陈开周 编著

最优化计算方法

西北电讯工程学院出版社

最优化计算方法

陈开周　编著

西北电讯工程学院出版社

1985.10

内 容 提 要

最优化计算方法是现代工程设计中利用电子计算机进行优化设计的一种新的数学方法。本书较系统地介绍了最优化计算方法中常用而有效的一些基本算法、有关基础理论和应用。书中还编写了一些理论性稍强的内容和几个重要的附录供选学，其中也编入了作者近几年工作的部分新结果。

本书可作为高等工科院校高年级学生、研究生和应用数学专业学生的教学用书，也可供搞优化设计的工程技术人员和科研人员参考。

最优化计算方法

陈开周 编著

责任编辑 景 虹

西北电讯工程学院出版社出版

西北电讯工程学院印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 850×1168 1/32 印张 12 14/32 字数 303 千字

1985年10月第一版 1985年10月第一次印刷 印数1—5,000

统一书号：13322·4 定价：2.50元

前　言

由于现代化生产和科学技术的飞速发展，客观世界中的问题越来越复杂，要求越来越高，许多问题用传统的数学方法，已难于解决，因而迫切需要新的数学理论和新的数学方法。

最优化方法是在生产斗争和科学实验中选取最佳决策的一门学科，它已广泛地应用于空间技术、军事科学、系统识别、无线通讯、光学系统、计算数学、工程设计、自动控制、资源分配、经济管理等等方面。由于在现代化生产和科学技术中提出了许多最优化问题，高速度大容量电子计算机的逐步普及，为使用和发展最优化方法提供了必要的手段；不动点构造性理论的出现，为最优化方法的发展开辟了一条新的途径。对于许多实际问题的解决和许多边缘学科的发展，最优化方法与理论，都起着重要的不可忽视的作用。从目前情况来看，把最优化方法当作一种单纯的技巧，已经不合适了，它已成为一个理论与实践紧密相结合的独立学科。看得更远一些，这个学科的发展，很可能为非线性问题的解决提供了有力的理论基础和有效的方法。

任何一项工程设计都要进行定量分析，选取合适的参数，从原则上讲，其中都有相应的优化问题，由此可见最优化方法应用的广泛性。在近代工程设计中，优化设计是一个新的方向。什么叫优化设计？简言之，就是以快速电子计算机为工具，使用现代最优化方法来进行的设计。每一项复杂工程设计，要达到现代国际水平，不使用最优化方法是很难设想的，只使用电子计算机而不使用最优化方法，不大可能获得最佳结果。在有关专业基本理论知识已掌握的前提下，既使用电子计算机，又使用最优化方法来进行设计，可以说是“如虎添翼”，可以大大提高设计水平。最优

化方法即将成为每一个工程师和科技人员必须掌握的基本知识。

在全国第一、二、三届最优化计算方法学术会议上，报告了许多用最优化方法解决重大实际问题的论文，“上机五分钟，节约千万元”的例子不算少。大会还特别强调指出：为了加速我国实现社会主义四个现代化建设，提高经济效益，必须大力推广使用最优化方法。在国外一些科学技术比较发达的国家，已逐步在普及最优化方法，一般重要的工程设计，都要搞优化设计。在大学里还专门设立有最优化专业和最优化系。正如Avriel一书[12]中所讲，最优化方法“是越来越显得重要的一门学科”。它是现代科学技术中一个必不可少的、重要的、新的数学方法。我们深信积极推广最优化方法，深入开展这方面的理论研究，必将在社会主义现代化建设中发挥积极的作用。

最优化方法包括的内容很广泛，如线性规划、非线性规划、几何规划、动态规划、整数规划、组合优化、……等等。本课程重点只介绍线性规划和非线性规划这两部分的基本方法和基本理论。

目前国内出版的有关最优化方法方面的教材还不多，特别是适合于初学者和搞工程设计人员的教材就更少。本教材是在近几年给工科研究生、数学师资班和工程专业教师讲授最优化计算方法的基础上，将讲稿修改整理和补充后而编写出来的，希望能比较通俗而系统地叙述一些基本理论，和常用而有效的一些新方法，并把近几年我们在科研中的一些收获、体会和研究改进的一些方法总结进去，作为一本入门的教材，供高等工科院校高年级学生、研究生、应用数学专业学生和搞优化设计的工程技术人员和科技人员阅读。

为了适应不同读者的不同需要，对某些内容和习题，打上了“*”号，或写成附录形式，以供选学。对工科专业读者，也可以删去某些理论证明和选学内容，不致影响后面学习。

本书第三章§5和§9(求解超越方程的新算法)，第十一章和附录中多数内容，是编者近几年的部分工作。

书中每章末，附有少量习题供初学者练习。最好的练习是将本书中有关算法编制成源程序，应用到实际问题中去，计算出优化数值结果。

本书由华中工学院数学系优化运筹教研室邓成梁副教授审题，由西安交大数学系游兆永教授审稿，他们仔细地审阅了书稿，提出了宝贵的意见，并给予了极大的鼓励，编者在此谨向游兆永教授和邓成梁副教授表示衷心的感谢。

限于编者水平，加上匆忙完稿，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

于西北电讯工程学院

应用数学系优化教研室

1984年11月8日

符 号 说 明

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$——n维列向量(或点)

$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$——向量$x$的欧氏模(或范数或距离)

$\|x-x^0\|=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}$——点$x$与$x^0$之间的距离

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$——向量$x$与$y$的内积

$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$——$n$个自变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的函数或向量$x$的函数

$\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}$——向量$\boldsymbol{x}$的每个分量都大于向量$\boldsymbol{y}$的相应分量

ϕ——空集

R^n——实n维欧氏空间

$\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2,\cdots,\boldsymbol{e}^n$——$R^n$中$n$个坐标轴的单位向量

$S=\{x|x$所满足的条件$\}$——满足某些条件的x所组成的集合

$S=\{x^1,x^2,\cdots,x^r\}$——由$x^1,x^2,\cdots,x^r$组成的集合

$x\in S$——x属于集合S

$A\subset B$——集合A是集合B的子集

$N\backslash D$——属于集合N而不属于集合D的元素所组成的集合

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$——$m\times n$阶矩阵

$\boldsymbol{A}^T$=矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵

$\boldsymbol{A}^{-1}$=方阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵

$|\boldsymbol{A}|=\det\boldsymbol{A}$——方阵$\boldsymbol{A}$的行列式

Rank$\boldsymbol{A}$——矩阵$\boldsymbol{A}$的秩

$\boldsymbol{I}$——单位方阵

$\boldsymbol{I}_n$——n阶单位方阵

$\nabla f(\boldsymbol{x})$——函数$f(\boldsymbol{x})$的梯度，$\nabla f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_n}\right)^T$

$H(\boldsymbol{x})$——函数 $f(\boldsymbol{x})$的 Hesse 矩阵，

$$H(\boldsymbol{x})=\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{n\times n}$$

目　录

第一章　绪　论

最优化方法主要是研究在一定限制条件下，选取某种方案，以达到最优目标的一门学科。达到最优目标的方案，称为最优方案，搜索最优方案的方法，称为最优化方法。这种方法的数学理论，就称为最优化理论。最优化方法和最优化理论是近二、三十年随着电子计算机的发展和普及而发展起来的，并有广泛的应用。

§1　最优化问题举例

为了具体了解什么是最优化问题，本节先举几个具体例题，以说明之。

例 1(运输问题)　已知某省煤炭有 m 个产地 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，其产量也分别记为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$(吨)，有 n 个销售地 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，每个销售地的需要量也分别记为 b_1，b_2，…，b_n(吨)(见图 1-1)。假定产销是平衡的，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j,$$

由 a_i 到 b_j 的运费单价分别已知为 c_{ij}(元/吨)($i=1,2,3,\cdots,m$; $j=1,2,3,\cdots,n$)。问由每个产地到每个销售地运输量各为多少时，既保证需要量，又使总运费最少？

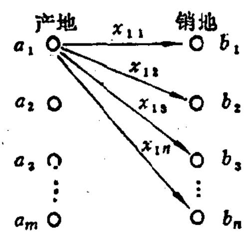

图 1-1　运输问题

解　设由 a_i 到 b_j 的运输量为 x_{ij}(吨)($i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$)，则要求总运费

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

达到最小，其中 x_{ij} 要满足约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\cdots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots n,$$

因此把得到的线性规划问题记为

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\cdots,m, \\ \quad\;\; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\cdots,n, \\ \quad\;\; x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots,n, \end{cases}$$

其中“s.t.”为“*subject to*”的字头，意为“受约束于”。

例 2 （非线性方程组的求解）解非线性方程组是相当困难的一类问题，由于最优化方法的发展，对解非线性方程组提供了一种有力的手段。

解非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \end{cases}$$

在方程组有解的情况下等价于求下列函数 $\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最小值点：

$$\min\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)。$$

例 3(多波形信号发生仪中正弦波形逼近的优化设计[42]) 这是我院有关单位在教学和科研中碰到的一个问题。抛弃物理意义，粗略地讲，即下面的数学问题：

要在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上找出n个分点x_1，$x_2,\cdots,x_n$（n固定)，使这些分点对应的正弦曲线的折线，逼近正弦曲线的误差达到最小(见图 1-2)。

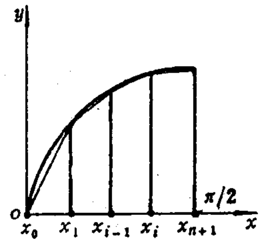

图 1-2　正弦波形的逼近

容易计算出正弦曲线与折线间的面积(以此当作衡量误差的大小)为

$$S=1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(\sin x_i+\sin x_{i-1})(x_i-x_{i-1}),$$

因此可得此问题的数学模型为

$$\begin{cases}\min\left[1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(\sin x_i+\sin x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i-1})\right],\\ \text{s.t. } 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

例 4(微波宽带阶梯阻抗变换器的优化设计) 该问题的数学模型[44]为

$$\begin{cases}\min\limits_{y} F(y)=\min\limits_{y}\{\max\limits_{i=1\sim31}|\Gamma_{n+1}(y,f_i)|\},\\ \text{s.t. } L_k>0,\ Z_{ak}>0,\ k=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

其中

$$y=(Z_{01},\ L_1,\ Z_{02},\ L_2,\ \cdots,\ Z_{0n},\ L_n)^T\in R^{2n},$$

$\Gamma_{n+1}(y,f_i)$由递推公式确定，比较复杂，在此省略见[44]。对此优化设计，国内外曾有不少人研究过，比如文献[25]的作者

Bandler 和 Macdonald试用过许多方法来解决此问题均失败了。因此，用什么样更好的方法来解此问题，是实际中迫切需要解决的问题。此问题为极大极小化问题。

例 5 (对称多节分支线定向耦合器的优化设计) 该问题的数学模型[40]为

$$\begin{cases} \max F(\boldsymbol{x}, \theta), \\ \text{s.t.}\ -3.3 \leqslant c(\boldsymbol{x}, \theta_i) \leqslant -2.7, \\ \qquad d(\boldsymbol{x}, \theta_i) \geqslant 20, \\ \qquad \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, 21)$$

其中

$$F(\boldsymbol{x}, \theta) = \begin{bmatrix} D(\boldsymbol{x}, \theta) \\ \\ -C(\boldsymbol{x}, \theta) \end{bmatrix}, \quad D(\boldsymbol{x}, \theta) = \begin{bmatrix} d(\boldsymbol{x}, \theta_1) \\ d(\boldsymbol{x}, \theta_2) \\ \vdots \\ d(\boldsymbol{x}, \theta_{21}) \end{bmatrix},$$

$$C(\boldsymbol{x}, \theta) = \begin{bmatrix} c(\boldsymbol{x}, \theta_1) \\ c(\boldsymbol{x}, \theta_2) \\ \vdots \\ c(\boldsymbol{x}, \theta_{21}) \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{x} = (H_0, G_0, H_1, G_1, \cdots, H_n, G_n)^{\mathrm{T}},$$

$$H_0 = 1, H_{n-i+1} = H_i, G_{n-i+1} = G_{i-1},$$

$$\left[i = 1, 2, 3, \ \cdots, \ \mathrm{int}\left(\frac{2n+1}{2}\right) \right],$$

$$D(\boldsymbol{x}, \theta) \in R^{21}, \ C(\boldsymbol{x}, \theta) \in R^{21}, \ F(\boldsymbol{x}, \theta) \in R^{42}$$

$$\boldsymbol{a} \in R^{2n+2}, \ \boldsymbol{b} \in R^{2n+2}.$$

这是一个非线性含参量带约束的多目标规划问题。

§2 最优化问题的数学模型与分类

以上列举了几个最优化问题，它们共同的特点是：求变量

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使某函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 达到极小，即这些问题都是函数的极小化问题。通常称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**目标函数**或**评价函数**(因为它常常反映设计质量的好坏)。

（一） 根据问题不同特点的分类

（1） 无约束极小化问题

求 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)^T$ 使 $f(\boldsymbol{x})$ 达到最小，记为

$$\min_{x\in R^n} f(\boldsymbol{x}) \quad 或 \quad \min f(\boldsymbol{x})$$

（2） 等式约束极小化问题

求 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，它满足 m 个条件 $g_i(\boldsymbol{x})=0,(i=1, 2, \cdots, m)$，且使 $f(\boldsymbol{x})$ 达到最小，记为

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\boldsymbol{x})=0, \quad i=1,2,\cdots,m, \end{cases}$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$ 称为**目标函数**，$g_i(\boldsymbol{x})=0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)$ 称为**约束条件**。

（3） 不等式约束极小化问题

求 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 使它满足条件 $g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，且使 $f(\boldsymbol{x})$ 达到最小，记为

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,m, \end{cases}$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$ 称为**目标函数**，$g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，$(i=1,2,\cdots,m)$ 称为**约束条件**。

（4） 一般约束极小化问题，可记为

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}), \\ \text{s.t.} & g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,m, \\ & h_i(\boldsymbol{x})=0, \quad j=1,2,\cdots,p, \end{cases}$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$ 称为**目标函数**，$g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，$h_i(\boldsymbol{x})=0$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 均称为**约束条件**。