一下, 这样无论外啮合、内啮合或齿条啮合, 都有  $\phi_0 < \phi_a$ , 即用  $P_0$ 、 $P_a$  分别表示工作齿廓的起点 (靠近基圆) 和终点。

### § 3 代用圆弧与渐开线齿廓之间的偏差

过工作齿廓 (图 2-9 中实线) 上三点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  作一圆弧 (虚线)。设其圆心为  $C(x_c, y_c)$ , 半径为  $r_c$ 。作渐开线上一点  $P(x, y)$  与  $C$  的连线。 $\overline{CP}$  或其延长线与圆弧相交于  $P'$ , 偏差  $e$  按下式计算

$$e = \overline{PP'} = \overline{CP'} - \overline{CP} \\ = r_c - \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \quad (2-9)$$

从圆心  $C$  看,  $e > 0$  意味着圆弧在渐开线外侧;  $e < 0$  意味着圆弧在渐开线内侧。

为了求  $e$  的极值, 对  $\phi$  求导,

$$\frac{de}{d\phi} = - \frac{(x - x_c) \frac{dx}{d\phi} + (y - y_c) \frac{dy}{d\phi}}{\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}} \quad (2-10)$$

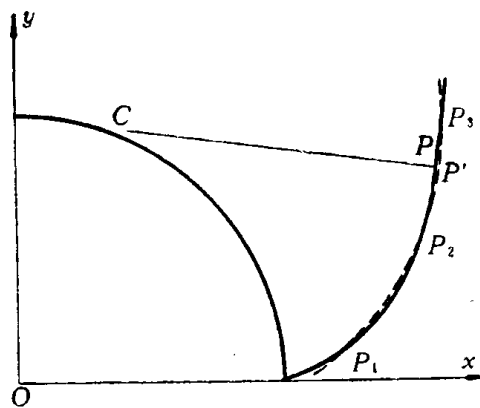


图 2-9

由式(2-2),

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\phi} &= r_b \phi \cos \phi \\ \frac{dy}{d\phi} &= r_b \phi \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

将式(2-2)与式(2-11)代入式(2-10), 化简得

$$\frac{de}{d\phi} = \frac{r_b \phi [x_c \cos \phi + y_c \sin \phi - r_b]}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}} \quad (2-12)$$

设  $C$  的向径和幅角为  $\rho_c$  和  $\psi_c$ , 我们有

$$\left. \begin{aligned} \rho_c &= \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \\ \psi_c &= \tan^{-1} \left( \frac{y_c}{x_c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

反之

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \rho_c \cos \psi_c \\ y_c &= \rho_c \sin \psi_c \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\phi} &= \frac{r_b \phi \rho_c}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}} \left[ \frac{x_c}{\rho_c} \cos \phi + \frac{y_c}{\rho_c} \sin \phi - \frac{r_b}{\rho_c} \right] \\ &= \frac{r_b \phi \rho_c}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}} \left[ \cos \phi \cos \psi_c + \sin \phi \sin \psi_c - \frac{r_b}{\rho_c} \right] \\ &= \frac{r_b \phi \rho_c}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}} \left[ \cos(\phi - \psi_c) - \frac{r_b}{\rho_c} \right] \end{aligned} \quad (2-15)$$

显然

$$\frac{r_b \phi \rho_c}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}} > 0$$

不难证明  $\rho_c > r_b$ 。事实上:

1. 若  $\rho_c < r_b$  或  $\frac{r_b}{\rho_c} > 1$ ,  $C$  在基圆内, 由式(2-15)知  $\frac{de}{d\phi} < 0$ 。  $e$  是  $\phi$  的单调降函数,

所以圆弧与工作齿廓最多只有一个交点(图 2-10), 与原来的假设(有三个交点)矛盾。

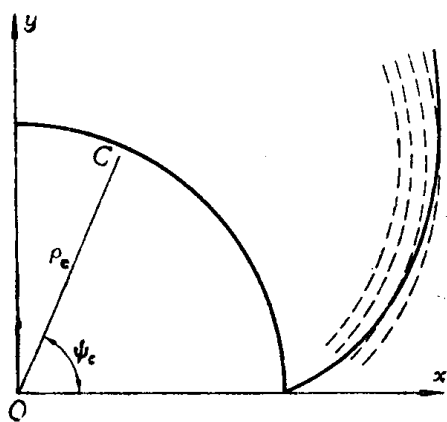


图 2-10

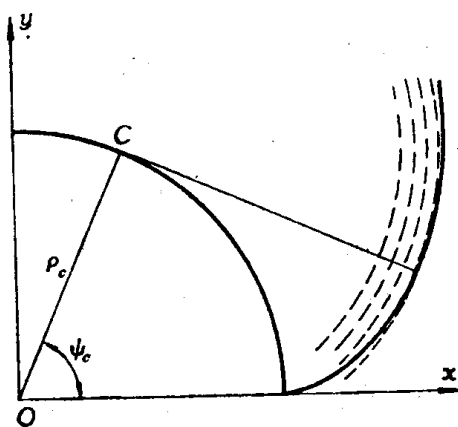


图 2-11

2. 若  $\rho_c = r_b$  或  $\frac{r_b}{\rho_c} = 1$ ,  $C$  在基圆上, 由式(2-15)知: 仅当  $\phi = \psi_c$  时  $\frac{de}{d\phi} = 0$ ; 无论  $\phi < \psi_c$  或  $\phi > \psi_c$ ,  $\frac{de}{d\phi} < 0$ , 所以圆弧同工作齿廓最多只有一个交点或切点(图 2-11), 又同原

来的假设矛盾。

3. 排除以上两情况后, 唯一的可能是  $\rho_c > r_b$  (或  $r_b/\rho_c < 1$ ), 即  $C$  在基圆外 (图 2-12)。过  $C$  作二直线与基圆相切于  $J, K$ 。记  $\angle COJ = \angle COK = \xi$ , 于是

$$\frac{r_b}{\rho_c} = \cos \xi \quad (2-16)$$

式(2-15)可写成

$$\frac{de}{d\phi} = \frac{r_b \phi \rho_c}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y+y_c)^2}} [\cos(\phi - \psi_c) - \cos \xi] \quad (2-17)$$

由此可作以下推论:

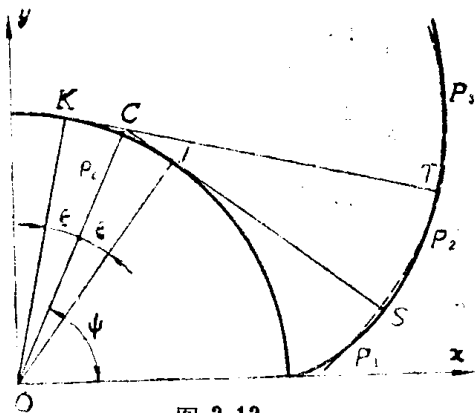


图 2-12

表 2-1  $e, \frac{de}{d\phi}$  随  $\phi$  变化的情况

| $\phi$                               | $\frac{de}{d\phi}$     | 推 论                                                                                                              |
|--------------------------------------|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\phi_0 \leq \phi < \psi_c - \xi$    | $\frac{de}{d\phi} < 0$ | $e$ 单调降, 这段有一交点 $P_1$<br>$\widehat{P_0 P_1}$ 上 $e \geq 0$ , 极值 $e_0$ 在 $P_0$                                     |
| $\phi = \psi_c - \xi$                | $\frac{de}{d\phi} = 0$ | $e$ 有极小值 $e_1$                                                                                                   |
| $\psi_c - \xi < \phi < \psi_c + \xi$ | $\frac{de}{d\phi} > 0$ | $e$ 单调升, 这段有一交点 $P_2$<br>$\widehat{P_1 P_2}$ 上 $e \leq 0$                                                        |
| $\phi = \psi_c + \xi$                | $\frac{de}{d\phi} = 0$ | $e$ 有极大值 $e_2$                                                                                                   |
| $\psi_c + \xi < \phi < \phi_0$       | $\frac{de}{d\phi} < 0$ | $e$ 单调降, 这段有一交点 $P_3$<br>$\widehat{P_2 P_3}$ 上 $e \geq 0$<br>$\widehat{P_3 P_0}$ 上 $e \leq 0$ , 极值 $e_0$ 在 $P_0$ |

延长  $CJ, KC$  与渐开线相交于  $S, T$ 。这二点的展开角分别是

$$\phi_s = \angle xOJ = \angle xOC - \angle COJ = \psi_c - \xi \quad (2-18)$$

$$\phi_t = \angle xOK = \angle xOC + \angle COK = \psi_c + \xi \quad (2-19)$$

即极值  $e_1, e_2$  在  $S, T$  二点。

图 2-13 是  $m=1, z=48$  的标准齿轮与齿条啮合时最优近似圆弧的  $e-\phi$  和  $\frac{de}{d\phi}-\phi$  图, 完全符合以上分析。