

MATHEMATICAL
FOUNDATIONS FOR
DESIGN:
Civil Engineering Systems

设计数学基础

(土木工程系统)

(美) 罗伯特·M·斯塔克 著
罗伯特·L·尼科尔斯

四川省交通局勘察设计院技术情报室 译

人民交通出版社

设计数学基础

(土木工程系统)

(美) 罗伯特·M·斯塔克、罗伯特·L·尼科尔斯 著

MATHEMATICAL FOUNDATIONS FOR DESIGN,

Civil Engineering Systems

Robert M. Stark

Robert L. Nicholls

University of Delaware

McGraw-Hill Book Company

四川省交通局勘察设计院技术情报室 译

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

北京市书刊出版业营业许可证出字第 006 号

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张: 23.75 字数: 594 千

1980年10月 第1版

1980年10月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—5,600册 定价: 2.45元

内 容 提 要

本书译自美国 1972 年出版的《MATHEMATICAL FOUNDATIONS FOR DESIGN: Civil Engineering Systems》一书。该书内容涉及到运筹学和系统工程学方法；全书共分十二章，前六章介绍了最优化设计，后六章介绍了应用概率论，并列有大量的土木工程实例，可用于解决公路、铁路、桥梁工程、交通运输设计、交通控制、结构设计、施工管理以及水利资源设计和营运方面的最优化问题，是一部学习最优化设计较好的入门书。

本书可供从事公路、铁路、桥梁、交通工程、施工管理以及水利、建筑部门的科研、设计、施工技术人员及有关院校教师学习参考。

前 言

本书介绍了通常涉及运筹学和系统工程学的方法，可用于有关土木工程系统的设计和营运。在关于方法学的序篇之后，前六章讨论了最优化，最后五章讨论了应用概率论。所介绍的方法可用以解决运输设计、交通控制、水利资源设计和营运、结构设计、施工管理等方面的问题。

第一章叙述了问题的表述、分类、选择价值准则和建立模型的方法学。关于货币的时间价值一节比较了一笔金额——设计和营运决策的一个重要元素——的不同量度。

第二、三、四章讨论了受线性约束的线性函数最优化，即线性规划。第二章非正式地介绍了线性规划的单纯形法。严格的数学理解对有效地应用线性规划并非紧要。第三章举例说明了若干工程上的应用，并提供了广泛的参考文献目录。其中早期文献部分现在已被代替，然而，对一门发展中学科来说，它们都提供一个发展前景。第四章包括了另一些解工程设计和营运问题的线性方法。这些方法考虑到了增大了的计算效率，参数值的不定性，以及整数计值的变量。本章各节除节4-3和4-5外各自独立，但都需要熟悉第二章。

第五章讨论了一个当前有研究意义的课题，即非线性最优化。头三节把初等微积分最优化扩展到包含约束中去。在节5-4中，对几何规划相当概括的论述反映了它有望用于工程设计。节5-2到5-4较多的是数学内容，但本书其余部分大都与之无关。节5-5到5-7分别介绍了搜索法，用线性问题表示某些非线性问题，以及图解最优化。

第六章是说明动态规划问题的表述和最优化原则的一系列基本例题。这些例题说明在力学、管理和设计方面的应用，而它们各自独立，并与以前几章无关。

第七章分成三部分：排序、定线和列表。排序和定线问题不像列表问题那样为土木工程师人员所熟知。第三部分是关键路线列表的介绍。这三个部分基本上各自独立，并与以前几章无关。

第八章是关于应用概率论五章中的第一部分。本章的知识在随后的几章中都需要。虽然材料是基本的，但不甚熟悉概率论的读者将会发现这对使用补充读物是有帮助的。

第九章着重于基本随机模型的表述，并提供了表述更高深的随机模型的方法。随机模型具有重要的用途，因此，我们超乎寻常地着重讲它。

第十章以不同的例子说明了期望的广泛应用于工程决策和设计准则。以简短的一节说明期望的应用于随机现象分析。各节各自独立并与以后几章无关。

第十一章扩展和应用了第八、九两章的理论。第1节关于可靠性，有意简短。其应用于土木系统是新近的事，不像在电工技术方面那样发展，例如，在电工技术中质量控制、环境条件和故障形式都是较明确的。节11-2和11-3包括随机走动和马尔可夫(Markov)链的简要介绍，并提出了工程上的应用。节11-4和11-5对排队作了广泛的介绍。排队论的研究将提高我们把概率应用于设计和营运问题的能力——例如，像在运输设施方面那样。这两节的部分内容高深，许多课题本身都包括了。

第十二章介绍了独立随机变量和、积及其组合的运算技术。对于比较复杂的随机模型，

这些方法是有用的，并且可以接着第九章后研究。

附录提供了有助于研究本书的方法和资料。

附录 1 概述曲线拟合的方法学和技术；附录 2 讨论如何进行归纳证明；附录 3 包括离散利率系数表。附录 4 包括概率表和概述常用概率函数的性质；附录 5 提供求解差分方程的方法。

本书是为高年级大学肄业生和刚入学的研究生编写的。也可供高年级专科学生和从业工程技术人员使用。一学期的系统教程可以包括第一、二、三和六到九章的大多数节以及其他章的选节。如果概率和最优化的教程预先非有不可，那末可以加上第四和五或十到十二章的各节，而剩余各节则作为第二学期的教程。

大部分课题之应用于土木工程是新近的事。本书的许多例题说明了可能性，并且选题主要在于说明方法而不是解决实际问题。有兴趣的读者可以利用某些例题作出更有想像力的应用。

对于我们的选题和讲述水平，可以作出几种供选择的有效方案。重点放在土木工程的应用，在同业中业已确定或有可能确定的范围。然而，尽管它有明显的重要性，只是简略地考虑了模拟，计算机起着隐藏的作用。同样，对统计学和统计判决理论也不甚注意。

衷心感谢小罗伯特·H·迈耶(Robert H. Mayer, Jr.)和法罗克·尼格哈巴特(Farrokh Neghabat)在他们还是研究生的时候对本书所作的许多重要贡献。作为书评家，哈特姆·卡利尔(Hatem Khalil)，威廉·曼德里(William Mandery)，埃里克·范马克(Erik Vanmarcke)和阿尔文·R·文森特(Alvin R. Vincent)都对我们很有帮助。为我们整理不同程度的不完善草稿的许多学生，值得深致谢意。最后，弗朗西丝·菲利普斯(Mrs. Frances Phillips)的熟练打字给了我们无可估量的帮助。

罗伯特·M·斯塔克

罗伯特·L·尼科尔斯

目 录

前 言

第一章 方法学.....	1
第二章 线性规划.....	16
第三章 线性规划的应用.....	29
第四章 另一些线性方法.....	43
第五章 非线性最优化.....	73
第六章 动态规划.....	129
第七章 排序、定线和列表.....	151
第八章 随机变量和概率.....	179
第九章 导自随机模型的概率函数.....	202
第十章 数学期望.....	219
第十一章 随机模型和排队.....	255
第十二章 随机模型的运算方法.....	308
附 录:	
1. 曲线拟合.....	327
2. 数学归纳法.....	328
3. 离散利率系数.....	330
4. 概率表.....	335
5. 差分方程.....	344
部分习题解答.....	349
索引.....	364

第一章 方法学

1-1 问题的表述	2
1-2 问题的类型	2
1-3 度量的标度	3
1-4 价值的度量法	3
经济价值	4
心理价值	4
先例价值	4
1-5 货币的时间价值	4
比较的经济依据	6
例1-1 管道比较方案	6
例1-2 不明确的投资方案	6
例1-3 给水系统的比较方案	6
例1-4 受益-成本的比较法	7
例1-5 另一受益-成本比较法	9
1-6 模型的建立	10

本书随后各章着重于在对工程设计有用或可望有用的分析技术。本章与其它各章不同之处，在于主要是讲方法学，即考查问题的方法。因为经济比较对工程决策是基本的，所以还包括进了讲货币的时间价值一节。我们希望本章将使其余各章能够正确地得到理解。

土木工程人员所设计或管理的设施，有许多都是一个更大系统相互影响的组成部分。例如，坝和高速干道常常是一个地区性水利资源或运输系统的环节。现代环境不断扩大的性质及其居民流动性的增加引起地区性的问题。这些问题通常要涉及跨过学科界限考虑，因而已必须发展新研究方法。霍尔(Hall)在其《系统工程方法学》〔12〕一书中写道：

虽然复杂系统的概念不易捉摸，还没给以数值的或科学的定义，但在系统工程学的进展中愈益复杂的系统无疑是重要的。这一术语必须通过例子来非正式地理解，尽管复杂性部分是指系统各组成部分的数和种类，部分是指各组成部分之间的关系种类的数量。

从上升人口成员之间逐渐增多的相互影响，不断加速的分工和专业化，愈益使用机器代替手工劳动，从而使生产率上升以及交通运输日益增长的速率和量，可以意识到不断增加的复杂性。很难讲不断增加的复杂性是人类对付其不断扩大的环境所作努力的原因还是结果。任一情况倾向的中心特点都是发展大的和很复杂的系统，使现代社会连接起来。这些系统包括抽象的或非物质的系统，如政府和经济系统，也包括大的物质系统，如管道和动力分配系统、运输和电信系统。

这些系统的增长不仅更加需要全面规划，而且更加需要这些系统的长远发展。因此，人们对于在复杂情况下借以进行有效计划和设计的方法，兴趣增大；而在这些情况下，没有一门单独的科学训练能解决所有的因素。

大约在第二次世界大战之际，为应付这些问题出现的两门相似学科称为系统工程学和运筹学。对这两门学科已经下过许多定义。有过这样的提法：运筹学面向营运系统的管理，而

系统工程学则面向它们的设计。换句话说，运筹学倾向于处理战术（有限的范围或期间）问题，而系统工程学则倾向于处理战略问题。就我们说来，较恰当的是问这些学科有哪些共同点。首先，两者都有系统（执行的）方向性；第二，两者都要利用学科之间的协作；第三，两者都要涉及将科学方法^①应用到控制和设计问题。

当然，这三个特点不是新的，多年来它们都是正确工程实践的一部分。新的是为更好地达到预期目标的技术的新近发展和认识。系统方向性和学科之间的协作将会打破专业化，而专业化是随着知识的扩展及其对脑力的挑战而形成的。近到一个世纪前，自然科学被分成物理和化学。随后，把生物学和心理学加以区别，而在本世纪对各门社会科学也是这样。阿可夫(Ackoff)和萨西尼(Sasieni)在《运筹学原理》〔2〕书中写道：

我们已经习惯于按大学科系结构来区分知识，以致我们做起事来就好像自然界也是这样构造着似的。什么事也不能比真理在远一点。没有像物理学问题、生物学问题……等等这样的事。有的只是问题，科学的学科代表着观察它们的不同方式。任何问题都可以从每门学科的观点去看。但是，这样做当然并不总是有成效的。

虽则本书本质上是数学技巧的书，但这并不意味着方法学是次要的。确实，它也许还更重要。可是，方法学要在我们已经学习了某些技巧并试图用以解决实际问题之后，才能更好地理解。在以下六节中，我们来考虑问题的表述和分类、度量、价值理论的选择和问题求解模型的建立。

1-1 问题的表述

当(1)某一(某些)目标要实现，(2)实现它有可供选择的不同途径，(3)最优的途径或途径组合不是显而易见时，就可以说存在一个问题。

要表述一个问题，我们就要问：

1. 是什么样的目标？虽则在研究过程中目标常常经受到修改，但在开头还是需要某些陈述。根据这些陈述，我们导出性能标度据以评价可选择的设计方案。

2. 该系的哪些方面是受设计人的控制（可控制变量）？控制变量的容许变幅合成问题的约束。

3. 周围环境的哪些方面是不受设计人的控制？我们必须探查，以确知这些不可控制的变量是怎样影响结果的。

有一句谚语说：“提得好的问题就是半解决了的问题。”它特别适用于系统设计，这里，因为我们是探求问题的形式，而问题的内容还可能是相当不熟悉的。例如，胡克(Hooke)定律和等容玻意尔(Boyle)定律两者都有线性形式，但有不同内容。实际上，问题的表述是动态的而不是静态的过程。当得到答案时，有可能改进问题表述的准确性。这就是教科书中的习题与实践中出现的问题比较起来，要陈述得清楚些的原因。

表述问题之着重于准确性，必须同防止问题一般性陈述的危险对比起来看。一般性愈大，特别是在开初，要找出不这样也许就发现不了的合适解的可能性也愈大。

1-2 问题的类型

“最佳”解的准则用问题的目标函数来表示，而目标函数又表示为所选性能标度的函

^① 科学方法的组成部分是（1）观察，（2）假设，（3）试验，（4）结论。

数。目标函数的类型决定于对各种结果的现有了解。根据现有的了解，可以把所谓“问题的类型”区分为三种：

1. 必然：行动的每一过程都假定有一明确结果。

2. 风险：行动的每一过程终结为几种结果之一，在“事后”之前，这一特定的结果是不知道的，但每种结果的机会（概率）是知道的。

3. 不定：行动的每一过程都导致不明显知道的结果，因而不能赋予概率值。

必然和不定问题都可以视为风险问题的极限情况。严格说来，虽然，每个实际问题都是不定问题，但工程人员基本上都把他们的问题表示为必然问题。由于必然问题通常较其对应的概率问题易于建立模型，所以它们常常作启发式应用，即作为探查问题结构的手段。可是，风险类问题现今很多人研究，同样，不定问题的技巧也引起兴趣〔1〕。本书大约有一半是讲必然问题的技巧。其次一半展示应用概率的题目，使工程人员能够表述风险类问题。不定问题的技巧不属我们的范围，有兴趣的读者可参考统计判决理论的文献〔9〕，〔11〕和〔20〕。

1-3 度量的标度

我们的尝试有效，是有能力来度量并按度量结果制定反应的直接结果。最简单的和最无力的度量不过涉及将各目标区别开来。最有力的度量是在有绝对零例如时间或重量的标度上指定数。较无力的度量标度经常出现在行动和社会科学中。这些科学对工程设计逐渐增加的重要性，提醒我们来简述其它的度量标度。

坎贝尔(Campbell)〔5〕和史蒂文斯(Stevens)〔16〕分出了四种度量标度：名义标度、顺序标度、间隔标度和比率标度。

1. 名义标度。名义标度是最无力的度量标度。它只用在目标间、个体间或类别间作区别。这种区别不伴随值或比差。

2. 顺序标度。顺序标度不仅在目标间作区别，而且意指一种目标所讨论的属性是否有的较多、有的相同或有的较少。顺序标度可以比喻成非线性的弹性尺子。数的顺序是保持着的，但它们之间的距离是没有意义的。也就是说，顺序标度表示不出一个属性比另一个属性多多少或少多少。矿物莫氏(Mohs)硬度标就是顺序标度。社会和行动科学中的度量常常是用名义或顺序标度。

3. 间隔标度。在间隔标度上，等间隔意即所度量的属性等差。华氏和摄氏标是间隔类，因为等间隔相当于液柱等容积。只有在相对度量才有意义的场合下，间隔标度比名义或顺序标度要有力一些，它等于更有力的比率标度。因为间隔标度的零是随意的，所以它不是最有力的标度。由于这个原因，华氏和摄氏标在科学度量中不是得最方便的。因此不能说 40°F 是两倍于 20°F 那样“热”（尽管数40是数20的两倍）。

4. 比率标度。当间隔标度的特性中加上绝对零，那就给比率标度下了定义。用比率标度的度量也许是工程人员最普通的了。

1-4 价值的度量法

问题的目标函数用一种性能标度术语来表示价值准则。多维目标是土木工程人员的生活条件。例如，他要寻求一个具有“最大安全度”、“最优重量”和“最低造价”的构造物。

这些是相互矛盾的目标，需要协调函数和价值理论来适当考虑。协调函数将一个标度（例如，重量或安全度）变换成另一标度（例如，美元）的值。价值理论有好几种，而工程人员通常寻求的是经济价值理论。为了打开眼界，下面简述一些价值理论。

经济价值 经济学中两个密切关联的概念是交换价值和使用价值。交换价值是通过交换可以取得的其它货物（或货币）数量，即市价。使用价值是使用人或所有人对其项目所定的相对重要性。例如，螺栓的市价可能很不同于其作为桥梁组成部分的价值。

利润的准则是使收入和成本之差极大化的准则。单位无需是美元——任一通用的价值标度都可。一看准则的选择，不是讲“成本的极小化”就是讲“收入的极大化”——或者，不大可能的，是讲“在使收入极大化的同时使成本极小化”〔15〕。在教科书里，当选用最低成本目标时，就暗中假定了恒定的收入。可是，在实际问题中，工程人员必须细心估定可望使成本极小化的策略对收入的影响。利润准则可以推广到风险情况——即所谓“期望利润”，它是第十章各节的基础。

我们常常必须在两种比较设计之间进行选择，一种需要大的基建费和小的维修费，而另一种则需要小的基建费和大的周期性费用。费用比较必须反映时间和数量。现在投资1美元，一年后将值 $(1+i)$ 美元，在 n 年内将值 $(1+i)^n$ 美元，这里 i 是利率。反之， n 年后付款1美元则相当于现在 $(1+i)^{-n}$ 的付款额。 $(1+i)^{-n}$ 项称为现值系数。经济学公式的推导和应用是下节的主题。

心理价值 心理价值理论认为价值存在于事物所提供的欣赏或满足当中。也就是说，价值是一种感觉，而价值的标度是感觉的强度。

心理价值因引导我们选择好的目标而有助于求解问题。许多构造物的美证实这一观察，即设计人员使用不只一个单值目标。

心理的度量，叫做心理测定学，与经济的度量比较起来还是粗糙的。冯·诺伊曼 (Von Neumann) 和莫根施特恩〔21〕(Morgenstern) 以及丘奇曼 (Churchman) 和阿可夫 (Ackoff) 〔6〕已设计出了心理测定标度。将个别的优先选择统一为群集的优先选择是挑战的任务。它是土木工程人员常常面临的任务。

先例价值 有先例往往是法律判决的一种依据，也是工程人员普遍使用的。它必须有区别地应用，并且只有在问过自己下列问题之后才可应用：(1) 先前的决策是最优的或成功的决策吗？(2) 当前问题的假定是足够相似于过去，可以使用同样的决策吗？霍尔 (Hall) 把这叫做价值决疑理论〔12〕。

1-5 货币的时间价值

经济问题是工程的一主要部分。工程人员对于设计的直接费用是敏感的，并预先估计维修和营运费用。除数量外，适宜考虑时间因素，即费用何时出现。本节提供一笔金额的不同计量法，使其能进行设计方案的比较。

试考虑投资 P 美元，每期每元赢利 i 元。第一期末赢利为 iP ，原投资增到 $(1+i)P$ 。这笔金额再投资，在第二期末赢利 $i(1+i)P$ ，因而原额值 $(1+i)^2P$ ，如此等等。则可以按归纳法（见附录2）推断，原投资 P 在 n 期后将增到总额 S_n ，由下式给出：

$$S_n = (1+i)^n P = [\text{spcaf}(i, n)] P$$

式中， $\text{spcaf}(i, n)$ 称为一次付款复额系数。

同样，将来付款额 S_n 有其相当的现值 P ，由下式给出：

$$P = (1+i)^{-n} S_n = [\text{sppwf}(i, n)] S_n \quad (1)$$

式中， $\text{sppwf}(i, n)$ 为一次付款现值系数。系数 $P = (1+i)^{-1}$ 叫做折扣系数。

考虑一序列的 n 次周期性等付款额 R 。第一次付款额得利息 $n-1$ 期，在 n 期后等于 $(1+i)^{n-1}R$ ；第二次得利息 $n-2$ 期，在 n 期后值 $(1+i)^{n-2}R$ ；如此等等。这一付款序列等于总额 S_n ，由有限几何级数给出：

$$S_n = (1+i)^{n-1}R + \dots + (1+i)R + R = \frac{(1+i)^n - 1}{i} R = [\text{uscaf}(i, n)] R \quad (2)$$

式中， $\text{uscaf}(i, n)$ 为等系列复额系数。同样，将来一笔金额 S_n 可以表示为相当的一系列等付款额 R ，即

$$R = \frac{i}{(1+i)^n - 1} S_n = [\text{sfd}(i, n)] S_n$$

式中， $\text{sfd}(i, n)$ 为还债基金储蓄系数。

n 次等付款额 R 也可表示为现值 P 。将式(1)和(2)合并，得：

$$P = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} R = [\text{uspwf}(i, n)] R$$

式中， $\text{uspwf}(i, n)$ 为等系列现值系数。

最后，将现值 P 表示为相当的 n 次等付款额序列，得：

$$R = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} P = [\text{crf}(i, n)] P$$

式中， $\text{crf}(i, n)$ 为资金回收系数。

利息系数

表1-1

已 知	求	通 过 乘 以
P	S_n	一次付款复额系数 (spcaf), $(1+i)^n$
S_n	P	一次付款现值系数 (sppwf), $(1+i)^{-n}$
R	S_n	等系列复额系数 (uscaf), $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$
S_n	R	还债基金储蓄系数 (sfd), $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$
R	P	等系列现值系数 (uspwf), $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$
P	R	资金回收系数 (crf), $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

这些公式概括如表1-1。表1-1中的利息系数就不同的 i 和 n 值表列于附录3。因为 n 值大的利息系数常常不便计算，故考虑瞬时或连续的复合是有帮助的。每元每期 i 元的利率，当复合间隔时间为 Δt 时，每元有 $i\Delta t$ 元的收益。在 n 期后每元等于 $(1+i\Delta t)^n$ 元。当 $\Delta t \rightarrow 0$ ， $n \rightarrow \infty$ 而 $n\Delta t$ 的极限为有限时，按指数函数的定义，得：

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} (1+i\Delta t)^n \rightarrow e^{it}$$

最后，我们要提到现值坐标纸(图1-1)的可用性。在该图中 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 分别表示预计的未来支出和收入，现值则用和数 $A_1 + A_2$ 来表示。

比较的经济依据

上面的利率公式用于方案的经济比较。一般应用的三种比较方法是常年基数法、现值法和受益-成本比法。在这里对于每种都简短地介绍一下。

1. 常年基数比较法。常年基数比较法将选定时间内的所有收支换算成相当的常年价值。例1-1和1-2说明这种比较法。

例1-1 管道比较方案

30英寸管道能以90,000美元安装。年营运和维修费(包括泵送费)估计为20,000美元。另一方案, 24英寸管道能以70,000美元安装。其有关营运和维修费估计为每年26,000美元。两条管道都预期使用25年, 替换时有5%折余值。以常年费用为依据, 假定利率15%, 来比较这两条管道:

30英寸管道的常年费用 AC_{30} 为

$$\begin{aligned} AC_{30} &= 90,000\text{crf}(15\%, 25\text{年}) - (0.05)(90,000)\text{sfd}(15\%, 25\text{年}) + 20,000 \\ &= 33,970\text{美元} \end{aligned}$$

因为 $\text{crf}(15\%, 25\text{年}) = 0.155$, $\text{sfd}(15\%, 25\text{年}) = 0.0047$

24英寸管道的常年费用 AC_{24} 为

$$\begin{aligned} AC_{24} &= 70,000\text{crf}(15\%, 25\text{年}) - (0.05)(70,000)\text{sfd}(15\%, 25\text{年}) + 26,000 \\ &= 36,870\text{美元} \end{aligned}$$

据此, 30英寸管道投资较少。

例1-2 不明确的投资方案 一条铁路支线跨过化工厂总体内的一条街道。油罐车常常延误横跨车辆, 厂方正考虑修建立体交叉, 消除延误。立体交叉的提议人声称, 在一个245天的工作年内延误每天要损失40美元。立体交叉估计要花费90,000美元, 其经济寿命为30年。构造物的维修费估计为每年800美元。该公司正经历着快速的发展, 致使厂方足够热切于争取公司资本追求15%的利率。

延误费每天40美元, 全年(245天)为9,800美元, 比常年修建费小得多。

$$90,000\text{crf}(15\%, 30\text{年}) + 800 = 14,480\text{美元}$$

式中, $\text{crf}(15\%, 30\text{年}) = 0.152$ (附录3)。因此, 修建立体交叉无理由。

2. 现值比较法。在现值比较中, 所有预计的收支都用其现值表示, 现举如下一例。

例1-3 给水系统的比较方案 一个城市计划扩大供水系统。建议要修建一个蓄水坝和处理厂, 费用480,000美元, 将满足下12年的预计需要。预期年营运费为30,000美元。12年

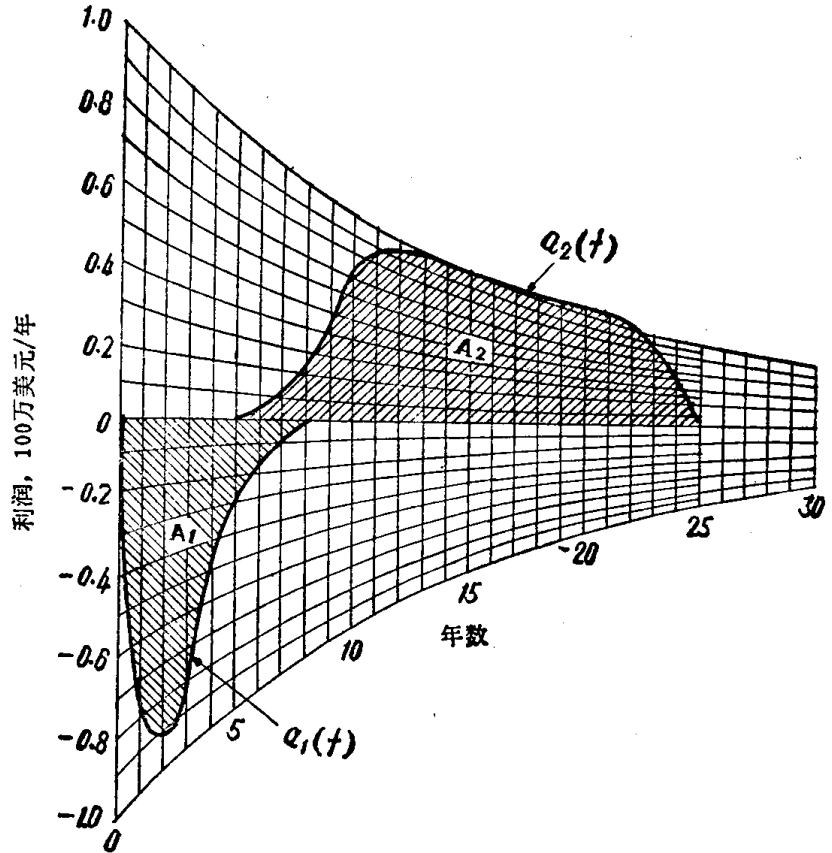


图1-1 现值坐标纸 年复利7% (引自霍尔[12]) (Hall[12])

后，将以550,000美元修建第二个坝和另外的处理设施，附加的年营运费为25,000美元。

现在，比较方案修建单一的大蓄水坝，连同新的处理厂，其费用为620,000美元。前12年的年营运费为26,000美元；12年后，将以50,000美元添加另外的处理设施，年营运费预计将增加到32,000美元。我们按8%的利率，用现值分析法比较这两个方案。

对于第一方案，所有未来支出的现值 PW_1 为

$$PW_1 = 480,000 + 550,000sppwf(8\%, 12年) + 30,000uspwf(8\%, 12年) \\ + 55,000uspwf(8\%, \infty)sppwf(8\%, 12年) = 1,198,000 \text{ 美元}$$

因为 $sppwf(8\%, 12年) = 0.379$, $uspwf(8\%, 12年) = 7.54$, $uspwf(8\%, \infty) = 12.5$ 。我们已经假定该系统在第12年施工后将无限期地营运，无扩建（或缩减）。因此，12年后开始并无限期延续下去的55,000美元的常年费用要换算为12年上的一次付款额（ $uspwf$ ），再换算为现在的一次付款额（ $sppwf$ ）。

对于第二方案，现值 PW_2 为：

$$PW_2 = 620,000 + 26,000uspwf(8\%, 12年) + [32,000uspwf(8\%, \infty) + 50,000] \\ sppwf(8\%, 12年) = 994,850 \text{ 美元}$$

第二方案是费用较低的比较方案。

3. 受益-成本比的比较法。受益-成本比(BCR)是比较公用工程方案的有效评价标准。在社会财务中，基本公式为：

$$\text{利润} = \text{收入} - \text{成本}$$

有未讲明的假定是成本和受益都属于同一些人的。可是，在公用工程中，担负费用的市民不总是受益的那些人，因为公共开支的收益也许是有期限的。由于这个原因，受益-成本比往往比“收入-成本”关系提供更有意义的比较。具体地讲，

$$BCR = \frac{AW}{AC}$$

式中， AW 为使用人的常年受益价值， AC 为总常年费用（付款人）。现值受益-成本分析也可能是适宜的。受益-成本比至少为1即提示开支合理。

例1-4 受益-成本的比较法^① 一座桥连接平行于一条河流的两条公路A和B。该桥是垂直于该河流的一条公路C的连接环节。在路线A和C的交叉口和路线B和C的交叉口的交通管理色灯控制着这些公路上的车流。

路线A上的日交通量平均为10,000辆，路线B上为3,000辆，路线C上为6,000辆，平均车速均为50英里/小时。15%的车辆为商用。

商用车辆的时间价值估计为每小时5美元，私用车辆的估计为每小时2美元。停止再启动费用分别估计为0.5美分和0.25美分。每条路线上大约有50%行车在色灯下延误，平均闲滞时间在路线A上为0.78分钟；在路线B上为1.6分钟；在路线C上为1.30分钟。

过去5年内由于未注意到交通信号，在路线A和C的交叉口有过4次死亡和75次非死亡事故。路线B和C的交叉口的记录是3次死亡和60次非死亡事故。保险赔偿要求平均每次死亡事故为50,000美元，每次非死亡事故为800美元。

交通信号的营运费用为每年1,200美元。此外，在路线A和C的交叉口设有一名叉口警卫，每天站岗8小时；在路线B和C上设另一名警卫，每天站岗4小时。叉口警卫每年按300个八小时工作日计算，支付工资为5,000美元。

① 例1-4和1-5摘自G.A.泰勒(G.A.Taylor)：《管理和工程经济学》，1964。

在桥的两头，都可以修建上跨交叉或下穿交叉，使车流连续。在A和C的交叉口，费用为1,100,000美元；在B和C的交叉口，费用为1,200,000美元。附加的道路维修常年费用估计为5,000美元，并且大约有35%的行车要增加行程0.4英里。商用车辆的营运费估计为每英里0.24美元；非商用车辆，为每英里0.06美元。新的系统消除了交通信号和叉口警卫的需要，并预计将减少事故90%。预计经济寿命为20年，而且无折余价值。

当将各比较方案合计起来而不是分别估价时，受益-成本比可能发生误用。在每个交叉口上，对于拟建的工程，确定其各自的受益-成本比使用6%的利率。

A—C 交叉口

每年节约的时间费用：

$$0.5(10,000) \frac{0.78}{60} (365)[0.15(5) + 0.85(2)] + (0.5)(6,000) \frac{1.30}{60} (365) \\ [0.15(5) + 0.85(2)] = 116,000 \text{ 美元}$$

每年节约的起动和停车费用：

$$0.5(10,000)(365)[0.15(0.005) + 0.85(0.0025)](1.0 + 0.6) = 8,490 \text{ 美元}$$

每年节约的事故费用：

$$0.9 \left[\frac{4}{5}(50,000) + \frac{75}{5}(800) \right] = 46,800 \text{ 美元}$$

随英里里程增加的时间费用：

$$0.35(10,000) \frac{0.4}{50} (365)[0.15(5) + 0.85(2)](1.0 + 0.6) = -40,100 \text{ 美元}$$

随英里里程增加的营运费用：

$$0.35(10,000)(0.4)(365)[0.15(0.25) + 0.85(0.06)](1.0 + 0.6) = -71,000 \text{ 美元}$$

净受益 60,090 美元

公众每年增加的费用：

$$1,100,000 \text{crf}(6\%, 20\text{年}) - 1,200,000 - \frac{365}{300}(5,000) + 5,000 = 93,600 \text{ 美元}$$

因为 $\text{crf}(6\%, 20\text{年}) = 0.0872$ 。

$$BCR = \frac{60,090}{93,600} = 0.65$$

B—C 交叉口

每年节约的时间费用：

$$0.5(3,000) \frac{1.6}{60} (365)[0.15(5) + 0.85(2)] + 0.5(6,000) + \frac{1.30}{60} (365)[0.15(5) \\ + 0.85(2)] = 93,900 \text{ 美元}$$

每年节约的起动和停车费用：

$$0.5(3,000)(365)[0.15(0.005) + 0.85(0.0025)](1.0 + 2.0) = 4,730 \text{ 美元}$$

每年节约的事故费用：

$$9 \left[\frac{3}{5}(50,000) + \frac{60}{5}(800) \right] = 35,640 \text{ 美元}$$

随英里里程增加的时间费用：

$$0.35(3,000) \frac{0.4}{50} (365)[0.15(5) + 0.85(2)](1.0 + 2.0) = -22,500 \text{ 美元}$$

随英里里程增加的营运费用:

$$0.35(3,000)(0.4)(365)[0.15(0.24) + 0.85(0.06)](1.0 + 2.0) = -40,000 \text{ 美元}$$

$$\text{净受益} = 71,770 \text{ 美元}$$

公众每年增加的费用:

$$1,200,000 \text{ crf}(6\%, 20\text{年}) - 1,200 + 5,000 - \frac{4(365)}{8(300)}(5,000) = 105,400 \text{ 美元}$$

$$BCR = \frac{71,770}{105,400} = 0.68$$

因为两个 BCR 都小于 1, 所以两项工程都可以反对。

受益-成本比适宜在成对的方案当中进行比较。如 a 和 b 两个方案, 使得 $AC_a > AC_b$, 则 BCR 公式可以写成:

$$BCR_{a-b} = \frac{AW_a - AW_b}{AC_a - AC_b} = \frac{AUC_b - AUC_a}{AC_a - AC_b}$$

式中, AUC 表示使用人每年费用。当 $BCR_{a-b} > 1$ 时, 方案 a 优于 b 。

例1-5 另一受益-成本比较法 对于一条过境道路的路段, 正在考虑两条比较路线, 即: 一条沿河路线和一条山区路线。沿河路线长20英里, 预计基建费为4,750,000美元, 常年维修和营运费为每英里2,000美元。每10年需要以850,000美元的费用进行路面总翻修。

山区路线长仅15英里, 但由于要定出可接受的坡度等等, 要耗用7,375,000美元, 每10年的路面总翻修估计为650,000美元。常年维修费将为每英里2,500美元。

两条公路上的平均车速都预计为50英里/小时, 平均日行车量预计为5,000辆, 其中包括1,000辆商用汽车。商用和非商用车行程时间价值示如例1-4。在山区路线的坡道上行车费用要比例1-4中高15%。两条公路都估计有30年寿命, 而无折余价值。资金值取为7%。

沿河路线 公众每年修建和维修费用为:

$$\{4,750,000 + 850,000[sppwf(7\%, 10\text{年}) + sppwf(7\%, 20\text{年})]\}crf(7\%, 30\text{年}) + 2,000(20) = 475,300 \text{ 美元}$$

式中, $sppwf(7\%, 10\text{年}) = 0.508$, $sppwf(7\%, 20\text{年}) = 0.258$, $crf(7\%, 30\text{年}) = 0.0806$

使用人每年费用为

$$\text{时间: } \left[(5,000)(365) \frac{20}{50} \right] [0.2(5.00) + 0.8(2.00)] = 1,898,000$$

$$\text{距离: } [(5,000)(365)(20)] [0.2(0.25) + 0.8(0.06)] = 3,577,000$$

$$\text{使用人总费用} = 5,475,000 \text{ 美元}$$

山区路线 公众每年修建和维修费用为:

$$\{7,375,000 + 650,000[sppwf(7\%, 10\text{年}) + sppwf(7\%, 20\text{年})]\}crf(7\%, 30\text{年}) + 2,500(15) = 671,600 \text{ 美元}$$

使用人每年费用为

$$\text{时间: } [(5,000)(365) \frac{15}{50}] [0.2(5.00) + 0.8(2.00)] = 1,424,000$$

$$\text{距离: } [(5,000)(365)(15)] [0.2(0.25) + 0.8(0.06)](1.15) = 3,090,000$$

$$\text{使用人总费用} = 4,514,000 \text{ 美元}$$

$$BCR_{m-r} = \frac{AUC_r - AUC_m}{AC_m - AC_r} = \frac{5,475,000 - 4,514,000}{671,000 - 475,300} = 4.90 > 1$$

这就可据以选用花钱较多的山区路线。

已经简述了三种金钱比较的根据。但它们不是应有尽有。例如，折扣-现金-流(discounted-cash-flow)比较法就是比较不同方案所得的利率[17]。因为不同种类的比较法可能导致比较方案的不同优先顺序，所以重要的是考虑使用哪种现金-流比比较法。如拟建工程要由常年税收提供经费，则可提出常年费用比较法。在第三章不平衡投标的情况下，现值目标似乎是合适的。

1-6 模型的建立

模型之代表实际有点像绘画之代表照片。模型建立人探索最简单的模型，以足够的精确性预言和说明现象。三种普通的模型是肖像、模拟和符号模型。

肖像模型是真实事物有比例的翻板。系统的有关性质在模型内由同样的性质来代表。为研究复杂结构性状用的桥梁和房屋的实验室模型是肖像模型的例子。桥梁材料的弹性模量，比方说，是由模型材料的同样模量来代表。

模拟模型用一组性质代表另一组性质。电流可以代表热或流体流动；流体系统可以代表车流；肥皂膜代表扭应力；等高线或等势线代表地面高程；如此等等。

符号模型用符号代表变量和变量相互间的关系。它们的通用性和抽象性使其易于使用。

一个问题，有时用不止一个模型组合或依次排列起来，可以表示得好一些。在其它情况下，当问题的模型不便于求解时，有时能够将模型分解成几部分，可以较易于求解。此时，一个模型的输出用作另一模型的输入。此种方法例子见于第四章内的符号模型。

有时符号模型难于建立，但在所研究的系统和另一较熟知的系统之间看出有相似性。例如，假设在远方几个工地上工作的承包入想用一条总长度最小的道路连接这些工地，以便机具设备可以在各工地间转移(图1-2)，这个问题叫做斯坦纳问题(Steiner)[8]，不易用符号来代表，其分析解也是很新的[10]。可是有着简单的模拟法。如将几个大头针钉于一块板上表示施工工地，再将这块板浸入肥皂液，并细心提出，则肥皂膜将系在针间，其总长度将是最小的^①。肥皂膜要取得使势能极小的形状这一已知性质，用以求得实验解。

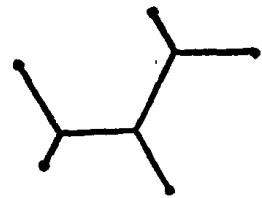


图1-2 最短的总路线

模型的恰当性反映其创造人的能力，有时并且反映幸运。虽然出现了好些模型，但建立模型能够引用的不显见规律却很少，而且关于模型一般性还写得不多[4和9]。建立模型需要分解矛盾的目标；模型应当准确，但应易于求解。在第三章例题中，考虑这些是适当的。

一般的最优化模型可以表示如下：

极大化：
$$z = f(X, Y)$$

约束条件：
$$g_i(X, Y) \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

式中， X 和 Y 分别表示可控制和不可控制变量的矢量。解是使 z 在 n 个约束 $g_i(X, Y) \geq 0$ 下极大化时 X 作为 Y 的函数的值(诸值)。几乎是在所有情况下，本书内模型的解都将用分析(包括枚举)方法来实现。

模型，与问题陈述一样，在其整个表述过程中，都应当不断加以检验。

普通的模型缺陷是：

① 在针顶放第二个(透明的)面有助于防止肥皂膜瓦解。

- 1.它含有无关变量。
- 2.它排出了有关变量。
- 3.有一个或更多的有关变量赋值不准确。
- 4.它含有错误的函数或函数型式。

变量常常可以经过处理,使得计算工作量减少而不损失准确度。例如,两变量间的相似性可能足以将其归并为单一变量。在其值域内解是不敏感的变量,可赋以平均值而视为常数。在初步模型中,相信解对之不敏感的变量是不管用的。随后需要考查解对这些变量的敏感性(例如,在节4-5和5-1)。有时将离散变量视作连续变量可以取得计算效率,反之也是这样。有时可以通过修改模型的函数型式,例如用分段线性段来逼近非线性函数,或用对数将含有变量积的式子变换成线性式子,而使模型简化。偶尔,可以去掉或改变约束而使模型简化。一个问题可以不管约束求解,再来检验解是否满足约束条件。如不满足,可以利用现有方法或想出方法将约束逐渐引入或将“有拘束的”约束识别出来。

实际问题的适当模型可能复杂得难于用符号代表。“强行”求解的三种方法是模拟、对策模拟和实验。

模拟是实际的模仿。模拟可以根据肖像、类推或符号模型。例如,如果要移动上述肥皂膜模型内的大头针,以确知其对路径总长的影响,那末,就要模仿施工工地的移动情况。符号模型的模拟通常是在高速计算机上进行。这样就能够在“纸上”系统作实验,而由于时间或经费限制在实际系统中作却是不现实的。例如,一年的行车在计算机上几分钟内就可模拟出来。

对策模拟是由活的决策人作决策的模拟。对策模拟,不要与对策论混同,应用于复杂的军事、国际和工业决策中,而在那里模型实际上是不存在的。在建筑工业中,由威廉帕克(William Park)发展并用“Entelek”名义的市价的投标策略竞赛就是对策模拟的一个例子。

只要一个系统是太复杂,或者了解得太差,以致不能适当建立模型,或者当模型虽可建立,但求解无方便技巧时,就总是使用实验最优化。所以对这个系统进行实验找出最优解。在实际系统中一个实验的实例,那就是在最低费用下,水泥厂或炼油厂能够使规定产品有给定生产率的营运变量寻优。符号模型的实验(寻优)技术将在第五章内叙述。

这些技术每种对工程人员都重要,特别是迅速发展中的模拟问题。文献[7],[13],[18]和[19]提供有较详尽的知识。

怀尔德(Wilde)和贝特勒(Beightler)[22]讲过:

最优化只是达到合理决策所需三个步骤的最后一步。前两步,系统的描述和有效手段的采取,是第三步的绝对必要条件。因此,从事应用最优化理论时,我们忽视问题的较平常的工程和经济方面就不能不冒最后失败的危险。最优化理论不应看成只是留待分散的咨询人员应用的孤立专业,而宁可看成从业经济学人员、运筹分析人员、工程人员或管理人员现有专业知识的宝贵增添。在大多数工业问题中,按数学方法规定决策问题、收集可靠数据和目标意见一致所用的劳动远远超过数学最优化所需工作量。确实,没有最优化的决策,就像没有拱顶石的拱一样,是没有完成的。但最优化,如同拱顶石一样,只是总结构的一小部分,因而不能使工程内别处的劣等工艺或有缺陷材料得到补偿。

方法学的自觉,结合规定、度量和求助种种统计技术的能力,是取得问题的有用解的要素。由土木工程人员作参谋的决策人常常(由于缺乏训练或时间)不能了解技术细节。可是,如果工程人员向他充分揭露——例如向陪审委员团或市政规划委员会,通常他就能抓着逻辑推理。决策人所产生的信心,甚至对于实现设想得最好的设计,都是不可缺少的。