主编 周怀梧
副主编 毛宗秀 周凤君

医药应用高等数学

杭州大学出版社

编 写 人 员

浙江医科大学	周怀梧、毛宗秀、李乃英
山东医科大学	周凤君、郭怀兰、虞孝珍
江西医学院	张德平、刘　红
河北医学院	鹿玲娣、刘桂然
第二军医大学	高慕勤、张宗圭
延边医学院	金松玲
江西中医学院	李国桢
西安医科大学	李　勇
广东医药学院	黄思翔

前　言

本书包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程、拉普拉斯变换、级数和线性代数，各章配有习题，章末附有习题答案。本书可作为高等医药院校高等数学课程的教材或教学参考书，也可供医药研究人员学习和参考。

参加本书编写的有浙江医科大学、山东医科大学、河北医学院、西安医科大学、第二军医大学、广东医药学院、江西医学院、江西中医学院、延边医学院等九校。编写中充分注意各章的教学要求，重视体现“医药应用”的特色。

限于编者水平，编写时间又比较仓促，因而本书一定有缺点和错误，恳请读者指正。

编　者

1992年9月

目　　录

第一章　函数与极限……1
　第一节　函数……1
　　一、函数概念……1
　　二、复合函数……2
　　三、函数的几种特性……3
　　四、初等函数……3
　第二节　极限……5
　　一、数列的极限……5
　　二、函数的极限……6
　　三、极限的运算法则……10
　　四、极限存在准则与两个重要极限……12
　　五、无穷小量的比较……14
　第三节　函数的连续性……15
　　一、函数连续性概念……15
　　二、函数的间断点……16
　　三、闭区间上连续函数的性质……17
　　四、初等函数的连续性……18
第二章　导数与微分……21
　第一节　导数……21
　　一、函数的变化率……21
　　二、导数的定义……22
　　三、导数的物理意义和几何意义……23
　　四、函数的连续性与可导性的关系……24
　第二节　求导数的一般方法……25
　　一、常数和几个基本初等函数的导数……25
　　二、函数和、差、积、商的求导法则……26
　　三、复合函数的求导……29
　　四、反函数与隐函数的求导……30
　　五、对数求导法……32
　　六、由参数方程所确定的函数的求导……33
　第三节　高阶导数……35
　第四节　中值定理及其应用……36
　　一、中值定理……36
　　二、待定式的极限与罗必达法则……38

第五节　函数性态的研究……………………………………………………40
一、函数的单调性……………………………………………………………40
二、函数的极值………………………………………………………………42
三、曲线的凹凸性与拐点……………………………………………………45
四、函数图形的描绘…………………………………………………………47
第六节　微分及其应用………………………………………………………49
一、微分的概念………………………………………………………………49
二、微分的几何意义…………………………………………………………51
三、微分形式不变性…………………………………………………………51
四　微分运算法则……………………………………………………………52
五、应用微分作近似计算和误差估计………………………………………53
第三章　不定积分……………………………………………………………59
第一节　不定积分的概念……………………………………………………59
一、原函数……………………………………………………………………59
二、不定积分的定义…………………………………………………………60
三、基本积分表………………………………………………………………61
四、不定积分的性质…………………………………………………………62
第二节　换元积分法…………………………………………………………63
一、第一类换元法……………………………………………………………63
二、第二类换元法……………………………………………………………66
第三节　分部积分法…………………………………………………………70
第四节　有理函数积分法……………………………………………………73
第五节　积分表的使用………………………………………………………78
第四章　定积分及其应用……………………………………………………91
第一节　定积分的概念和性质………………………………………………91
一、定积分概念………………………………………………………………91
二、定积分的性质……………………………………………………………94
第二节　定积分的计算………………………………………………………97
一、微积分基本公式…………………………………………………………97
二、定积分的换元法和分部法………………………………………………99
第三节　定积分的近似计算 ………………………………………………104
一、矩形法和梯形法 ………………………………………………………104
二、抛物线法 ………………………………………………………………105
第四节　定积分的应用 ……………………………………………………108
一、微元法 …………………………………………………………………108
二、定积分在几何上的应用 ………………………………………………108
三、定积分在物理上的应用 ………………………………………………113
四、定积分在其他方面的应用 ……………………………………………115
第五节　广义积分 …………………………………………………………118
一、积分区间为无限区间 …………………………………………………118

二、被积函数有无穷间断点 ······120
第五章 无穷级数 ······124
第一节 无穷级数的概念和性质 ······124
一、无穷级数概念 ······124
二、级数收敛的必要条件 ······126
三，无穷级数的基本性质 ······127
第二节 常数项级数收敛判定法 ······129
一、正项级数及其判定法 ······129
二、交错级数及其判定法 ······132
三、绝对收敛和条件收敛 ······133
第三节 幂级数 ······135
一、函数项级数的概念 ······135
二、幂级数及其敛散性 ······135
三、幂级数的运算 ······138
第四节 函数的幂级数展开及其应用 ······140
一、泰勒公式及泰勒级数 ······140
二、函数的幂级数展开 ······142
三、函数展开的应用 ······144
第五节 傅里叶级数 ······147
一、三角级数 ······147
二、三角函数系的正交性 ······147
三、函数展开成傅里叶级数 ······148
第六章 空间解析几何 ······156
第一节 空间直角坐标系 ······156
一、空间点的直角坐标 ······156
二、空间两点间的距离 ······157
第二节 空间曲面和曲线方程 ······158
一、空间曲面及其方程 ······158
二、空间曲线的方程 ······160
第三节 二次曲面 ······162
一、椭球面 ······162
二、椭圆抛物面和双曲抛物面 ······163
三、单叶双曲面和双叶双曲面 ······163
四、旋转曲面 ······165
第四节 行列式 ······166
一、二阶行列式 ······166
二、三阶行列式及其性质 ······167
三、用行列式解三元线性方程组 ······169
第五节 向量及其简单运算 ······171
一、向量概念 ······171

二、向量的加减法 ……171
三、向量与数量的乘法 ……172
四、向量的坐标表示法 ……173
五，两向量的数量积与向量积 ……176
第六节　空间平面和直线方程 ……180
一、平面的方程 ……180
二、两平面相交和平行 ……182
三，空间直线的方程 ……183
第七章　多元函数及其微分法 ……189
第一节　多元函数及其连续性 ……189
一、多元函数概念 ……189
二、二元函数的极限 ……191
三、二元函数的连续性 ……192
第二节　偏导数 ……193
第三节　全微分 ……195
一、全增量与全微分 ……195
二、应用全微分作近似计算 ……197
三、全微分在误差估计中的应用 ……198
第四节　多元复合函数与隐函数的求导 ……199
一、多元复合函数的求导 ……199
二、隐函数的求导 ……202
第五节　高阶偏导数 ……204
第六节　多元函数的极值 ……206
一、二元函数的极值 ……206
二、条件极值与拉格朗日乘数法 ……208
三、最小二乘法 ……209
第八章　多元函数积分法 ……216
第一节　二重积分 ……216
一、二重积分的概念 ……216
二、二重积分的性质 ……218
三、二重积分的计算 ……220
第二节　广义二重积分 ……228
第三节　三重积分 ……229
一、三重积分的概念 ……229
二、直角坐标系下三重积分的计算 ……230
三、柱面坐标系下三重积分的计算 ……232
四、球面坐标系下三重积分的计算 ……234
第四节　曲线积分 ……236
一、对弧长的曲线积分 ……236
二、对坐标的曲线积分 ……239

第五节　格林公式及其应用 ……244
一、格林公式 ……245
二、曲线积分与路径无关的条件 ……247
第六节　曲面积分 ……251
一、对面积的曲面积分 ……251
二、对坐标的曲面积分 ……255
三、高斯公式和斯托克斯公式 ……260
第九章　微分方程及其应用 ……265
第一节　微分方程的基本概念 ……265
第二节　一阶微分方程 ……267
一、可分离变量方程 ……267
二、一阶线性方程 ……270
三、一阶全微分方程 ……273
第三节　可降阶的微分方程 ……276
一、$y^{(n)}=f(x)$ 型方程 ……276
二、$y''=f(x,y')$ 型方程 ……277
三，$y''=f(y,y')$ 型方程 ……278
第四节　二阶线性微分方程 ……279
一、线性方程解的性质 ……280
二、常系数齐次线性方程的解 ……281
三、常系数非齐次线性方程的解 ……283
第五节　微分方程组 ……288
第六节　微分方程的幂级数解法 ……290
第七节　医药数学模型 ……293
一、肿瘤生长的几个常见的模型 ……293
二、药物动力学室模型 ……295
第十章　拉普拉斯变换 ……301
第一节　拉氏变换的概念 ……301
第二节　拉氏变换的性质 ……302
第三节　拉氏逆变换 ……306
第四节　卷积 ……308
第五节　拉氏变换在解微分方程中的应用 ……309
第十一章　线性代数 ……315
第一节　n 阶行列式 ……315
一、n 阶行列式的概念 ……315
二、行列式的性质 ……317
三、行列式的降阶展开 ……320
四、克莱姆法则 ……323
第二节　矩阵 ……326
一、矩阵的概念 ……326

二、矩阵的运算 ……326
第三节　逆矩阵 ……329
一、方阵的行列式 ……329
二、几类特殊的矩阵 ……331
三、逆矩阵 ……332
第四节　矩阵的秩 ……336
一、n维向量及其线性相关性 ……336
二、矩阵的秩 ……338
第五节　初等变换 ……340
一、初等变换 ……340
二、初等矩阵 ……342
第六节　线性方程组 ……345
一、线性方程组的解 ……345
二、齐次线性方程组的解 ……348
三、非齐次线性方程组的一般解 ……350
第七节　矩阵的特征值与特征向量 ……35

第一章　函数与极限

函数反映了变量间的相互依赖关系；极限是研究变量变化趋势的重要方法。高等数学以变量为主要研究对象，所以函数和极限是学习高等数学时必须掌握的基本概念和基本方法。本章在中学数学有关内容的基础上，作必要的复习和补充。

第一节　函　　数

一、函数概念

在观察和研究事物时，通常会遇到两种量：一种是在研究过程中保持不变的量，称为**常量**，另一种是会发生变化的量，称为**变量**。如在自由落体运动中，下落时间 t 和路程 S 都是变量，而重力加速度则可视为常量.

在描述同一过程的诸变量之间，往往是相互联系、相互制约的. 比如，自由落体运动中的时间 t 与路程 S 存在着这样的关系：$S=\frac{1}{2}gt^2$；对于给定的时间 t_0，按此关系可得到确定的路程 S_0 与其对应. 两个变量取值间的这种对应关系，是函数概念的实质.

定义 1　对于给定的数集 D 中的每一个元素 x，通过确定的法则 f，都有一个唯一的元素 y 与其对应，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

称 f 为 D 上的**函数**，并称 D 为函数的**定义域**. 当 x 遍取 D 中一切元素时，对应的 y 组成的数集 M，称为函数的**值域**.

由于 y 的值随 x 而定，所以称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，习惯上也称 y 为 x 的函数. 当定义域 D 和对应法则 f 给定后，值域 M 也随之确定，因此也把 D 上的函数说成从 D 到 M 的函数，记为

$$f: D\longrightarrow M$$

并把 y 称为 x 的**象**，x 称为 y 的**原象**.

例 1　物体从距离地面为 h 处落下，若不考虑空气阻力，则下落路程 S 与时间 t 之间的关系可表示为

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

此函数的定义域 D 为：$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$，值域为 $0\leqslant S\leqslant h$.

例 2　给小白鼠静脉注射西梭霉素后，在不同时间 t 取血化验，测定血液中所含药物的浓度 c，所得数据见下表：

t(min)	20	40	60	80	100	120	140	160
C(μg/ml)	32.75	16.50	9.20	5.00	2.82	1.37	0.76	0.53

由表可见，c 值随 t 值的增大而减小．当 $20\leqslant t\leqslant 160$时，对于每一个给定的 t 值，都有一个确定的 c 值与之对应，因此可记为

$$c=f(t)$$

即在 t 和 c 之间存在函数关系，或说 c 是 t 的函数．

例 3 对于实数集R中的任何一个元素x，当$x>0$时，对应的 y 取值 1；当$x=0$时，y 取值 0；当 $x<0$ 时，y 取值-1．这个函数的定义域为R，值域$M=\{1,0,-1\}$，可用图 1-1 表示．

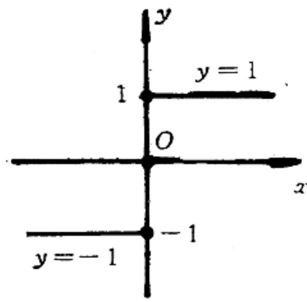


图 1-1

解析法，**列表法**，**图象法**是三种常用的函数表示法．

例 3 中的函数可表示为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ -1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

这种在定义域的不同部分，采用不同解析式表示的函数，称为**分段函数**．例 3 中的这个分段函数称为**符号函数**，记作 $\mathrm{sgn}\, x$．

对于在D上的函数 f 的值域M中的任何一个元素 y，若使它与D中的原象 x 对应，且假定原象 x 是唯一的，则可认为在M上确定了一个函数，此函数称为在D上的函数 f 的**反函数**，记作

$$f^{-1}: M\rightarrow D,$$

或

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in M.$$

例如，函数 $y=x^2$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，它不存在反函数，但若把定义域缩小为$[0,+\infty)$，则存在反函数 $x=\sqrt{y}$，该反函数的定义域和值域都是$[0,+\infty)$．

二、复合函数

定义 2 设 $y=f(u)$是数集E上的函数，$u=\varphi(x)$ 是从数集D到数集E的函数．对于每一个 $x\in D$，经过中间变量 u，都有唯一的 y 与之对应，这时在D上产生了一个新的函数，称为D上的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)],x\in D.$$

例 4 设 $y=f(u)=\lg u,u\in R,u=\varphi(x)=\sin x,x\in R$，则可有复合函数

$$y=f[\varphi(x)]=\lg(\sin x)$$

显然，$u=\sin x$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$不是这个复合函数的定义域．由于当 $\sin x\leqslant 0$ 时，$\lg(\sin x)$无意义，所以$y=\lg(\sin x)$的定义域只能是由使 $\sin x>0$的 x 值所组成的集，即：$2n\pi<x<(2n+1)\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$．

复合函数 $f[\varphi(x)]$中函数 $y=f(u)$的定义域与函数 $u=\varphi(x)$的值域的交集不能为空集．例如函数$y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$，函数 $u=\sqrt{2+x^2}$ 的值域为 $u\geqslant\sqrt{2}\,(x\in R)$．这

两个数集的交集为空集，因此，不存在复合函数 $y=\arcsin\sqrt{2+x^2}$.

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求$f(t^2),f(x^2+1),f(\sin x)$.

解 $f(t^2)=\dfrac{1}{1+(t^2)^2}=\dfrac{1}{1+t^4}$，$t\in R$；

$$f(x^2+1)=\frac{1}{1+(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^4+2x^2+2},x\in R;$$

$$f(\sin x)=\frac{1}{1+\sin^2 x},\ x\in R.$$

利用复合函数概念，可以把一些较为复杂的函数拆成几个简单函数. 在研究或计算函数时，经常使用这种技巧.

例 6 函数 $y=\left[\dfrac{1-(1-x^2)^2}{1+(1-x^2)^2}\right]^3$ 可以看作由 $y=u^3,u=\dfrac{1-v}{1+v},v=w^2,w=1-x^2$等四个简单函数复合而成.

三、函数的几种特性

1.函数的有界性　若存在常数K，使每一个$x\in D$，都有$f(x)\leqslant K$(或$f(x)\geqslant K$)，则称函数f在D内有上界（或下界）. K就是函数的上（下）界.

在D内既有上界，又有下界的函数称为在D内的**有界函数**$f(x)$，即必存在一个正数M，使得

$$|f(x)|\leqslant M,x\in D$$

成立.

例如，因为$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 为有界函数.

2.函数的单调性　设函数$y=f(x),x\in D$，对于任意$x_1\in D$、$x_2\in D$，当$x_1<x_2$时，若有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在D上**递增**；若有 $f(x_1)>f(x_2)$则称函数$f(x)$在D上**递减**. 递增或递减的函数统称为**单调函数**.

3.函数的奇偶性　设函数$y=f(x),x\in D$,若对于每一个$x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**；若对于每一个 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**.

在中学数学里已经知道：奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

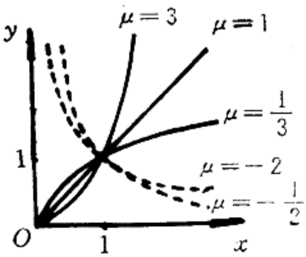
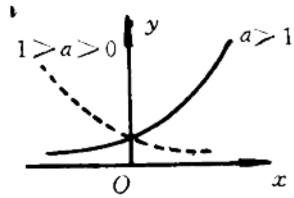
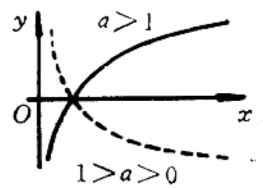
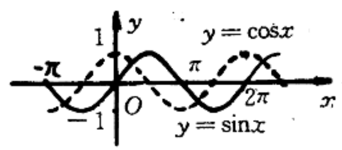
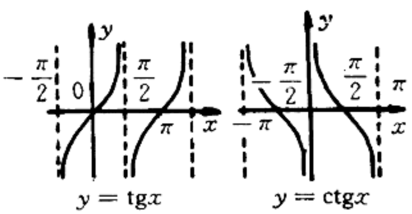
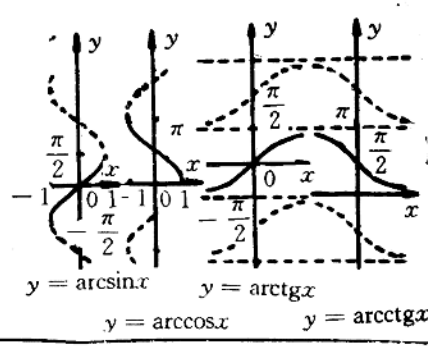
4.函数的周期性　对于函数 $y=f(x),x\in D$，若存在一个不为零的常数T，使得每一个$x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为**周期函数**，称常数T为这个函数的**周期**. 周期函数的周期不是唯一的，通常所讲的周期指**最小正周期**. 例如，对于函数 $y=\sin x$，$2k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$都是它的周期，而最小正周期为 2π.

四、初等函数

中学数学学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数都是经常遇到的简单函数. 这些函数统称为**基本初等函数**. 为了便于查阅，将其归纳为表 1－1.

由常量和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 今后讨论的函数绝大多数是初等函数. 但分段函数都不是初等函数.

表 1-1　基本初等函数表

函数		解析式	定义域	值域	图象
幂函数	μ 次抛物线	$y=x^{\mu}$ $(\mu>0)$	公共定义域 $[0,+\infty)$	公共值域 $[0,+\infty)$	
	μ 次双曲线	$y=x^{-\mu}$ $(\mu>0)$	公共定义域 $(0,+\infty)$	公共值域 $(0,+\infty)$	
指数函数		$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数		$y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,+1]$	
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,+1]$	
	正切函数	$y=\operatorname{tg}x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	
	余切函数	$y=\operatorname{ctg}x$	$x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
	反正切函数	$y=\operatorname{arc\,tg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	
	反余切函数	$y=\operatorname{arc\,ctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$　　(2) $y=\sin\frac{1}{\sqrt{x+2}}$；

(3) $y=\lg\arcsin x$；　　(4) $y=\frac{\sqrt{4-x}}{\lg(x-1)}$.

2. 设$f(x)=x2^x$，求 $f(0),f(1),f(-2),f\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{f(x)},f(x)+1,f(x+1)$.

3. 已知$f(x)=\begin{cases}0,当\ x\leqslant 0;\\ x,当\ 0<x<1;\\ 1,当\ x\geqslant 1,\end{cases}$

求$f(7.32)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(-\sqrt{2})$，并作函数的图象.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2\cos 3x$；　　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

5. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成：

(1) $y=\sin^2(3x+1)$；　　(2) $y=\sqrt[3]{\lg\cos^2 x}$；

(3) $y=10^{\operatorname{arctg} 2x^2}$.

第二节 极　　限

一、数列的极限

定义1 设无穷数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数A，无论预先给定多么小的正数ε，都能找到一项a_N，使得此后所有各项与A之差的绝对值都小于ε，即不等式

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

恒成立(当$n>N$时)，则称常数A为数列$\{a_n\}$的极限或称数列$\{a_n\}$收敛于A. 记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A\quad 或a_n\to A\ (n\to\infty)$$

“当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”是指以下无穷多个不等式同时成立：

$$|a_{N+1}-A|<\varepsilon,|a_{N+2}-A|<\varepsilon,$$
$$|a_{N+3}-A|<\varepsilon,\cdots$$

将数列$\{a_n\}$看成以正整数为自变量的函数，则上述不等式都成立的几何意义，就是与a_{N+1}，a_{N+2}，…对应的点都落在直线$y=A-\varepsilon$与$y=A+\varepsilon$之间的带状区域内（图1-2）.

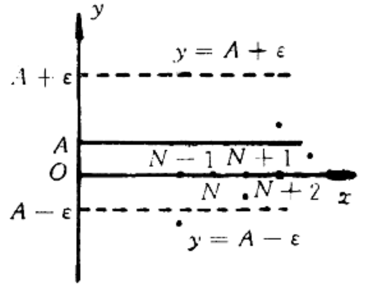


图1-2

例 1 试证数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的极限为 1.

证 ∵ $|a_n-A|=\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$,

对于任给的$\varepsilon>0$，要使$|a_n-A|<\varepsilon$成立，只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$或$n>\frac{1}{\varepsilon}$成立即可. 为此，取$N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$，则当$n>N$时，就恒有下式成立：

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

例 2 试证数列$\left\{\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right\}$的极限是 0.

证 ∵ $|a_n-A|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}$,

对于任给的$\varepsilon>0$，只要$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$或$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$成立，就可使$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立. 为此，取$N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}-1$，则当$n>N$时，就恒有下式成立：

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|>\varepsilon,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

例 3 求无穷数列

$$-5,-5,-5,\cdots$$

的极限.

解 由于这个数列各项与-5之差的绝对值都等于零，所以只要取$N=1$，就有$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立，因此该数列的极限为-5.

由例 3 可知，常数列的极限就是常数本身，即

$$\lim c=c.$$

应注意，并不是所有的无穷数列都有极限的. 例如，无穷数列$\{q^n\}$。当$q=1$时，成为常数列：$1,1,1,\cdots$，它的极限为 1；当$q=-1$时，q^n的值按照n是奇数还是偶数，而轮流取-1和 1，因此不存在极限；当$|q|>1$时，q^n的值随n的增大而无限增大，所以也不存在极限. 当数列不存在极限时，称它是**发散**的.

二、函数的极限

研究数列极限时，利用项数n无限增大来考察数列的变化过程. 研究函数$f(x)$的极限时，自然要考虑到自变量x的变化情况. 通常有两种：自变量的绝对值无限增大；自变量的值趋向于常数x_0，分别记作$x\to\infty$和$x\to x_0$.

1. $x\to\infty$时函数的极限

由于可把数列看成以正整数n为自变量的函数$a_n=f(n)$. 因此可由数列的极限定义，得到当自变量$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限定义：

定义 2 对于预先给定的任意小正数 ε，如果总存在一个正数 N，使满足不等式 $|x|>N$ 的一切 x，相应的函数值 $f(x)$ 都有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A,$$

或 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$.

其几何意义是：对于由 ε 确定的 N，当 $x<-N$ 或 $x>N$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象位于直线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 之间（图 1－3）.

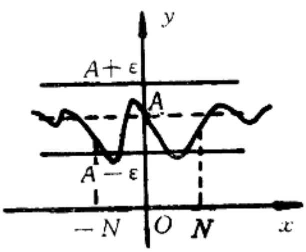


图 1－3

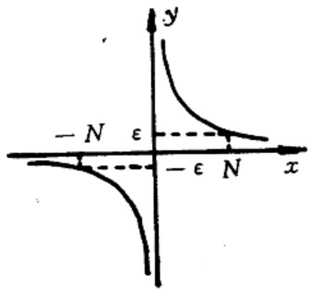


图 1－4

例 4 试证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

证 对于给定的 $\varepsilon>0$，欲使

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

成立，则须有

$$|x|\geqslant\frac{1}{\varepsilon},$$

为此，只要取 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$，则对于使 $|x|>N$ 成立的一切 x 都有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

其几何意义为：直线 $y=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的**水平渐近线**（图 1－4）.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为常数 A，则对于预先给定的任意小正数 ε，在 x_0 的近旁应有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立. 为明确起见，我们把 x_0 的近旁称为 x_0 的 **δ 邻域**，记作 $N(x_0,\delta)$，它是指小区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，这里 δ 也是一个小正数，但是它的大小依赖于 ε 的值.

定义 3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义（x_0 除外），如果对于预先给定的任意小

正数 ε，总存在一个正数 δ，使满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，相应的函数值 $f(x)$ 都有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

或 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to A$.

其几何意义是：对于由 ε 决定的 δ，当 x 在 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内取值时，函数 $y=f(x)$ 的图象位于直线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 之间（图 1-5）.

例 5 试证

$$\lim_{x\to 1}(2x+3)=5.$$

证 ∵ $|f(x)-A|=|(2x+3)-5|=|2x-2|=2|x-1|$.

对于任给的 $\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，只要 $2|x-1|<\varepsilon$ 或 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ 成立即可，为此取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，则当 x 满足不等式

$$0<|x-1|<\delta$$

时，相应的函数值 $f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x)-5|<\varepsilon,$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}(2x+3)=5.$$

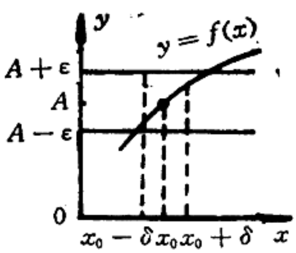


图 1-5

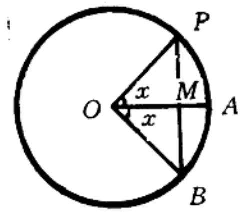


图 1-6

例 6 试证 $\lim_{x\to 0}\sin x=0$.

证 对于给定的 $\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|=|\sin x|<\varepsilon$ 成立，就必须找到依赖于 ε 的 $\delta>0$，使 $|x|<\delta$ 成立. 为此需要找出 $\sin x$ 与 x 间的关系. 在图 1-6 的单位圆中，设 $\angle AOP=\angle AOB=x$，则弦 PB 的长度等于 $2|\sin x|$，弧 $\overparen{PB}$ 的长度等于 $|2x|$，且有

$$|2\sin x|\leqslant|2x| \text{或} |\sin x|\leqslant|x|$$

成立. 于是，若取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|x|<\delta$ 时，必有 $|\sin x|<\varepsilon$. 这就证明

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

例 7 试证：若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则一定存在 x_0 的某一邻域，对该邻域内一切 $x(x\neq x_0)$ 有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

证 设 $A>0$（或 $A<0$），由极限定义，对于任给的小正数 $\varepsilon\leqslant A$（或 $\varepsilon\leqslant -A$），一定存在