

1982 年高中毕业生复习资料  
北京市西城区教育研究中心 编

# 数学

## 典型例题分析及习题

中国农业机械出版社

1982年高中毕业生复习资料

# 数学典型例题分析及习题

北京市西城区教育教学研究中心 编

中国农业机械出版社

责任编辑 陈祖燕

本社出版的《1982年高中毕业生  
复习资料》包括：

政治常识问答

数学典型例题分析及习题

语文基础知识复习与练习

地理基础知识复习与练习

英语基础知识复习与练习

历史习题解

1982年高中毕业生复习资料  
**数学典型例题分析及习题**  
北京市西城区教育研究中心 编

★  
中国农业机械出版社出版  
重庆新华印刷厂印刷  
新华书店北京发行所发行  
新华书店经售

★  
787×1092 32开 18<sup>2</sup>/<sub>16</sub>印张 404千字  
1982年1月北京第一版·1982年1月重庆第一次印刷  
印数：000,001—340,000 定价1.50元  
统一书号：7216·23

# 前 言

为了帮助高中学生深入理解和掌握中学数学基础知识，加强基本技能的训练，灵活应用所学知识，培养分析问题和提高解题的能力，按照全国十年制教学大纲的要求，在总结近几年来我区高中毕业复习的经验和有关资料的基础上，加以系统整理编写了《数学典型例题分析及习题》一书，可供高中学生平时学习和毕业复习参考使用。

本书分代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何五部分，每一部分按大纲要求分成若干单元，每一单元均通过典型例题来复习本单元的主要基础知识，解题的基本思路和方法，使学生能深入理解本单元的主要内容。在每一单元之后配有习题，并附有答案或提示。习题的配备注意了由易到难，基础知识和灵活的应用以及上述五部分内容彼此间的沟通和联系。

参加本书编写工作的有：北京三中陈萃联、北京六中孙家钰、北京三十五中凌为淑、北京四十二中俞裕安、北京一一〇中孟令尧、北京师大附属实验中学于宗英、北京师大附属第二中学陈俊辉、北京西城区教育研究中心中学教研室李振纯、欧阳东方、李松文等同志。由于水平有限，其中必有不少缺点和错误，欢迎读者批评、指正。

北京市西城区教育研究中心

中学教研室数学组

一九八一年八月

# 目 录

## 前 言

### 第一部分 代数

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 一、数和数的整除.....           | 1   |
| 二、代数式的恒等变形.....         | 19  |
| 三、方程和方程组、解应用题.....      | 35  |
| 四、函数.....               | 98  |
| 五、指数和对数.....            | 123 |
| 六、不等式.....              | 134 |
| 七、数列与极限.....            | 163 |
| 八、排列组合、二项式定理和数学归纳法..... | 186 |

### 第二部分 三角

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 一、三角函数的定义和性质..... | 214 |
| 二、三角函数式的恒等变形..... | 232 |
| 三、反三角函数.....      | 279 |
| 四、三角方程.....       | 296 |
| 五、解三角形.....       | 314 |

### 第三部分 平面几何

|            |     |
|------------|-----|
| 一、直线形..... | 343 |
| 二、相似形..... | 358 |

|          |     |
|----------|-----|
| 三、圆..... | 377 |
|----------|-----|

#### 第四部分 立体几何

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 一、直线与平面.....          | 414 |
| 二、多面体和旋转体及其面积、体积..... | 446 |

#### 第五部分 解析几何

|              |     |
|--------------|-----|
| 一、直线.....    | 475 |
| 二、曲线与方程..... | 494 |
| 三、二次曲线.....  | 507 |
| 四、极坐标.....   | 539 |
| 五、参数方程.....  | 546 |

# 第一部分 代 数

## 一、数和数的整除

例1. 设 $n$ 是整数时, 求证 $n^3 + 3n^2 + 2n$ 能被3整除

证:  $\because n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$ .  $n, n+1, n+2$ 为三个连续整数,  $\therefore 3 | \ominus n(n+1)(n+2)$

$\therefore n^3 + 3n^2 + 2n$ 能被3整除。

说明: 两个连续整数之积, 必是2的倍数; 三个连续整数之积, 必可被6整除;  $k$ 个连续整数之积, 必可被 $k!$ 所整除; 若数 $m$ 能被 $n$ 所整除, 并用符号 $n|m$ 表示。

例2. 设 $a$ 是整数, 且 $a \neq \pm 1$ , 求证 $a^4 + 4$ 是合数。

证:  $\because a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2$   
 $= (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$   
 $= [(a+1)^2 + 1][(a-1)^2 + 1]$

$\because a \neq \pm 1 \therefore (a+1)^2 + 1$ 和 $(a-1)^2 + 1$ 都不等于1, 且都不等于 $a^4 + 4 \therefore a^4 + 4$ 是一个合数。

例3. 若 $k$ 为整数, 求证整数 $N$ 的平方必是 $3k$ 或 $3k+1$ 形式的数。

证:  $\because$  整数 $N$ 被3除, 余数可能为0, 1, 2.

若 $N = 3m$  ( $m$ 是整数) 则  $N^2 = 3(3m^2)$  取 $k = 3m^2$

若  $N=3m+1$  则  $N^2=(3m+1)^2=3(3m^2+2m)+1$

若  $N=3m+2$  则  $N^2=(3m+2)^2=9m^2+12m+4$   
 $=3(3m^2+4m+1)+1$

$\therefore N^2$  必是  $3k$  或  $3k+1$  形式的数。

例4. 是否有满足方程  $m^2+1978=n^2$  的整数解  $m$  和  $n$ ?

解:  $1978=n^2-m^2 \quad \therefore 2 \cdot 989=(n+m)(n-m)$

(1) 若  $m, n$  都是奇数或都是偶数则  $n+m, n-m$  均为偶数,  $\therefore 4|(n+m)(n-m) \quad \therefore 4|2 \cdot 989 \quad \therefore 2|989$  (矛盾)。

(2) 若  $m, n$  为一奇数, 另一个为偶数, 则  $n+m, n-m$  均为奇数,  $\therefore (n+m)(n-m)$  为奇数 但 1978 为偶数 (矛盾)。  
由 (1), (2)  $\therefore m^2+1978=n^2$  无整数解。

例5. 证明无论  $n$  是什么自然数, 分数  $\frac{21n+4}{14n+3}$  都是既约分数。

证: 设  $21n+4=ak \cdots (1), 14n+3=bk, \cdots (2)$  (其中  $a, b, k \in$  整数, 且  $a, b$  互质) 则: (1) 式  $\times 2 -$  (2) 式  $\times 3$ : 得  $8-9=2ak-3bk$  即  $(3b-2a)k=1 \quad \because 3b-2a, k$  都是整数,

$\therefore k=1 \quad \therefore$  无论  $n$  是什么自然数, 分数  $\frac{21n+4}{14n+3}$  都是既约分数。

说明: 解有关整数问题应注意以下几点:

- ①  $k$  个连续整数之积, 可被  $k!$  所整除;
- ② 任一整数, 可按其被一个整数  $m$  除得的余数分类, 其余数分别为  $0, 1, 2, \cdots, m-1$  (如例3);

③ 用因式分解和整除的性质;

④ 用数学归纳法证明;

⑤ 用二项式定理证明。

例6. 证明  $4^{2n+1}+3^{n+2}$  能被 13 整除 ( $n \in$  自然数)

证: (1)  $n=1$  时,  $4^{2n+1}+3^{n+2}=4^3+3^3=91 \quad \therefore 13|91$

$\therefore n=1$  时命题成立.

(2) 设  $n=k$  时命题成立, 即  $13|(4^{2k+1}+3^{k+2})$

今证  $n=k+1$  时命题也成立

$$\begin{aligned}4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2} &= 4^{2k+3}+3^{k+3} = 4^{2k+1} \cdot 4^2 + 3^{k+2} \cdot 3 \\&= 4^{2k+1} \cdot 4^2 + 3^{k+2} \cdot 4^2 - 3^{k+2} \cdot 4^2 + 3^{k+2} \cdot 3 \\&= 4^2(4^{2k+1}+3^{k+2}) + 3^{k+2}(3-16) \\&= 4^2(4^{2k+1}+3^{k+2}) - 3^{k+2}(13)\end{aligned}$$

由归纳假定  $13|(4^{2k+1}+3^{k+2})$  又  $13|13$

$\therefore 13|(4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}) \quad \therefore n=k+1$  时, 命题也成立.

由 (1)(2)  $\therefore$  对于任意自然数  $n$  均有

$13|(4^{2n+1}+3^{n+2})$ , 即  $4^{2n+1}+3^{n+2}$  能被 13 整除.

例 7. 证明  $(n+1)^n-1$  能被  $n^2$  整除 ( $n \in$  自然数)

证:  $(n+1)^n-1$

$$= C_n^0 n^n + C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} n + C_n^n - 1$$

$$= C_n^0 n^n + C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} n$$

$$= n[C_n^0 n^{n-1} + C_n^1 n^{n-2} + C_n^2 n^{n-3} + \cdots + n]$$

$$= n^2[C_n^0 n^{n-2} + C_n^1 n^{n-3} + C_n^2 n^{n-4} + \cdots + 1]$$

$\therefore$  后者为正整数  $\therefore n^2|(n+1)^n-1$

例 8. 证明多项式  $f(x)=x^{999}+x^{888}+\cdots+x^{111}+1$  能被多项式  $g(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$  整除.

证:  $\because x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1)$

$x^{10}-1=0$  根为 1,  $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^9$

(其中  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{10} + i \sin \frac{2\pi}{10}$ )

$$\therefore (ei)^{10}=1 \quad (i=1,2,\dots,9)$$

$$\begin{aligned}\therefore f(ei) &= (ei)^{9999} + (ei)^{8888} + \dots + (ei)^{1111} + 1 \\ &= (ei)^{9999} \cdot (ei)^9 + (ei)^{8888} \cdot (ei)^8 + \dots + (ei)^{1110} \cdot ei + 1 \\ &= (ei)^9 + (ei)^8 + \dots + (ei) + 1 = 0 \quad \text{故 } g(x)=0 \text{ 的} \\ &\text{根均是 } f(x)=0 \text{ 的根, } \therefore g(x)|f(x)\end{aligned}$$

例9. 求证  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是无理数

证: (用反证法), 若  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  为有理数  $m$ ,  
 则  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = m \quad \therefore \sqrt{3} = m - \sqrt{2}$   

$$\therefore 3 = m^2 - 2\sqrt{2}m + 2 \quad \therefore 2\sqrt{2}m = m^2 - 1$$
  

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{m^2 - 1}{m} \quad \text{此式左边 } \sqrt{2} \text{ 是无理数, 而右边}$$

$\frac{m^2 - 1}{m}$  是有理数, 这是不可能的。

$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{3}$  是无理数

例10. 若三个实数之和为正数, 其积也是正数, 则其立方和也是正数。

证: 设三实数为  $a, b, c$

$$\begin{aligned}\text{则 } a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a+b+c) \cdot \frac{1}{2} \cdot [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + \\ &\quad + 3abc\end{aligned}$$

$\therefore$  左边各项中,  $(a+b+c) > 0$ ,  $3abc > 0$ ,

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 > 0$  即其立方和为正数

注意:  $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$  这是一个常用的恒等式。

说明: 证明有关实数的问题时, 常用到以下几个原则:

- ① 有理数的和、差、积、商、幂仍是有理数;
- ② 对任意一实数  $a$ , 都有  $a^2 \geq 0$ ;
- ③ 有理数与无理数不可能相等;
- ④ 若  $a+b\sqrt{n}=0$ , ( $a, b \in$  有理数)  $n$  是非完全平方的有理数, 则  $a=b=0$  从证题方法上, 经常用反证法, 在解题过程中, 经常用因式分解。

例11. 把复数  $1+\cos\theta+i\sin\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 化为三角函数式

解法一: 设  $z=(1+\cos\theta)+i\sin\theta=a+bi$  则  
 $a=1+\cos\theta$   $b=\sin\theta$

$$\therefore r^2=a^2+b^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\therefore 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4} \quad \therefore \text{模 } r=2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\text{设幅角为 } \phi \quad \text{则 } \operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \phi = \frac{\theta}{2} (\because \sin\phi \geq 0, \cos\phi \geq 0)$$

$$\therefore z = 2\cos\frac{\theta}{2} \left( \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}\text{解法二: } 1 + \cos \theta + i \sin \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

说明: ①  $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$  是复数的代数式, 不能认为只要含有三角函数就是复数的三角函数式;

② 解法一是解这类问题的一般方法, 解法二是利用  $1 + \cos \theta$  和  $\sin \theta$  均含有  $2 \cos \frac{\theta}{2}$  的公因式的特点, 故解法二比较简便。

例12. 解方程 (1)  $2x + |x| = 2 + 6i$

$$(2) \quad x^2 - (3 - 2i)x + 5 = 5i$$

解: (1) 设  $x = a + bi$  则  $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\therefore 2(a + bi) + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 6i$$

$$(2a + \sqrt{a^2 + b^2}) + 2bi = 2 + 6i \quad \text{根据复数相等的定义,}$$

$$\begin{cases} 2a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ 2b = 6 \end{cases}$$

$$\text{解之得 } \begin{cases} a = \frac{4 - \sqrt{31}}{3} \\ b = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{4 + \sqrt{31}}{3} \\ b = 3 \end{cases} \quad (\text{增根})$$

$$\therefore x = \frac{4 - \sqrt{31}}{3} + 3i$$

$$(2) \quad \Delta = (3 - 2i)^2 - 4 \times 5(1 - i) = -15 + 8i = (1 + 4i)^2$$

$$\therefore x = \frac{(3 - 2i) \pm (1 + 4i)}{2} \quad \therefore x_1 = 2 + i \quad x_2 = 1 - 3i$$

例13. 设  $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$  求证  $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$

证:  $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta \cdots (1)$ , (1)式乘 $x$ 得:

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$$

解之,  $\therefore x = \cos\theta \pm i\sin\theta \quad \therefore \frac{1}{x} = \cos\theta \mp i\sin\theta$

$$\begin{aligned}\therefore x^n + \frac{1}{x^n} &= (\cos\theta \pm i\sin\theta)^n + (\cos\theta \mp i\sin\theta)^n \\ &= \cos n\theta \pm i\sin n\theta + \cos n\theta \mp i\sin n\theta \\ &= 2\cos n\theta\end{aligned}$$

例14. 设 $A, B$ 是复数, 求证  $|A| + |B| \geq |A+B|$

证法一: 令  $A = a_1 + b_1i \quad B = a_2 + b_2i$

$$\text{则: } |A| + |B| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2},$$

$$\begin{aligned}|A+B| &= \sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)}\end{aligned}$$

$$[|A| + |B|]^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$[|A+B|]^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2(a_1a_2 + b_1b_2)$$

$$\because (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2)^2$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$$

$$\therefore (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geq (a_1a_2 + b_1b_2)^2 \quad (1)$$

若  $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$

$$\text{则显然有 } \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} > a_1a_2 + b_1b_2$$

若  $a_1a_2 + b_1b_2 \geq 0$

$$\text{则由(1)仍有 } \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \geq a_1a_2 + b_1b_2$$

$$\therefore |A| + |B| \geq |A+B|$$

证法二：设  $A = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

$$B = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\text{则 } |A| + |B| = r_1 + r_2$$

$$\begin{aligned} |A+B| &= |(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)i| \\ &= \sqrt{(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)^2} \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \leq \sqrt{(r_1 + r_2)^2} \\ &= |A| + |B| \end{aligned}$$

$$\therefore |A| + |B| \geq |A+B|$$

例15. 设  $n$  为自然数，计算

$$\left( \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \left( \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n$$

解法一：令  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  则  $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  此为

1 的虚立方根，而  $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ 。  $\therefore x^3 = 1$  三个根为  $1, \omega, \omega^2$

$$\therefore \text{有 } \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad (1)$$

① 当  $n$  为 3 的倍数时  $n = 3k$  ( $k$  为正整数)

$$\therefore \omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k} + \omega^{6k} = \omega^{3k} + \omega^{3k} \cdot \omega^{3k} = 1 + 1 = 2$$

② 当  $n$  不是 3 的倍数时

$$(\omega^n)^3 = (\omega^3)^n = 1^n = 1 \quad \therefore \omega^n \text{ 是 1 的立方根}$$

$$(\omega^{2n})^3 = (\omega^3)^{2n} = 1^{2n} = 1 \quad \therefore \omega^{2n} \text{ 也是 1 的立方根}$$

$$\text{由 (1) 式知 } \omega^{2n} + \omega^n + 1 = 0 \quad \therefore \omega^{2n} + \omega^n = -1$$

综上所述：当  $n$  为 3 的倍数时

$$\left( \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \left( \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n = 2$$

当  $n$  不为 3 的倍数时,

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n = -1$$

解法二:

① 当  $n$  为 3 的倍数时,

$$\text{原式} = \omega^n + \omega^{2n} = 1 + 1 = 2$$

② 当  $n$  不为 3 的倍数时,

i) 若  $n = 3k + 1$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \omega^{3k+1} + (\omega^2)^{3k+1} = \omega^{3k} \cdot \omega + \omega^{6k} \cdot \omega^2 \\ &= \omega + \omega^2 = -1\end{aligned}$$

ii) 若  $n = 3k + 2$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \omega^{3k+2} + (\omega^2)^{3k+2} = \omega^{3k} \cdot \omega^2 + \omega^{6k} \cdot \omega^4 \\ &= \omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega = -1\end{aligned}$$

$\therefore$  当  $n$  为 3 的倍数时

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n = 2$$

当  $n$  不为 3 的倍数时

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n = -1$$

例16. 设  $\beta$  为数  $\alpha$  的一个  $n$  次方根 (即  $\beta^n = \alpha$ ), 1 的  $n$  次方根为:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ .

则  $\beta\varepsilon_1, \beta\varepsilon_2, \dots, \beta\varepsilon_n$  为  $\sqrt[n]{\alpha}$  的所有  $n$  个方根值。

$$\text{证: } (\beta\varepsilon_i)^n = \beta^n \varepsilon_i^n = \alpha \cdot 1 = \alpha. (i=1, 2, \dots, n)$$

$\therefore \beta\varepsilon_i$  为  $\sqrt[n]{\alpha}$  的一个值。

又  $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j \quad (i, j=1, 2, \dots, n, i \neq j) \therefore \beta\varepsilon_i \neq \beta\varepsilon_j$

$\therefore \beta_{\varepsilon_1}, \beta_{\varepsilon_2}, \dots, \beta_{\varepsilon_n}$  为  $n$  个不同的值

$\therefore \beta_{\varepsilon_1}, \beta_{\varepsilon_2}, \dots, \beta_{\varepsilon_n}$  为  $\sqrt[n]{\alpha}$  所有  $n$  个方根。

例17. 求  $a+bi$   $a-bi$  的平方根 ( $b>0$ )

解: 设  $(\sqrt{x} + i\sqrt{y})^2 = a+bi$  ( $x>0, y>0$ )

$$\therefore x-y+2\sqrt{xy}i=a+bi$$

$$\therefore \begin{cases} x-y=a \\ 2\sqrt{xy}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2xy+y^2=a^2 \\ 4xy=b^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1)+(2) \quad x^2+2xy+y^2=a^2+b^2$$

$$\therefore x+y=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \begin{cases} x-y=a \\ x+y=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \quad (3)$$

$$(3)+(4) \quad 2x=a+\sqrt{a^2+b^2} \quad \therefore x=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$(4)-(3) \quad 2y=-a+\sqrt{a^2+b^2} \quad \therefore y=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2}) \\ y=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2}) \end{cases}$$

$\therefore a+bi$  的平方根为:  $\sqrt{x} + \sqrt{y}i$  及  $-\sqrt{x} - \sqrt{y}i$

同样  $a-bi$  的平方根为: ( $b>0$ )

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}i)^2 = a-bi \quad (x>0, y>0)$$

$$\therefore x-y-2\sqrt{xy}i=a-bi$$

$$\therefore \begin{cases} x-y=a \\ 2\sqrt{xy}=b \end{cases} \therefore \begin{cases} x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2}) \\ y=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2}) \end{cases}$$

$\therefore a-bi$  的平方根为  $\sqrt{x}-\sqrt{y}i$  及  $-\sqrt{x}+\sqrt{y}i$

例18. 求  $-1+4\sqrt{5}i$  的平方根

解:  $a=-1$   $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+80}=9$

$$\therefore x=\frac{-1+9}{2}=4 \quad y=\frac{1+9}{2}=5$$

$\therefore -1+4\sqrt{5}i$  的平方根为  $\sqrt{4}+\sqrt{5}i=2+\sqrt{5}i$

另一个平方根为  $-2-\sqrt{5}i$

例19. 不论  $n$  是什么自然数, 则  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$  都是实数。

证: 令  $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$$\text{则 } \bar{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = z^n + (\bar{z})^n = z^n + \overline{(z^n)}$$

$\therefore$  复数  $z^n$  和  $\overline{z^n}$  共轭。

$\therefore z^n + \overline{z^n}$  为实数。

例20. 复数  $z, \alpha, x$  满足关系