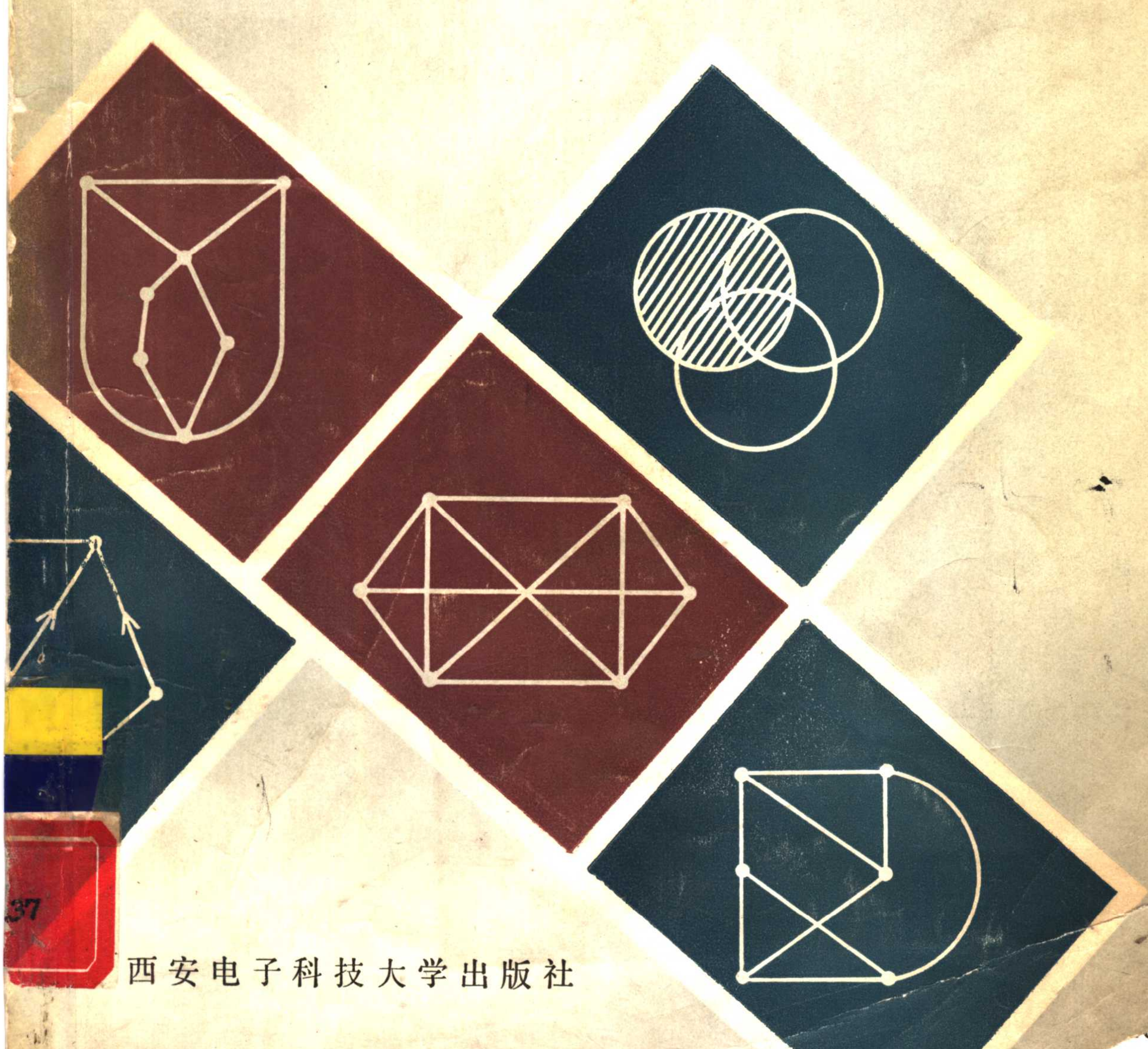
组合数学及其在计算机科学中的应用

庄心谷



西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

组合数学是一门古老而又年青的数学．近二、三十年来，对它的研究有极其迅速的发展，并日益受到重视；在数学教育方面其重要性亦日益增加．

本书包括计数和图论两大部分：排列组合，母函数，递归关系，鸽舍原理和容斥原理，置换群，Polya 定理，图论初步，覆盖回路和图着色，树和查找，网络算法等．

本书可供各类高等学校的计算机科学、数学、以及运筹学专业师生作为教材或参考书．

组合数学及其在计算机
科学中的应用
庄心谷
责任编辑　徐德源

西安电子科技大学出版社出版发行
西安电子科技大学印刷厂印刷
新华书店经销
开本 787 × 1092 1/16　印张 10 12/16　字数 253 千字
1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷 印数1 – 2 000

ISBN 7 – 5606 – 0083 – 2/TP · 0031　　定价：2.20 元

序　　言

组合推理的方法是计算机系统分析的基础．在运筹学问题中组合推理也起着相似的作用．计算机科学中最基本的两类数学问题与计算机程序的速度和逻辑结构有关．速度涉及到程序执行中每一步次数的计数．逻辑结构涉及到一种图的形式——框图．因此，计数和图论是组合数学中的两个重要的内容．

本书将告诉读者如何组合推理和组合摸拟．试图在解基本的离散数学问题方面提高熟练程度．

在本书中着重于组合推理方法的 3 个主要方面：可能发生的不同事件的系统分析方法，一个问题的逻辑结构的探索方法(譬如，找易处理的一部分，或首先解具有 3 个对象的问题而不是 n 个对象的问题)，以及方法的独创性．

本书是作者在西安电子科技大学，先后对研究生和本科生讲授该课的基础上编写成的．由于作者水平有限，错误在所难免，望读者指正．

目　录

第一章 引 言

计数

从根本上说，组合数学是研究计数的方法，计算一种给定型式的对象有多少个，或者计算出现一个确定的事件有多少种方式．例如，下面是组合数学应该回答的一些问题．

1. 4 个人围绕圆桌而坐，问有多少种不同的坐法？

2. 5 个人分 17 元钱，问有多少种分法？

3. 在立方体的 6 个面上着色，若我们有 3 种选取的颜色，问有多少种着色方式？

4. 在国际象棋的棋盘上放 8 个皇后使得没有两个皇后互相攻击，问有多少种放法？

当我们考虑像最后一个排列的问题时，我们一定要考虑到组态不存在的可能性．例如，问题：

5. 在一个国际象棋的棋盘上放 9 个皇后使得没有两个皇后互相攻击，问有多少种放法？解答显然是“零”．因为在一个棋盘上只有 8 行；如果我们放下 9 个皇后，则我们一定把两个皇后放在同一行中，于是这两个皇后将彼此攻击．这仍不能保证我们能排列 8 个皇后使得互相不攻击．我们一定要确定：(1) 是否能完成它；(2) 若能完成有多少种放法．

因为组合数学讨论计数，所以我们使用的数几乎总是正整数．当我们用到“数”这个字时，通常将意味着这样的整数．

由于要求我们计算在一个确定的集合中有多少个对象，所以假定我们讨论的集合是一个有限集．此有限集的特征随实际域而各不相同．

一一对应

在计数中常常用一种称为一一对应的方法，用这种方法来简化我们的计算．通过考察第 1 类的对象和第 2 类的对象一样多，我们可用另一个计数问题来替代一个计数问题．下面给出一个引人注目的例子．

例 1 有 101 个选手参加网球比赛，比赛采用淘汰制（即一场比赛后，失败者退出比赛）．每场比赛以某个选手得胜而终止．在每一轮比赛中要尽可能多的相配留下的选手，但是如果留下奇数个选手，则某一个选手因没有对手而进入下一轮．比赛进行到最后产生一名冠军，问总共要举行多少场比赛？

解决这个问题有两种方法．一种直接的方法是分析每一轮比赛．在第 1 轮中有 50 场比赛，一个选手轮空．50 个胜者和一个轮空者进入第 2 轮且配成 25 场比赛和一个轮空者．之后，25 个胜者和轮空者进入第 3 轮，此时恰好有 13 场比赛．13 个胜者将有 6 场比赛和一个轮空．于是，下一轮具有 3 场比赛和一个轮空．这将留下 4 个选手，于是有一轮 2 场的比赛．最后，两个留下的选手进行最后一场决赛．总共有

$$50 + 25 + 13 + 6 + 3 + 2 + 1 = 100$$

场比赛．

解决这个问题的另一种较好的方法是，考察比赛的场数和失败者人数之间的一一对应．每场比赛有唯一的一个失败者，同时每个失败者在唯一的一次比赛中被击败．因此比

赛的总场数和失败者的总数相同. 开始有 101 个选手且最终只有一个选手未被击败，所以恰好有 100 个失败者.

在组合数学的讨论中我们将不止一次地用到这个方法.

第二章　排列和组合的一般计算方法

大多数的读者已经有一些解简单计数问题的经验，但是有经验的计数者知道，即使看起来相当简单的问题在它们的解方面也会遇到困难。为了掌握组合数学的基本技巧，认真的读者一定要做大量的练习。

本章中我们将探讨两个基本的计数法则和它们的一些结论.这两个法则直观上看是显然的；用数学归纳法能给出它们的形式证明.

2.1　两个基本计数法则

加法法则

若在第 1 个集合中有r_1个不同的元素，在第 2 个集合中有r_2个不同的元素，……，在第 m 个集合中有r_m个不同的元素。若不同的集合是不相交的，则从 m 个集合的一个集合中选取一个元素的方法数为$r_1+r_2+\cdots+r_m$.

乘法法则

假设一个过程能分为 m 个相继的(有序的)阶段，第 1 阶段中有r_1个结果，第 2 阶段中有r_2个结果，……，第 m 阶段中有r_m个结果．若合成的结果是各不相同的，则总的过程有$r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_m$个不同的合成结果.

注意加法法则要求元素的集合不相交，乘法法则要求过程分为有序的阶段，且合成的结果是不同的.

例 1　某教授在他所教的一个代数课班级中有 40 个学生，且在他所教的一个几何课班级中有 40 个学生．问在这两个班级中有多少个不同的学生?

若规定没有学生既在代数课班级中又在几何课班级中，则由加法法则可得答案是 80 个学生．假设 10 个学生同时在两个班级中．为了获得不相交的学生集合，我们把学生分为只在代数课班级中，只在几何课班级中，以及同时在两个班级中的 3 个集合．由于 10 个学生同时在两个班级中，所以 40−10＝30 个学生只修代数．同样 30 个学生只修几何．现在我们能用加法法则来把这 3 个不相交的集合中的学生数加起来．学生总数为 30+30+10＝70.

例 2　有 5 本不同的中文书，6 本不同的英文书，和 8 本不同的法文书．有多少种方式来挑选两本书(无序的)而这两本书不是同一种文字的?

若选取一本中文书和一本英文书，则乘法法则表明能以 $5\cdot6=30$ 种方式来做这种选取；若选取一本中文书和一本法文书，则有 $5\cdot8=40$ 种方式；若选取一本英文书和一本法文书，则有 $6\cdot8=48$ 种方式．这 3 种选取类型是不相交的，因此根据加法法则一共有 30+40+48＝118 种方式.

这个例子代表了解组合问题中的一个基本的思考方法：总是尝试把一个问题分为适当数目的易处理的子问题．可能有较巧妙的方法去解给定的组合问题，但是如果能把最初的问题化为我们熟悉的子问题，那末就会少出错误.

例 3 用字母 a，b，c，d，e，f 来形成 3 个字母的一个序列，有多少种方式：(1)允许字母重复？(2)不允许任何字母重复？(3)包含字母 e 不允许重复？(4)包含字母 e 允许重复？

(1) 允许重复．在序列中每个字母有 6 种选取方式,所以,由乘法法则有：$6\cdot6\cdot6=216$ 种具有重复的 3 个字母的序列．

(2) 不允许重复．第 1 个字母有 6 种选取方式．对于第 2 个字母(不管第 1 个选取的是哪个，都剩下 5 个字母)有 5 种选取方式．同样对于第 3 个字母，有 4 种选取方式．因此有 $6\cdot5\cdot4=120$ 种无重复的 3 个字母的序列．

(3) 包含字母 e 不允许重复．在序列中 e 所处的位置有 3 种选取方式．对于 e 的任何一种选取来说，3 个字母序列中第 1 和第 2 个剩下的位置有 $5\cdot4=20$ 种选取方式．因此有 $3\cdot20=60$ 种具有 e 的 3 个字母的序列．

(4) 包含 e 允许重复．让我们试用(3)中所用的方法．如同前面那样，e 的位置有 3 种选取方式．对于 e 的任何一种选取，其他两个位置有 $6\cdot6=36$ 种选取方式．因为 e 和其他字母能出现多于一次，故 $3\cdot36=108$ 的答案是不正确的．

因为结果不是不相同的，所以违背了乘法法则．考虑序列 ece．在我们的过程中它被生成了 2 次：第 1 次是当 e 放在第 1 个位置，后面是作为后两个位置的 36 种选取方式之一的 ce，第 2 次是当 e 放在最后一个位置，前面是 36 种选取方式之一的 ec．

我们一定要用一种保证不同结果的方法．让我们把问题分为不相交的情形，这些情形是以序列中第 1 个 e 出现的位置为基础的．首先假设第 1 个 e 放在第 1 个位置上；则第 2 个和第 3 个位置各自有 6 种选取方式，其次假设第 1 个 e 放在第 2 个位置上；则第 1 个位置有 5 种选取方式(不能为 e)，且最后位置有 6 种选取方式．最后，若第 1 个 e 放在最后的位置，则前两个位置各自有 5 种选取方式．所以正确答案是 $6\cdot6+5\cdot6+5\cdot5=91$．

如同前面的例子中所做的那样，解大多数计数问题的最难部分是找出问题中的一种结构，用它来把问题分为子情形或阶段．每个计数问题需要对它有专门的理解．组合数学这门课程就是学习如何作出计数问题的原始的解．知道问题 A 的解对解问题 B 有一点帮助，但是只有通过解大量的问题才能掌握这种技巧．

下面的例子用来说明这种解问题的型式．

例 4 从 5 个(相同的)苹果和 8 个(相同的)桔子中能形成多少个非空的不同的集合？

有一些解组合问题经验的读者可能要把问题分为以集合中的元素个数为基础的子情形．计数任何一个这样的子情形十分容易，但是有 13 种子情形；也就是说，集合能有 1 个或 2 个或……直到 13 个水果．

在计数不同的可能的集合中，我们一定要集中于使一个集合不同于另一个集合．回答是在不同的集合中苹果数与(或)桔子数将是不同的．因此我们能用一对整数(a，o)来表征任何集合，其中 a 是苹果数，o 是桔子数．

现在容易计算集合的数．a 有 6 个可能值(包括 0)：0，1，2，3，4，5，且 o 有 9 个可能值．一起有 $6\cdot9=54$ 个不同的集合(注意我们相乘 6 和 9，而不是相加它们，因为一个集合把任一苹果数和任一桔子数组合在一起；若我们要计算取某个苹果数或某个桔子数的方法数，而不是两者，则我们相加)．

由于所问的问题是非空集合，而（0，0）是可能的集合之一，所以欲求的答案是 $54-1=53$.

当你对于一个问题无从下手的时候，建议以有次序的形式写下一些你要枚举的可能结果．在列出的结果中，你将开始看到一种显示的型式．把你列出的结果认为是一个特殊子情形的一部分．为了完成此子情形，考虑你列出的结果需包含多少个结果？

2.2 简单的排列和组合

设 r 为一个正整数，从 n 个元素的集合 S 中取出 r 个按次序排列，称为从 n 个元素中取 r 个排列．若 $S=\{a, b, c\}$，则 ab，ac，ba，ca，bc，cb 是 3 个元素中取两个排列，共有 6 个．我们用 $P(n, r)$来记此排列的个数．若 $r>n$，则 $P(n, r)=0$．若 $r=n$，则将简单地称为 n 个元素的排列．$S=\{a, b, c\}$的排列是 abc，acb，bac，bca，cab，cba．因此 $P(3, 3)=6$．在上面已看到 $P(3, 2)=6$．显然，对于每个正整数 n，$P(n, 1)=n$.

定理 2.2.1 对于正整数 n 和 $r(r\leqslant n)$，$P(n, r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

证明 在构造 n 个元素的 r 个元素排列中，我们能以 n 种方式选取第 1 项，无论第 1 项选取什么我们能以 $n-1$ 种方式选取第 2 项，……，无论前 $r-1$ 项选取什么我们能以 $n-r+1$ 种方式选取第 r 项．用乘法法则我们能以 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$种方式选取 r 项．

若用记法 $n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$（约定 $0!=1$），则可记为

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

对于 $n\geqslant0$，我们定义 $P(n, 0)$为 1，这和上面的公式中 $r=0$ 时相同．n 个元素的排列的个数为

$$P(n, n)=n!$$

例 1 至多用每个英文字母 a，b，c，d，e 一次来形成 4 个字母的"字"的个数等于 $P(5, 4)=5!/(5-4)!=120$．5 个字母的"字"的个数等于 $P(5, 5)=120$.

例 2 有多少个 7 个数字位形成的数，使得数字位是取自集合｛1，2，…，9｝的不同的整数，且使得在任何次序中整数 5 和 6 不能相继地出现？

我们要计算的是集合｛1，2，…，9｝中的 7 个数排列的确定的个数，同时我们把这些 7 个数的排列分为 4 类：（1）5 和 6 不出现在数字位中；（2）5 出现而 6 不出现在数字位中；（3）6 出现而 5 不出现在数字位中；（4）5 和 6 都出现在数字位中．类型（1）的排列是｛1，2，3，4，7，8，9｝的 7 个数的排列，因此它们的个数为 $P(7, 7)=7!=5040$．类型（2）的排列能计数如下：数字 5 能在 7 个数字位的任何一位；剩下的 6 个数字位是｛1，2，3，4，7，8，9｝的 6 个数的排列，因此类型（2）的个数为 $7P(7, 6)=7(7!)=35\,280$．用同样方法得类型（3）的个数为 35 280．为了计算类型（4）的个数，我们研究等于 5 的那一位数字，并区别 3 种可能情况．

（a）第 1 个数字位等于 5:

$$\underline{5}\ \ \underline{(\neq6)}\ \ \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_$$

第 2 个数字位能以 7 种方式选取，而其他 5 个数字位是剩下 7 个整数的一个 5 位数的排列。因此在这一类中有 $7P(7,5)=7\times 7!/2!=17\,640$ 个数。

（b）最后一个数字位等于 5:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{(\neq 6)}\ \underline{5}$$

用相似于前面的论证，我们推得此类也有 17 640 个数。

（c）不是第 1 个或最后一个数字位等于 5:

$$\_\ \_\ \underline{(\neq 6)}\ \underline{5}\ \underline{(\neq 6)}\ \_\ \_$$

等于 5 的数字位能是第 2 个到第 6 个的任何一个数字位，因此能以 5 种方式选取(上述说明中，第 4 个数字位等于 5)，而紧接着 5 的左边的数字位能以 7 种方式选取，而紧接着 5 的右边的数字位能以 6 种方式选取。其他 4 个数字位是剩下 6 个整数的一个 4 位数的排列。因此这一类中有$(5\times 7\times 6)P(6,4)=210\times 6!/2!=75\,600$ 个数。因此类型(4)有 $2\times 17\,640+75\,600=110\,880$ 个数。

用加法法则，得问题的答案是

$$5\,040+2\times 35\,280+110\,880=186\,480$$

我们把刚才考虑的排列适当地称为线状排列。我们想象把元素排列在一条直线上。如果我们把元素排列在一个圆上，则排列数减少了。假设 10 个小孩在一个圆上行进。有多少种不同的方式来形成他们的圆？由于小孩在移动，所以重要的是他们彼此之间相对的位置。因此我们一定要把两个圆形排列看作为相等，若通过一个旋转，一个圆形排列变成另一个圆形排列的话。由于小孩的每个线状排列通过旋转产生另外 9 个圆形排列，所以为了找出圆形排列的个数，我们一定要把线状排列的个数除以 10。因此 10 个小孩的圆形排列数等于 $10!/10=9!$。

定理 2.2.2 从 n 个元素的集合中取 r 个元素的圆形排列数为

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$$

特别，n 个元素的圆形排列数为$(n-1)!$。

证明 前段的讨论实质上包含了证明。r 个元素的线状排列能分为 r 个组，使得在同一组中的每个 r 个元素的线状排列产生相同的 r 个元素的圆形排列。由于有 $P(n,r)$个 r 个元素的线状排列，所以 r 个元素的圆形排列的个数为 $P(n,r)/r$。

如同在讨论圆形排列之前所做的那样，我们将把线状排列仍称为排列。

例 3 有 20 粒小珠，每粒有一种不同的颜色，能做成多少个项练？

一个项练由在一个圆上排列的 20 粒小珠所组成。这种排列有 $20!/20=19!$种。由于不仅一个项练的旋转没有任何改变，而且翻转也没有任何改变，所以项练数为 $19!/2$。

设 r 是非负整数，从 n 个元素的集合中取出 r 个而不考虑其次序时，称为从 n 个元素中取 r 个组合，其组合数记为 $C(n,r)$或$\binom{n}{r}$。换句话说，S 的 r 个元素的组合是 S 的 r 个元素的子集。若 $S=\{a,b,c,d\}$，则$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$是 4 个 S 的 3 元素的子集。若 $r>n$，则 $C(n,r)=0$。若 $n=0$，且 r 是一个正整

数，则 $C(0, r)=0$。为了方便而约定 $C(0, 0)=\binom{0}{0}=1$。对于非负整数 n，易见 $C(n, 0)=1$，$C(n, 1)=n$，$C(n, n)=1$。

定理 2.2.3 对于 $r \leqslant n$，$P(n, r)=r!\ C(n, r)$。因此

$$C(n, r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证明 设 S 是 n 个元素的集合．一个 S 的 r 个元素的组合能以 $P(r, r)=r!$ 种方式排序．由于排序所有 S 的 r 个元素的组合能唯一地得到 S 的每一个 r 元素的排列，由此得到 $P(n, r)=r!C(n, r)$．从 $P(n, r)$ 的公式得到 $C(n, r)$ 的公式．

例 4 在平面上给定 25 个点，无 3 点共线．它们确定了多少条直线？它们确定了多少个三角形？

由于没有 3 个点位于一条直线上，所以每一对点确定唯一的一条直线．因此确定的直线数等于 25 个元素的集合的 2 个元素子集的个数，这个数目为

$$C(25, 2)=\frac{25!}{2!23!}=300$$

同样，每 3 个点确定唯一的一个三角形，所以确定的三角形数为

$$C(25, 3)=\frac{25!}{3!22!}=2300$$

例 5 若每个字包含 3 个，4 个，或 5 个元音字母，用字母表的 26 个字母能构造多少个 8 个字母的字？当然一个字中一个字母能用的次数没有限制。

我们按照它们包含的元音字母的个数来计算字数．

3 个元音字母：元音字母所占的 3 个位置能以 $C(8, 3)$ 种方式选取；其他 5 个位置由子音字母占有．因为元音字母位置能以 5^3 种方式完成，子音字母位置能以 21^5 种方式完成，所以具有 3 个元音字母的字数为

$$C(8, 3)5^3\times 21^5=\frac{8!}{3!5!}5^3\times 21^5$$

4 个元音字母：同理

$$C(8, 4)5^4\times 21^4=\frac{8!}{4!4!}5^4\times 21^4$$

5 个元音字母：同理

$$C(8, 5)5^5\times 21^3=\frac{8!}{5!3!}5^5\times 21^3$$

因此全部字数为

$$\frac{8!}{3!5!}5^3\times 21^5+\frac{8!}{4!4!}5^4\times 21^4+\frac{8!}{5!3!}5^5\times 21^3$$

根据定理 2.2.3 我们立即得到如下的推论。

推论 对于 $r \leqslant n$，$C(n, r)=C(n, n-r)$。

组合数 $C(n, r)$ 有许多重要的和有趣的性质．这里我们先叙述一个性质。

定理 2.2.4 一个 n 个元素的集合的子集数为

$$2^n = C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \cdots + C(n, n)$$

证明 我们通过表明上述方程的两边都计算了一个 n 个元素的集合 S 的子集数来证明此定理。首先我们看到 S 的每一个子集是 S 的一个 r 个元素的子集(对于某个 $r=0$, 1, 2, …, n)。由于 $C(n, r)$等于 S 的 r 个元素的子集数，所以由加法法则得到 $C(n, 0)+C(n, 1)+\cdots+C(n, n)$等于 S 的子集数。

我们也能计算 S 的子集数如下。S 有 n 个元素。在形成 S 的子集中，我们对 n 个元素的每个元素可作两种选择：它进入子集或它不进入子集。因此，由乘法法则我们能有 2^n 种方式来形成 S 的子集。

定理 2.2.4 的证明是通过以两种不同的方法计算一个集合的元素(此处为 n 个元素的集合的子集)，并让这两个结果相等而建立一个等式的实例。这种证明的方法是组合学中十分有用的技巧。

2.3 允许重复的排列和组合

本节中我们讨论允许重复的排列和组合——具有重复元素的一群元素，譬如 b, a, n, a, n, a 的排列以及当能选取一个元素多于一次时，集合的组合。

例 1 6 个字母 b, a, n, a, n, a 有多少种排列？

我们首先选取排列中放置 a 的 3 个位置，有 $C(6, 3)=20$ 种方式，然后从剩下 3 个位置中选出两个位置放置 n，有 $C(3, 2)=3$ 种方式，最后，仅剩的位置放 b，有一种方式。因此有 $20\times 3\times 1=60$ 种排列。

定理 2.3.1 若有 n 个元素，类型 1 的有 r_1 个，类型 2 的有 r_2 个，…，类型 m 的有 r_m 个，其中 $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$，则这 n 个元素的排列数，记为 $P(n; r_1, r_2, \cdots, r_m)$，是

$$P(n; r_1, r_2, \cdots, r_m) = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2\cdots-r_{m-1}}{r_m}$$
$$= \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!} \tag{1}$$

证明 1 首先选第 1 类的 r_1 个位置，然后在剩下位置中选第 2 类的 r_2 个位置，等等。公式(1)为消去阶乘后化简的结果，例如，

$$P(6, 3, 2, 1) = \binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{6!}{3!3!}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{1!}{1!} = \frac{6!}{3!2!1!}$$

证明 2 此证明类似于通过方程 $P(n, r)=C(n, r)\cdot P(r, r)$推出 $C(n, r)$。假设对于每个类型，把类型 i 的 r_i 个元素加编号为 1, 2, …, r_i 的下标使得每个元素不相同，则有 n 个不同元素的 $n!$种排列。让我们通过枚举元素的所有 $P(n; r_1, r_2, \cdots, r_m)$个型式(无下标)，然后对每种型式以一切可能方式设置下标来枚举不同元素的 $n!$个排列。例如，型式 *baanna* 能以 3!种方式设置 a 的下标：

$$ba_1a_2nna_3 \qquad ba_2a_1nna_3 \qquad ba_3a_1nna_2$$

$$ba_3a_2nna_1 \qquad ba_1a_3nna_2 \qquad ba_2a_3nna_1$$

对于下标 a 的 3!种方式的每一种方式，有 2!种方式来下标 n. 因此，一般一种型式有r_1!种方式标记类型 1 的r_1个元素，对于类型 2 有r_2!种方式，等等. 则

$$n! = P(n;r_1,r_2,\cdots,r_m)r_1!r_2!\cdots r_m!$$

或

$$P(n;r_1,r_2,\cdots r_m) = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!}$$

定理 2.3.2 若不计次序以及允许重复，则从 n 个元素集合选取 r 个元素的组合数为 $C(n+r-1,\ r)$.

证明 1 我们只要证明整数集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的所有允许重复的 r 个元素的子集合和整数集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+r-1\}$ 的所有不允许重复的 r 个元素的子集合之间一一对应，而 $(n+r-1)$ 个元素集合的 r 个元素的组合数为 $C\ (n+r-1,\ r)$，定理就得到证明.

让我们从整数集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的一个允许重复的 r 个元素的组合开始，称它为 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r\}$. 并以非降次序排列.

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$$

现在在a_1上加 0，在a_2上加 1，在a_3上加 2，…，在a_r上加 $r-1$. 例如，集合 $\{1,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 变成 $\{1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$. 一般，

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r\} \text{ 变成 } \{a_1+0,\ a_2+1,\ a_3+2,\ \cdots,\ a_r+\ (r-1)\ \}$$

我们这样做的目的是产生一个无重复的新的 r 个元素的集合. 然而增加了元素的值的大小. 现在我们得到的 r 个元素的集合是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+r-1\}$ 的子集（若在加之前a_r为 n，则加之后为 $n+r-1$）. 易见新集合无重复的元素.

$$a_1+0 < a_2+1 < a_3+2 < \cdots < a_r+r-1$$

这就表明了如何从 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 允许重复的取出 r 个元素的集合来产生一个从 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ (n+r-1)\}$ 不允许重复的取出 r 个元素集合. 我们需要证明两者是一一对应的. 从 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ (n+r-1)\}$ 的一个 r 个元素集合开始，称它为$\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r\}$. 若以上升次序排列它，则

$$b_r \leqslant n+r-1,\ b_{r-1} \leqslant n+r-2,\ b_{r-2} \leqslant n+r-3,\ \cdots$$

若我们从第 $(k+1)$ 个元素减去 k，则将得到一个数集，数集中的每个数小于或等于 n. 这就证明了两个集合之间的一一对应，集合具有相同的基数. 定理得证.

证明 2 允许重复地从$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$中取 r 个能表为符号串

$$x_1x_1x_1|x_2||x_4|||x_7x_7$$

其中选取x_k和选取x_{k+1}之间有一个竖号|，两个相继的竖号|表明没有x_k. 事实上，这种表示方式甚至不必用下标，因为

$$xxx|x||x|||xx$$

足以描述下列选取

$$x_1x_1x_1x_2x_4x_7x_7$$

允许重复的 r 个元素的组合数是这些符号的不同排列数。有 r 个 x 和 $(n-1)$ 个竖号（每一个 x_k, x_{k+1} 之间有一个）。所以符号串是 $n+r-1$ 个字符长，且唯一地由放 x 的 r 个位置的任何选取来确定。所以欲求的数为 $C(n+r-1, r)$.

例 2 从 4 个 a，4 个 b，4 个 c 和 4 个 d 中形成 10 个字母的序列，若每个字母至少出现两次，问有多少种方式？

为了用定理 2.3.1，我们需要知道排列中确切的 a，b，c，d 的个数，所以我们一定要把问题分成子问题，而子问题涉及的序列具有给定的 a，b，c，d 的个数。字母次数加起来为 10 而每个字母出现两次或多于两次的有两类。第 1 类是一个字母出现 4 次且另外 3 个字母的每一个出现两次。第 2 类是两个字母出现 3 次且另外两个字母出现两次。

在第 1 类中，选取出现 4 次的字母有 4 种方式，而排列一个字母 4 次和另外 3 个字母两次有 $P(10; 4, 2, 2, 2) = 18\,900$ 种方式。在第 2 类中，选取出现 3 次的两个字母有 $C(4, 2) = 6$ 种方式，而排列两个字母 3 次和另外两个字母两次有 $P(10; 3, 3, 2, 2) = 25200$ 种方式。所以一起有 $4\times 18\,900+6\times 25\,200 = 226\,800$ 种方式。

例 3 从一堆红球，兰球，和紫球中选取 10 个球，若必须至少有 5 个红球，则有多少种选取方式？若至多有 5 个红球，有多少种选取方式？

首先选取 5 个红球，然后任意选取剩下的 5 个球（可能包含更多的红球）。剩下的 5 个球能以 $C(5+3-1, 5) = 21$ 种方式选取。

为了处理至多 5 个红球的约束，我们计算补集。从 3 种颜色中无限制的选取 10 个球有 $C(10+3-1, 10) = 66$ 种方式，选取至少 6 个红球的 10 个球有 $C(4+3-1, 4) = 15$ 种方式（首先选取 6 个红球，然后任选剩下的 4 个球）。所以有 $66-15 = 51$ 种方式选取 10 个球而不多于 5 个红球。

2.4 分配问题

一个分配问题一般等价于一个允许重复的排列或组合。必须把指明的分配问题分成小的情形，并依据简单的排列和组合（允许重复和不允许重复）进行计算。把分配问题模型化的一般准则是，不同元素的分配对应于排列，相同元素的分配对应于组合。

分配的基本模型

不同的元素　r 个不同元素分配到 n 个不同的匣子的过程等价于把不同的元素列成一行且在每个元素上标记一个匣号。因此有

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{r\text{次}} = n^r$$

种分配方式。若 r_i 个元素一定要进入匣子 i，则有 $P(n; r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 种分配方式。

相同元素　r 个相同元素分配到 n 个不同的匣子的过程等价于从匣子的 n 次选取中间允许重复的选取 r 个匣名的一个子集（不计次序）。因此有 $C(r+n-1, r) = (r+n-1)!\ /r!\ (n-1)!$ 种分配方式。

例 1 证明把 r 个相同的球分配到 n 个不同的匣子中且至少每个匣子中有一个球的方式数为 $C(r-1, n-1)$. 若第 1 个匣子中至少 r_1 个球，第 2 个匣子中至少 r_2 个球，…，第 n 个匣子中至少 r_n 个球，则分配的方式数为 $C(r-r_1-r_2-\cdots-r_n+n-1, n-1)$.

在每个匣子中要求至少一个球能包括在允许重复的组合模型中. 然而，我们依据最初的分配问题来处理这个约束. 首先我们在每个匣子中放一个球. 现在计算剩下的 $r-n$ 个球无限制地分配到 n 个匣子中去的方式数. 根据允许重复的组合模型，方式数为

$$C((r-n)+n-1,(r-n))=\frac{(r-n+n-1)!}{(r-n)!\ (n-1)!}=C(r-1,n-1)$$

在第 i 个匣子至少有 r_i 个球的情形中，我们首先在第 i 个匣子中放 r_i 个球，然后把剩下的 $r-r_1-r_2-\cdots-r_n$ 个球以任何方式分配到 n 个匣子中去. 方式数为

$$C((r-r_1-r_2-\cdots-r_n)+n-1,(r-r_1-r_2-\cdots-r_n))$$
$$=C((r-r_1-r_2-\cdots-r_n)+n-1,n-1))$$

例 2 若不能有两个相继的元音字母，则字母 a, e, i, o, u, x, x, x, x, x, x, x, x(8 个 x)有多少种排列?

首先我们以 $5!=120$ 种可能的次序的任何一种来放 a, e, i, o, u. 现在我们在 5 个元音字母前后和中间插进 x 使得相继两个元音字母间至少有一个 x. 能把此情况塑造成 8 个 x 放入 6 个匣子的模型；第 1 个元音字母之前，相继的两个元音字母之间，和最后元音字母之后. 下列型式说明这种情形.

——v ——v ——v ——v ——v ——

匣 1　匣 2　匣 3　匣 4　匣 5　匣 6

(v 为元音字母)

匣 2, 3, 4, 5 必须每一个至少有一个 x. 所以在这些匣子的每一个中放一个 x, 然后计算剩下 4 个 x 分配到 6 个匣子中的方式数——$C(4+6-1, 4)=126$ 种方式. 总共有 $120\times 126=15\,120$ 种排列.

这种非相继性的模型——排列中分离元素的模型——常常发生. 应记住它.

例 3 对于方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=12(x_i\geqslant 0)$ 有多少个整数解. 关于 $x_i>0$ 有多少个解? 关于 $x_1\geqslant 2$, $x_2\geqslant 2$, $x_3\geqslant 4$, $x_4\geqslant 0$ 有多少个解?

此方程的一个整数解，就意味着 x_i 的整数值的一个有序集，加起来为 12, 譬如 $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=3$, $x_4=4$. 我们能把此问题塑造为相同元素的分配问题或者允许重复的组合问题. 设 x_i 表示匣子 i 中的(相同)元素数或者选取的类型 i 的元素数. 我们看出整数解的个数为 $C(12+4-1, 12)=455$.

关于 $x_i>0$ 的解对应于在每个匣子中至少放一个元素的模型或者至少选取每个类型的一个元素的模型. 关于 $x_1\geqslant 2$, $x_2\geqslant 2$, $x_3\geqslant 4$, $x_4\geqslant 0$ 的解对应于至少两个元素放入第 1 个匣中，至少两个元素放入第 2 个匣中，至少 4 个元素放入第 3 个匣中，在第 4 个匣中放入任何个元素(或等价于允许重复的组合模型). 这两类分配问题的各自的解为 $C(12-1, 4-1)=165$ 和 $C((12-2-2-4)+4-1, 4-1)=35$.

让我们总结 3 种已经看到的允许重复的组合问题的等价形式.

允许重复的组合的等价形式

1. 从 n 种不同类元素中允许重复的取 r 个元素的方式数.

2. 把 r 个相同的球分配到 n 个不同的匣子中的方式数.

3. $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$的非负整数的解的个数.

读者要会把以上述形式之一给定的一个问题重新陈述为另外两种形式.

2.5 二项系数

在这一节中我们表明为什么称数 $C(n,\ r)$为二项系数. 然后我们阐述关于二项系数的一些基本等式. 我们用组合选取模型、计算路径数和二项展开 3 种技巧来证明等式.

定理 2.5.1 （二项式定理）

$$(x+y)^n=\binom{n}{n}x^n+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y+\binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{0}y^n$$

证明 在未化简的$(x+y)^n=(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$的展开式中的一般项具有形式 $x^k y^{n-k}$. 在 k 个因子$(x+y)$中选取 x 部分, 另外$(n-k)$个因子中选 y 部分而形成此项. 这样的项数就是从 k 个因子中取 x 部分的选取方式数. 由于这能以$\binom{n}{k}$种方式完成, 所以在化简的展开中$x^k y^{n-k}$的系数就是上面所说的$\binom{n}{k}$.

由于组合数和此结果有联系, 所以称组合数为二项系数.

现在我们来建立一些基本等式, 特别给出这些等式的组合意义. 它们在计数中有广泛的应用.

为了能用计算路径数的技巧来证明等式, 我们先说明二项系数能解释为计算确定的路径数.

例 1 考虑图 2.5.1 中整数直线网格上的点$(n,\ m)$. 从$(0,\ 0)$到$(n,\ m)$的一条增加路径是网格边的一个集合, 在每个顶点处, 边或者以 x 方向增加或者以 y 方向增加. 图中画出的路径能取名为

$$x\ y\ x\ y\ x\ x\ y\ x\ x\ y\ y\ y\ y$$

因为此序列指明了在路径的每个顶点处路径以哪一个方向增加. 从$(0,\ 0)$到$(n,\ m)$有多少条路径呢? 路径恰好以 x 方向增加 n 次同时恰好以 y 方向增加 m 次. 答案是 n 个 x 和 m 个 y 的$(n+m)$个字母的序列数. 指定$(n+m)$个字母中的 n 个 x 就唯一确定了一个序列, 因为剩下的一定是 y. 选取 x 的方式数恰好为$\binom{n+m}{n}$. 这就是路径数.

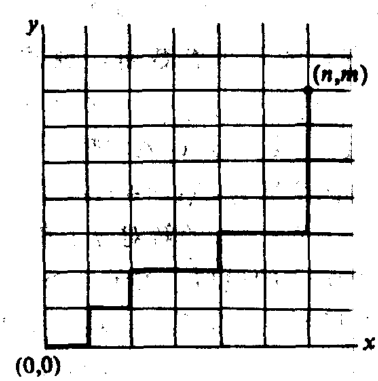


图 2.5.1

定理 2.5.2

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

证明 1 若我们从 n 个元素的集合中选取 r 个, 这就相当于说我们选择$(n-r)$个