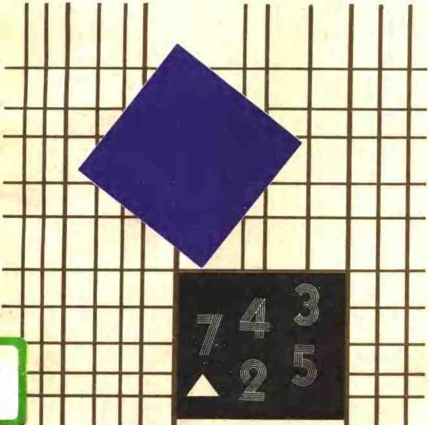
经济数学基础

李英觉　主编



重庆出版社

(川)新登字 010 号

封面设计　徐赞兴
技术设计　刘黎东

李英觉　主编

经济数学基础

重 庆 出 版 社 出 版、发行（重庆长江二路 205 号）
新华书店经销 中共四川省委第二党校印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32 印张 9 插页 2 字数 191 千
1995 年 5 月第一版　1995 年 5 月第一版第一次印刷
印数：1—6,200

*

ISBN7－5366－3115－4/F・127

定价：9.60 元

编 写 说 明

为了适应党校函授教育的特点和需要，我们在四川省党校系统教材编审委员会的指导下，组织编写了哲学社科类、经济类、法律类的系列教材。这些教材将陆续出版，供我校函授教育使用，也可用作干部自学教材和其他高等教育的教材。

由于编写时间比较短促，书中不足之处在所难免，欢迎读者批评指正。

中共四川省委第二党校函授学院

目　　录

第一章 函　数

函数是客观世界中变量之间相互联系的关系的抽象。它是微积分学的一个基本概念，也是微积分学的研究对象。本章是全书的预备知识，介绍函数的概念和函数的简单性质，并引入经济学中常用的几种函数。

§1.1 集　合

一、集合的概念

集合是数学中重要的基本概念之一，集合理论是现代数学的基础。包括经济学在内的现代科学的每一个领域，都广泛地应用到集合理论的概念、方法和符号。因此，了解集合论的一些基本知识对于学习本课程及经济学的课程都是必要的。

人们在社会生活和社会生产的过程中，常常需要研究某些事物组成的集体，例如，一个班的学生，某电冰箱厂在某日生产的全部产品，全体正实数等等，这些事物的集体都是集合。

一般地说，具有某种属性的一些事物的全体称为一个集合。构成集合的每个事物，称为集合的元素。

由有限个元素构成的集合，称为有限集合；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合。一个班的全体学生的集合，某电冰箱厂在某日生产的全部产品的集合都是有限集合，而全体正实数的集合，全体自然数的集合则是无限集合。

我们通常用大写字母 A、B、C、…表示集合，用小写字母 a、b、c、x、y、z、…表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A。一个元素要么属于一个集合，要么不属于一个集合，二者必居其一，且仅居其一。例如，用 Q 表示全体有理数的集合，则 $\frac{1}{3}\in Q$，$\sqrt{2}\notin Q$。

二、集合的表示法

1. 列举法

把集合中的元素不重复、不遗漏、不记次序地列出，放在括号"{ }"里，这样表示集合的方法叫做列举法。

例如，由数 5、2、4、9、0 组成的集合可以写成 $\{5,2,4,9,0\}$ 或 $\{2,5,4,9,0\}$ 或 $\{0,5,4,9,2\}$ 等等，但不可以写成 $\{5,2,2,4,9,0\}$，也不可以写成 $\{5,5,2,4,9,0\}$。

2. 描述法

设 $P(x)$ 为某个与 x 有关的条件或法则，A 为满足 $P(x)$ 的一切 x 构成的集合，则集合 A 记为

$$A=\{x|P(x)\}。$$

例如，$A=\{x|x=2n,n$ 为整数$\}$ 表示全体偶数的集合；$B=\{x|-2<x<2,x$ 是实数$\}$ 表示一切大于 -2 且小于 2 的实数所组成的集合。

集合以及集合的关系还可以用图形表示，称为文氏图，也就是在平面内用一条封闭的曲线围成的图形表示一个集合，集合的元素用图形内的点表示。

三、子集

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的每一个元素都是集

合 B 的元素，就称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A。如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，就称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$，读作 A 真包含于 B 或 B 真包含 A。

显然，自然数集是整数集的子集，整数集是有理数集的子集，有理数集是实数集的子集。

通常我们用 N 表示自然数集，Z 表示整数集，Q 表示有理数集，R 表示实数集。

不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$。我们规定，空集是任何集合的子集。例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数根的集合就是一个空集，即

$$\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}=\varnothing。$$

设 A、B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$。例如，$A=\{x \mid x^2+2x-3=0, x\in R\}$，$B=\{1,-3\}$，则 $A=B$。

我们常常是在一定的范围内讨论具有某种属性的事物，在这个范围内具有此种属性的所有事物构成的集合称为全集，记为 V。全集是相对的，依照讨论问题的范围而定。例如，要检查某省生产的压力锅的质量，则该省生产的所有压力锅就是全集；如果仅仅检查某厂生产的压力锅，则该厂生产的所有压力锅为全集。又例如，所讨论的问题仅限于有理数，有理数集 Q 就是全集；如果讨论的问题扩大到实数范围，实数集 R 就是全集。

四、集合的运算

1. 并集

设 A、B 是两个集合，由属于 A 或属于 B 的一切元素所构成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}。$$

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，

$B=\{3,4,5,6\}$，

则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$。

又例如，如果用 E 表示偶数集，F 表示奇数集，则 $E\cup F=N$。

2. 交集

设 A、B 是两个集合，由属于 A 并且属于 B 的一切元素所构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 并且 } x\in B\}。$$

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，

$B=\{3,4,5,6\}$，

则 $A\cap B=\{3,4\}$。

又例如，偶数集 E 和奇数集 F 的交集是空集，即 $E\cap F=\varnothing$。

A 与 B 的并集和交集可以用文氏图表示，图 1-1 的阴影部分表示 $A\cup B$，图 1-2 的阴影部分表示 $A\cap B$。

3. 差集

设 A、B 是两个集合，由属于 A 但是不属于 B 的一切元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但是 } x\notin B\}。$$

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，

$B=\{3,4,5,6\}$，

则 $A-B=\{1,2\}$，

$B-A=\{5,6\}$。

又例如，$R-Q$ 就是一切无理数所构成的集合。

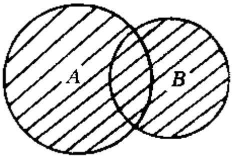


图 1-1

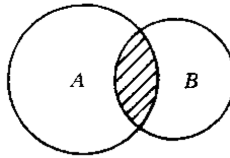


图 1-2

4. 补集

设全集为 V，$A\subseteq V$，由 V 中所有不属于 A 的元素所构成的集合，称为集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in V \text{ 但是 } x\notin A\}。$$

例如，设 $V=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 9, x\in Z\}$，

$A=\{1,2,3,4\}$，

则 $\overline{A}=\{5,6,7,8,9\}$。

又例如，设全集为 R，则有理数集 Q 的补集就是无理数集 $\overline{Q}$。

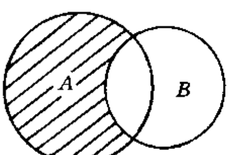


图 1-3

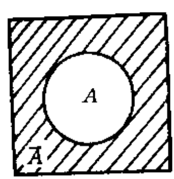


图 1-4

在图 1-3 中，阴影部分表示 $A-B$。在图 1-4 中，正方形表示全集合 V，中间的圆表示 A，阴影部分表示 $\bar{A}$。

§1.2　实数和区间

一、实数和实数的绝对值

全体实数构成的集合称为实数集，用 R 表示。实数集 R 是有理数集与无理数集的并集。有理数包括正整数和正分数、负整数和负分数以及零。有理数可以表示为分数 $\frac{p}{q}$ 的形式（其中 p、q 是整数且 $q\neq0$），即

$$Q=\left\{x \mid x=\frac{p}{q},\quad p,q\in Z,q\neq0\right\}。$$

有理数也可以表示成整数、有限小数或无限循环小数，而无理数只能表示成无限不循环小数的形式。

规定了原点、正方向和单位长度的直线称为数轴。数轴上的点与全体实数是一一对应的，即数轴上的每一个点表示唯一的一个实数，反之，每一个实数都可以用数轴上的唯一的点表示。今后，我们用同一个字母（或数字）既表示某个实数又表示以此实数为坐标的数轴上的点。

一个实数 a 的绝对值 $|a|$ 规定如下：

$$|a|=\begin{cases}a, & 当\ a\geqslant0\ 时，\\ -a, & 当\ a<0\ 时。\end{cases}$$

$|a|$ 是一个非负实数，在数轴上它表示点 a 与原点的距离。

实数的绝对值有下列基本性质：

(1) $|a|=|-a|$；

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(3) $|a|<b(b>0)$与$-b<a<b$等价；

(4) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；

(5) $||a|-|b||\leqslant |a-b|$；

(6) $|ab|=|a|\cdot|b|$。

二、区间

微积分学研究的对象是函数，函数的自变量和因变量的取值范围通常是实数集 R 的一些特殊的子集——区间。区间分为有限区间和无限区间两大类，兹分述如下。

设 $a,b\in R$，且 $a<b$。

1. 开区间

满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的开区间，记为(a,b)，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，如图 1-5 所示。

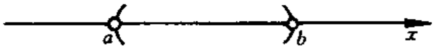


图 1-5

2. 闭区间

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的闭区间，记为$[a,b]$，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，如图 1-6 所示。

开区间(a,b)不包括端点 a,b，而闭区间$[a,b]$含端点 a,b 在内。

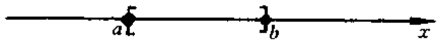


图 1-6

3. 半开区间

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$称为左开右闭区间，如图 1-7 所示；

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$称为左闭右开区间，如图 1-8 所示。

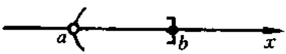


图 1-7

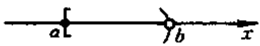


图 1-8

4. 无限区间

无限区间有五种，兹分述如下：

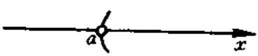


图 1-9

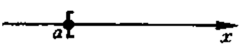


图 1-10

$(a,+\infty)=\{x|a<x\}$，如图 1-9 所示；

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$，如图 1-10 所示；

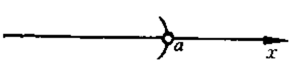


图 1-11

图 1-12

$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$，如图 1-11 所示；

$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$，如图 1-12 所示；

$(-\infty,+\infty)=R$，表示整个数轴。

符号“$-\infty$”读作负无穷大，“$+\infty$”读作正无穷大。它们不是数，仅仅是表示区间的一端或两端无限延伸的记号。

以上四种有限区间和五种无限区间统称为区间，实数 a，b 称为区间的端点。

以后，我们有时需要考虑某个定点 x_0 附近的所有点构成的集合，为此，引入邻域的概念。

设 x_0 是一个给定的实数，δ 是某个正实数，开区间

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域。x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的左邻域，$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右邻域。

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 以后的集合

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$$

称为点 x_0 的去心邻域。

§1.3　函数的概念

一、常量和变量

在研究自然现象和社会经济现象的过程中，常常遇到各种不同的量。其中一些量在研究的过程中保持不变，我们称之为常量，通常用字母 a、b、c、……表示；另一些量在研究的过程中会不断变化，我们称之为变量，一般用字母 x、y、z、……表示。例如，在研究某种产品的总成本时，我们把总成本分为

两部分，一部分是固定成本，它由厂房、设备的折旧费，企业管理费等构成，这些费用在一定的期间不随产品产量的增减而变化，因此固定成本是一个常量；另一部分是变动成本，它由主要原材料费，直接生产人员的工资等构成，这些费用随产品产量的增减固变化，因此变动成本是一个变量。

在选择一定的测量单位之后，量的每个值就可以用数来表示。常量可以用常数来表示，它对应于数轴上的一个定点；变量可以用变数来表示，它对应于数轴上的一个动点。

应当注意的是，常量与变量的概念依赖于所研究的问题的时间和地点，同一个量在某种情况下是常量，而在另外的情况下，就可能是变量。例如，重力加速度 g，人们往往把它看作常量，而事实上在地球各地测得的 g 值都未必相同。某种商品在某地的价格，在短时期内可以看作是常量，在较长时期内就是一个变量。

二、函数的定义

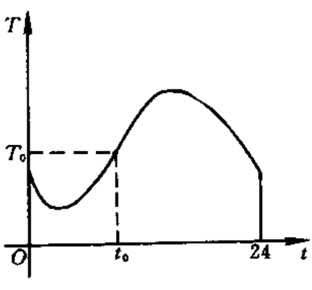


图 1-13

客观世界中的各种变量都是相互联系和相互制约的，我们不仅要研究事物的量的变化，而且更重要的是要研究变量之间相互联系、相互制约的关系，从而把握事物运动的规律性。变量之间相互联系、相互制约关系的一种重要的情况，就是数学

中的函数关系。本书仅仅限于讨论两个变量之间的函数关系，首先看下面的几个实例。

例 1 某气象站用温度记录仪记录某日 24 小时气温变化的曲线，如图 1-13 所示。其中横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T，对任何时刻 $t(0\leqslant t\leqslant 24)$，都有一个确定的 T 值与之对应。例如，当 $t=t_0$ 时，有 $T=T_0$。该曲线反映了两个变量 T 与 t 之间的相互联系。

例 2 某商店 1993 年 1－2 月份电冰箱销售量(单位：台)如下表所示：

月份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量(q)	40	44	49	57	72	86	90	94	76	70	53	47

根据这个表格，当 t 取 1,2,…,12 中的任意一个数时，q 都有一个确定的值与之对应。

例 3 某商店购进食糖 500 公斤，按每公斤 4.2 元的价格出售，当销售量为 x 公斤时，收益 R 为：

$$R=4.2x,\quad x\in[0,500]。$$

当 x 在$[0,500]$取定某一数值时，其收益 R 也有一个确定的数与之对应。例如，当 $x=100$(公斤)时，$R=420$(元)。

上面三个例于的实际意义虽然不同，但是，从数学的角度来看，都是通过一定的对应规则(图、表和公式)来反映两个变量之间的相互关系，这就是数学中的函数关系。

定义 1.1 设 D 是实数集 R 的一个非空子集，如果有一个对应规则 f，使得对于每一个 $x\in D$，通过这个对应规则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定

义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x),x\in D$。x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域。

对于 $x_0\in D$ 所对应的因变量 y 的值，记作 y_0 或 $f(x_0)$，称为 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值。全体函数值的集合，称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

关于函数的定义，下面的几点说明应当注意：

(1)在定义 1.1 中，对应规则 f 是抽象的，但是在具体的函数中，f 则是具体的。例 1 中的 f 是图 1-13 所示的曲线。例 2 中的 f 是该例中的表格。例 3 中的 f 是乘法运算，将自变量 x 乘以常数 4.2。又例如函数 $y=\sin(x^2+1)$，其对应规则 f 是一组运算：x 平方之后加上 1 再取正弦值。对应规则也常用 φ、h 、g 、F 等字母表示，相应的函数记作 $\varphi(x)$ 、$h(x)$ 、$g(x)$、$F(x)$。

(2)在函数的定义中包含五个因素：自变量 x，它是一个主动地变化着的量；定义域 D，它是自变量 x 的变化范围；因变量 y，它是依赖自变量 x 而变化的量；对应规则 f，它表示因变量 y 对自变量 x 的依赖关系；函数值域，它是因变量 y 的取值范围。在这五个因素中，起决定作用的是定义域 D 和对应规则 f，因为函数值域是由这两个因素所确定的。至于自变量和因变量用什么样的字母表示则无关紧要。例如函数 $y=x^2$ 和 $u=v^2$，其定义域都是 R，对应规则都是将自变量平方，因而是相等的函数。也就是说，要确定一个函数，只要将其定义域和对应规则确定下来，那么这个函数就确定了。换句话说，两个函数相等，是指这两个函数有相同的定义域和相同的对应规则。