振动分析的矩阵计算机方法

〔英〕D.J.哈托 著

$$[M]=\begin{bmatrix} M_1 & O & O & O & O & O \\ O & M_2 & O & O & O & O \\ O & O & M_3 & O & O & O \\ O & O & O & M_4 & O & O \\ O & O & O & O & M_5 & O \\ O & O & O & O & O & M_6 \end{bmatrix}$$

机械工业出版社

振动分析的矩阵计算机方法

〔英〕D.J.哈托　著
翁　善　惠　译
吴亢　孙祥根　校

机　械　工　业　出　版　社

Matrix Computer Methods
of Vibration Analysis

D. J. HATTER

LONDON BUTTERWORTHS

* * *

振动分析的矩阵计算机方法

戴维·J·哈托

翁善惠 译 吴亢 孙祥根 校

*

机械工业出版社出版（北京阜成門外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $850\times1168\ ^{1}/_{32}$ · 印张 $6^{1}/_{8}$ · 字数159千字

1982 年 7 月北京第一版 · 1982 年 7 月北京第一次印刷

印数 0,001—5,000 · 定价 0.77 元

*

统一书号：15033·5127

译者的话

在许多情况下，机械振动是有害的，它影响机器的工作性能和寿命，产生噪声，严重时使机器零件破坏而造成事故，应极力避免或控制。也有利用振动原理进行工作的机器，希望获得理想的工作参数，发挥其应有的效能。为此，在机器的设计过程中应进行必要的振动分析与计算。尽管目前对振动分析计算的方法不少，但在实际工作中，要分析计算一个复杂的机械系统却是十分繁杂、困难，经常由于工作量太大而不可能实现。自从电子数字计算机问世以来，由于它具有运算速度快、计算精度高和存储量大（从而计算量也大）等特点，用它来解决大量、复杂的振动计算，可以赢得时间、提高计算精度和节省人力物力。原书著者把振动分析、矩阵代数和计算方法结合起来，实现了电子计算机在振动分析计算领域中的应用。

全书共分八章，第一、二章介绍了矩阵代数的基本知识和运算法则，第三章讨论了使用计算机的可能性和使用方法，这三章给出了学习本书所需基础知识的基本概念和结论，内容简明扼要，对学习后继各章有“入门”的作用。第四至八章讲述了自由振动、柔度、刚度和质量矩阵，承受激励力、具有内阻尼的振动系统，传递矩阵和扭转振动等，各章都提出了计算有关振动问题的流程图和编制程序的要求，是本书的主要部分。最后在附录中附有典型程序。各章并配有适当的练习，启发思考，加深对内容的理解。总之本书的特点是：深入浅出，条理清楚，内容精炼，并有典型程序可以引用或仿效。

本书是机械、动力、热能、交通、工程机械等设计类专业高年级大学生和研究生的教材，对从事实际工作的设计工程师和程序编制人员也是十分有益的参考书。

承蒙吴亢和孙祥根两位同志对译稿作了仔细的校审，并提出了一些宝贵的意见，在此深表感谢。由于译者水平所限，译文中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

前　言

本书的目的是填补存在于振动分析的常规处理和高级专著之间的空白，这些专著是以读者具有相当高的基础知识水平为前提的。

本书是把振动分析、矩阵代数和计算方法结合起来的一种特殊技术的入门书，由著者在东北伦敦工业学校的一系列讲课而发展成目前的状态。这个资料是打算给高年级的大学生、研究生、从事实践工作的工程师和程序编制人员所用的。

对本书的编程方面来说，Fortran 或某些别的高级程序语言的知识是需要的，但是没有这种知识也能消化振动分析和矩阵理论，即使许多概念对他都是新的那些人，通过学习这本书也能获得对编程方法的一些了解。

列入附录中的程序是以 IBM1130 Fortran 语言写成的，用于配有 Fortran 编译程序器的机器上，就很少需要或不需要作修改。

著者对东北伦敦工业学校计算机中心的工作人员，对本书程序内容方面的建议十分感激；对特丽萨·泰勒夫人如此称职地为手稿打字十分感激。对国际商业机器公司善意地允许复制第三、四两章的资料一并致谢。

在这类论述中，能够预料得到难免有些错误，著者对指出本书的错误将是感谢的。

戴维·J·哈托

目　录

第一章 矩阵及其运算

1.1 引 言

一个矩阵是一个数字或数学符号的数组。它能以各种不同的形式出现。矩阵的排列和运算许可用一种特别适合于数字计算的方法来实现代数运算。这一章的目的是提出矩阵运算的法则，以便今后把它用来作振动分析。

1.2 符 号

组成数组的各个结构单元叫做矩阵的元素，它们按列和行排列，各个元素可以是一个常数、一个变量或一个代数式。各元素以标志其所处的行和列来区分。这样，倘若一个元素位于矩阵〔A〕的第4行和第2列的交点上，就管它叫 A_{42}，就是说元素有两个下标，第一个下标标记元素所处的行；第二个下标标记元素所处的列。矩阵的大小给定为行数乘列数。这样，把有3行和4列的矩阵叫做3×4矩阵，写成（3×4）。

1.3 常见的矩阵形式

人们发现某些矩阵形式经常出现，并给每一种形式以专门的描述和符号。最常见的一些形式列举如下：

1.3.1 长方形矩阵

长方形矩阵有 m 行和 n 列，排列在如下所示的方括弧之中，元素符号与1.2节中所规定的一样。例如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14}\cdots\cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\cdots\cdots A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34}\cdots\cdots A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & A_{m4} \qquad\quad A_{mn} \end{bmatrix}$$

在用矩阵写方程式时，使用一个简写符号会得到方便，以免每次引用它时都要详细写出矩阵来。上述矩阵的简写符号简单地记作〔A〕。

1.3.2 列矩阵

列矩阵是长方形矩阵的特例，只有一列。例如

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

列矩阵的简写符号是{A}，花括弧表示是一个列矩阵（也称为向量或向量矩阵）。

1.3.3 行矩阵

这个矩阵与1.3.2节的数组相类似，但仅有一行。例如

$$[A_1 \quad A_2 \quad A_3 \cdots\cdots A_n]$$

行矩阵的简写符号是(A)，圆括弧表示是一个行矩阵（也称为转置向量，称为转置向量的道理将在后面说明）。

1.3.4 方阵

这又是一种长方形矩阵的特例，这种矩阵中行数和列数相等，即$m = n$。在振动分析时出现的方阵有下列各种特殊形式：

对角矩阵

在一个方阵中，连接第一行左端元素和最后一行右端元素的对角线叫做主对角线。对角矩阵中，除了主对角线上的元素之外，其余各元素都是零。例如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & & 0 \\ 0 & & A_{33} & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

带状矩阵

这种形式的矩阵，除了那些处在以主对角线为聚集中心的带上的元素之外，其余各元素都是零。例如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & \cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots A_{nn-1} & A_{nn} \end{bmatrix}$$

这种矩阵在振动分析时是常见的，由于它有三个元素的带宽，所以称之为三对角线矩阵。

对称矩阵

沿主对角线对称排列的元素彼此相等的方阵叫做对称矩阵。即

$$A_{34}=A_{43},\quad A_{21}=A_{12}\qquad \text{一般式为 } A_{ij}=A_{ji}$$

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -6 \\ -2 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & -6 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

单位矩阵和零矩阵

有两种特殊数字形式的方阵。单位矩阵的主对角线上各元素之值均为1，其余各元素均为0。零矩阵的全部元素均为0。后面将要指出这两种形式在程序编制中有什么特殊的用处。单位矩阵的符号是〔I〕，零矩阵的符号是〔0〕。单位矩阵也叫幺阵。

1.4 矩阵运算

一个矩阵只不过是一个具有若干个元素的数组，它没有特有的数字或代数值，其符号〔A〕必须当作一个具有大量数值的简化

符号来考虑，矩阵的运算涉及到这些各个数值的计算。现在来研究各种矩阵运算。

1.4.1 加法

为了把两个矩阵加起来，它们必须有相同的阶数，矩阵相加是在相应的元素之间进行。例如

$$\begin{bmatrix} 1.6 & 2 \\ 3.7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.1 & 3 \\ -2.1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7 & 5 \\ 1.6 & -2 \end{bmatrix}$$

1.4.2 减法

减法与加法的运算相同。例如

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.5 & 7.8 \\ -8.3 & 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.8 \\ 17.3 & 8.8 \end{bmatrix}$$

1.4.3 转置

使用矩阵方法进行振动分析的某些情况下，需要将矩阵的行和列互换，这种运算称之为转置。必须注意，行列互换不改变主元素（第一行左端的那个元素）的位置。例如

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad [X]^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$[X]^T$ 是转置矩阵的符号，有时 用$[X]^1$ 和$[\widetilde{X}]$。

1.4.4 乘法

这种运算有三条基本法则：

（1）两个矩阵必须是相容的，因为第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。

（2）方阵相乘时，乘的顺序是值得注意的。乘法是不可交换的，也就是说，如果$[A]$和$[B]$都是方阵，则一般

$$[A]\times[B]\neq[B]\times[A]$$

（3）积矩阵的行数与第一个矩阵(左乘因子)的行数相同，列数与第二个矩阵(右乘因子)的列数相同。这使得有可能对乘法

的运算进行这样的检查：如果（3×4）右乘以（4×3），则其积是（3×3），即（3×4）$\times$（4×3）=（3×3）。若是颠倒相乘（4×3）$\times$（3×4）=（4×4）。

乘法的过程如下：假定有乘积

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\\ 7 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 13 & 11\\ 6 & 9 & 10 & 16\\ 13 & 17 & 25 & 33\end{bmatrix}$$

积矩阵中的任一元素 A_{ij} 是由左乘因子的 i 行和右乘因子的 j 列的各元素，从 i 行的左端和 j 行的上端开始，乘积相加而得到。对于上述的等式来说，这一点能用下面示出的矩阵说明之：

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 6 & 4\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\\ 7 & 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\times1+2\times2 & 1\times2+2\times1 & 1\times1+2\times6 & 1\times3+2\times4\\ =5 & =4 & =13 & =11\\ 4\times1+1\times2 & 4\times2+1\times1 & 4\times1+1\times6 & 4\times3+1\times4\\ =6 & =9 & =10 & =16\\ 7\times1+3\times2 & 7\times2+3\times1 & 7\times1+3\times6 & 7\times3+3\times4\\ =13 & =17 & =25 & =33\end{bmatrix}\end{array}$$

人们将会发现，用这个方式列出乘法的矩阵，使运算的全部梗概简单易懂了。

下面研究两个相容的矩阵，以任一顺序相乘起来，用以突出乘的顺序的重要性。

假定 $\{A\}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$和$(B)=[3 \quad 4]$

然后分别以两种不同的顺序相乘，

$$\{A\}\times(B)=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}[3 \quad 4]=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

和 $$(B)\times\{A\}=[3 \quad 4]\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=[10]$$

一个标量乘矩阵就等于该标量乘矩阵的各元素，这样

$$5\times\begin{bmatrix}1 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 20\\ 45 & 15\end{bmatrix}$$

1.4.5 除法

矩阵不能直接相除，即除式〔A〕/〔B〕在矩阵代数中没有意义，实现除法要用逆运算。

1.5 逆 运 算

假定有矩阵方程

$$[A]\times[B]=[C] \tag{1.1}$$

如果〔B〕是一个未知的矩阵，〔A〕和〔C〕是已知的，可见〔B〕是〔A〕和〔C〕的函数。为了进行逆运算，假设有另一个矩阵〔A〕$^{-1}$，致使

$$[A]^{-1}\times[A]=[I] \tag{1.2}$$

式中 〔I〕是单位矩阵。

〔A〕$^{-1}$ 叫做〔A〕的逆阵，或叫做〔A〕的倒数。现在以〔A〕$^{-1}$左乘方程式 1.1 的两端，得到

$$[A]^{-1}\times[A]\times[B]=[A]^{-1}\times[C]$$

或

$$[I]\times[B]=[A]^{-1}\times[C] \tag{1.3}$$

以〔I〕左乘〔B〕，保持〔B〕不变（这就是矩阵乘 1 的等值），因此方程式 1.3 为

$$[B]=[A]^{-1}\times[C] \tag{1.4}$$

注意：

（1）只有方阵才有逆阵。若是考虑方程式 1.1 和 1.4，可见只有当〔A〕和〔A〕$^{-1}$ 都是方阵，这两个方程式才是有意义的。

（2）一个矩阵与它的逆阵以任意顺序相乘都得到乘积〔I〕，这是乘法的不可交换法则的一个例外。

1.5.1 以矩阵形式表示的联立方程式

为了检验某些建立逆阵的方法，有必要研究解联立方程的过程。例如：

$$x_1+2x_2+2x_3=2$$
$$2x_1+5x_2+2x_3=4$$
$$x_1+2x_2+4x_3=6$$

根据 1.4.4 节的法则，这些方程式可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

把方程式 1.5 进行矩阵相乘，又再次成为前面的原方程式。

这时，若把方程式 1.5 再写为

$$[A]\{x\}=\{B\} \quad 式中 \quad [A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$\{x\}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad 和\{B\}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

可见

$$\{x\}=[A]^{-1}\{B\} \tag{1.7}$$

也就是说逆阵能够用来对 x_1、x_2 和 x_3 求解。求逆阵的运算基本上能用下述的、用于解联立方程的过程来完成。

1.5.2 高斯消去法

为了解方程式 1.5，把该方程式再写成如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

第 1 步

找出第 1 列中最大的元素（本题中为 2），把包含该元素的整个一行变换上面第 1 行。

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{matrix}$$

必须注意，所找的那个最大的元素是择其绝对值最大者，要是在第 1 列中有一个值，譬如说是 - 3 ，那就用含有 - 3 的那一行。

第 2 步

取出新 2 行中的第 1 个数值，并除以新的主元素，得到数值 0.5（叫做第 1 系数）。

第 3 步

把第 1 行中的各个元素乘以第 1 系数，从第 2 行的相应项中减去各个乘积，得

	2	5	2	4
	(1 - 0.5×2)	(2 - 0.5×5)	(2 - 0.5×2)	(2 - 0.5×4)
	1	2	4	6
或	2	5	2	4
	0	- 0.5	1	0
	1	2	4	6

第 4 步

重复第 2 、 3 步，对第 3 行进行处理，即，取第 3 行中的第 1 个数值除以主元素，得到数值 0.5（第 2 系数）。（注意：这个数值与第 1 系数相等的实际情况只是数值的巧合，它没有特殊意义）。相乘后得到

	2	5	2	4
	0	- 0.5	1	0
	(1 - 0.5×2)	(2 - 0.5×5)	(4 - 0.5×2)	(6 - 0.5×4)
或	2	5	2	4
	0	- 0.5	1	0
	0	- 0.5	3	4

第 5 步

考虑被方框框着的数。这时实际上有一个（2×2）矩阵，该矩阵的运算从第 1 步开始。在这种情况下，第 1 系数等于 1 ，得出

$$\begin{matrix} -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{4} \end{matrix}$$

上述的运算称为矩阵的三角剖分，它把原方程式 1.5 改变成

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

由此可见，对 x_3、x_2 和 x_1（按此顺序）的求解可以很容易地得到如下：

$$2x_3=4, \qquad \text{所以 } x_3=2$$

$$-0.5x_2+x_3=0, \qquad \text{所以 } x_2=4$$

$$2x_1+5x_2+2x_3=4, \qquad \text{所以 } x_1=-10$$

这种解法是以方程式左端逐项消去的办法来解三个联立方程。现在来研究方程式

$$[A][A]^{-1}=[I]$$

式中

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

这个方程式能写成

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \overline{A}_{13} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \overline{A}_{23} \\ \overline{A}_{31} & \overline{A}_{32} & \overline{A}_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

$\overline{A}_{12}$、$\overline{A}_{22}$ 等各项是逆阵的元素。现在取逆阵和单位矩阵的第 1 列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{A}_{11} \\ \overline{A}_{21} \\ \overline{A}_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

可见该式在形式上与方程式 1.5 相同，只不过是用

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{11} \\ \overline{A}_{21} \\ \overline{A}_{31} \end{bmatrix} \text{替换} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{替换} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

完成消去运算后，得到

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & 3 & 0 \end{matrix}$$

然后又得到

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{matrix}$$

这样

$$2\overline{A}_{31} = -1 \qquad 或\ \overline{A}_{31} = -0.5$$

代回原方程式：

$$-0.5\overline{A}_{21} = 1 + 0.5 \qquad 或\ \overline{A}_{21} = -3$$

再代回原方程式：

$$2\overline{A}_{11} = (-5 \times -3) - (2 \times -0.5) \qquad 或\ \overline{A}_{11} = 8$$

于是

$$[A]^{-1}\text{的第 1 列是}\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

对$[A]^{-1}$和$[I]$的第 2 、 3 列采用同样的方法，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{22} \\ \overline{A}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

和

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{A}_{13} \\ \overline{A}_{23} \\ \overline{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

由方程式 1.10 和 1.11 得到逆阵的第 2 、 3 列，于是得到逆阵如下：

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

这个逆阵能够利用方程式 1.7 作如下校验：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

校验结果与 x_1、x_2 和 x_3 早先的解是一致的。

1.5.3 数值研究——列变换

在 1.5.2 节中，计算一个逆阵列的第 1 步，是把第 1 列中包含有最大元素的那一行变换到矩阵的第 1 行去，方程式右端向量的相应元素也同时变换。但是，就实现三角剖分而论，能够证明这个变换是不必要的，按矩阵原来书写的行序也能实现三角剖分。

前例中所引用的个别矩阵就是这种情况，只要被变换过的矩阵主元素的值碰巧为零或是一个比较小的数值，那么，将会看到，想要以这个数值去除第 1 列，在矩阵中就会出现很大的或无穷大的数，从而立即就会造成计算上的困难。这样，把第 1 行用第 1 列中元素最大的那一行替换，就使求逆运算的数字状况得到改善。

人们发现，虽然行变换可以改善局面，但它并不是完善的解决办法，还能够采取进一步的措施。这种措施正好不是把第 1 列中的最大元素替换到主元素的位置，而是把这个矩阵中的最大元素替换到主元素的位置。这不仅需要作行变换，而也需要作列变换。行变换需要变换右端向量的相应元素，列变换则导致未知向量元素的变换，这是由于乘未知向量元素的顺序改变了。这一点下面用 1.5.2 节的第一个例子来证明：

第 1 步完成之后，这个矩阵和右端向量示出如下：

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{matrix}$$

这时，由于最大元素是 5，就对这一列作列变换。为了更便于说明这个运算，插入变换过的未知向量，以供参考。