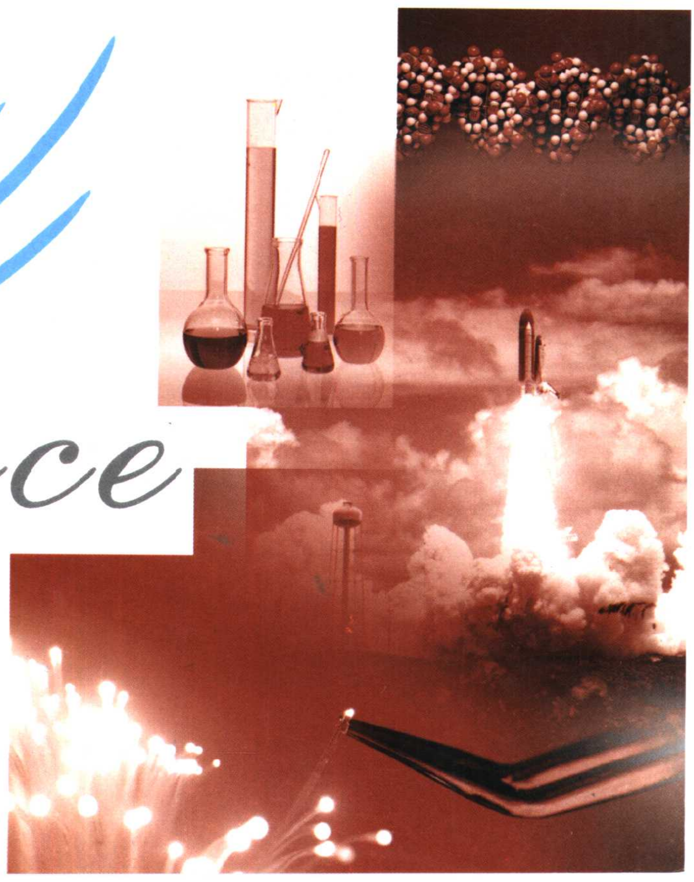
高等学校教材
基础课程

概率论与数理统计

西北工业大学概率论与数理统计编写组 编



西北工业大学出版社

概率论与数理统计

西北工业大学《概率论与数理统计》编写组　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书共分八章。前四章介绍了随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律与中心极限定理等概率论的内容。从第五章开始介绍数理统计学的有关内容，主要包括数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验及回归分析等内容。各章均配有习题，在书后给出了习题的答案。

本书可作为高等学校本科学生的教材，也可供工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/西北工业大学《概率论与数理统计》编写组编．—西安：西北工业大学出版社，2002.1

ISBN 7-5612-1434-0

Ⅰ．概… Ⅱ．西… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 097790 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072　**电话**：0298493844

E-mail：FXB@nwpup.com

网　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西天元印务有限公司

开　本：787mm×1 092mm 1/18

印　张：14

字　数：289 千字

版　次：2002 年 1 月　第 1 版　2002 年 1 月　第 1 次印刷

印　数：1～8 000

定　价：18.00 元

前　言

随着科学技术的发展，概率论与数理统计得到越来越广泛的应用，已成为高等学校大部分专业必修的一门基础课。通过本课程的学习，要使学生掌握研究随机现象的基本思想和方法，并且具备一定的分析问题和解决问题的能力。

本书是根据教育部《概率论与数理统计课程教学基本要求》，并考虑到21世纪教学改革和实际教学的需要编写的教材。以介绍概率论与数理统计的基本知识和方法为主，同时注意它的直观背景和实际意义，力求做到理论与实际相结合，为读者进入理论研究和实际应用打下扎实的基础。

在编写过程中，考虑到随机数学的特点，力求做到深入浅出，易懂易学，全书由两大部分组成：第一部分（第一章至第四章）是概率论的基础知识，第二部分（第五章至第八章）是数理统计初步。每章之后配有一定数量习题，读者可以在教师的指导下选做。另外，我们编写了《概率论与数理统计同步学习指导》（西北工业大学出版社出版）同本教材配套，内容包括本教材每一章的知识网络图、内容提要、典型题解析以及习题详解，书末附有数套近几年的试卷，以帮助学生加深对所学知识的理解，提高学习能力。

本书的编写得到了我系广大师生的帮助，编写者均为从事概率论与数理统计教学10余年的教师。第一章和第二章由徐伟编写；第三章和第四章由赵选民编写；第五章和第六章由秦超英编写；第七章和第八章由师义民编写。周小莉、刘华平、肖华勇和唐亚宁参加了部分工作和习题编写。全书由徐伟统稿定稿。

限于水平，书中不足之处恳请读者指正。

编　者

2001年10月于西北工业大学

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件的概念及其运算

在自然界和人类的活动中，经常遇到各种各样的现象，这些现象大体可以分为两类：必然现象和随机现象．必然现象指在一定条件下可以准确预言结果的现象，这类现象亦称为确定性现象或非随机现象．在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象．随机现象又有个别随机现象和大量性随机现象之分．大量性随机现象所具有的规律性称为统计规律，概率论和数理统计研究的就是这种规律．所谓大量性随机现象是指在相同的条件下可以重复出现的随机现象，如掷硬币，观察某交通要道早晨 7∶30 ～ 8∶30 时段内的交通流量等等，都可以在相同的条件下重复进行．有些随机现象则不然，尽管它们的发生带有偶然性，但原则上不能在相同的条件下重复出现，称这样的现象为个别随机现象．

概率论和数理统计是研究大量随机现象的统计规律性的学科．概率论的特点是先提出数学模型，然后去研究其性质、特点和规律；数理统计则是以概率论的理论为基础，利用对随机现象的观测所取得的数据，来研究数学模型，在此基础上作出推断．

对随机现象的观测总是在一定条件下进行的，若把一次观测视为一次试验，观测的结果就是试验结果，概率论中把满足下列两个条件的试验称为随机试验：

(1) 允许在相同的条件下重复进行；

(2) 试验结果具有随机性，即结果不一定相同，事先不知哪个结果出现．

本书以后所指的试验如无特别声明，均指随机试验．例如：

(1) 在一定条件下进行射击，考虑命中的环数；

(2) 掷一颗均匀的骰子，考虑出现的点数；

(3) 记录某电话交换台某时段内接到的电话呼唤次数．

我们把随机现象的表现，即随机试验的结果数学模型化，可用集合的概念描述．例如，在掷硬币试验中，试验结果有两个："正面"，"反面"，如果用 ω_1 表示结果为正面，ω_2 表示结果为反面，则我们可以用 $A_1 = \{\omega_1\}$，$A_2 = \{\omega_2\}$ 来表

示试验结果. A_1 是一个仅含一个元素 ω_1 的集合, A_2 是一个仅含另一个元素 ω_2 的集合；再考虑掷骰子，若以 ω_i 表示出现点数为 i, $i=1,2,\cdots 6$，则 $A_i=\{\omega_i\}$ 可以表示出现点数为 i 的结果, $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$, $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ 可以分别表示试验结果为奇数和偶数. 如果把随机试验的结果叫做随机事件，则对随机事件给出如下定义.

定义 1.1 对于随机试验，把每一个可能的结果称为样本点，把某些样本点构成的集合称为随机事件，简称事件. 把单个样本点构成的集合称为基本事件，把所有样本点构成的集合称为必然事件或称为样本空间，记为 Ω.

为了以后运算封闭，规定不含任何元素的空集也为事件，称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

例 1.1 写出掷骰子试验的样本点，样本空间，基本事件，事件 A—— 出现偶数，事件 B—— 出现奇数.

解 w_i——掷骰子出现点数为 i, $i=1,\cdots 6$; $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$; 基本事件 $A_i=\{\omega_i\}$, $i=1,2,\cdots,6$; $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$; $B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

§1.2 事件的关系和运算

在概率论中，往往不仅研究随机试验的一个事件，而要研究很多事件，而这些事件之间又有一定的联系，为了表述这些事件之间的联系，下面定义事件之间的各种关系和运算.

(1) 事件的包含和相等　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 称“事件 B 包含事件 A”，记作 $A\subset B$. 这里 A“发生”一词是指，A 所含的任一样本点出现，例如掷骰子，称事件 A—— 出现偶数发生，指在一次观测（一次投掷）中，出现点数为 2 或 4 或 6.

如果事件 B 包含事件 A，同时事件 A 包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$. 显然对任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

事件 A 包含事件 B，即 $A\supset B$，亦称为 B 是 A 的子事件.

(2) 事件的和（并）“二事件 A, B 至少发生一个”也是一个事件，称为 A 与 B 的和（或并），记作 $A\cup B$. 一般地，“事件 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少发生一个”也是一个事件，称为事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的和（或并），记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$；而“可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个出现”也是一个事件，叫做可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和（或并），记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 因此，二事件 A, B 的和，就是“或 A 发生，或 B 发生，或者 A 和 B 同时发生”. 在事件运算的讨论中，应特别注意一些关键词语，如“或者”，“同时”等，它们表述了不同的运算. 显然，对于

任意事件 A，有 $A \cup \varnothing = A$；$A \cup \Omega = \Omega$；若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$.

(3) 事件的积(交)　"二事件 A,B 同时发生"也是一个事件，称为 A 与 B 的积(或交)，记作 $A \cap B$. 类似事件的和，亦有 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的积(交) $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$（简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1 \cdots A_n$）和可列多个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 的积(交) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 显然，$A \cap \Omega = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$.

若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A,B 为互不相容事件，任意事件 A 与不可能事件 $\varnothing$ 为互不相容事件. 当 $A \cap B = \varnothing$，可将 $A \cup B$ 记为"直和"形式 $A + B$.

(4) 事件的差与逆　"事件 A 发生而事件 B 不发生"是一个事件，叫做事件 A 与事件 B 的差，记作 $A - B$. $\Omega - A$ 称为事件 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$.

图 1.1 把事件间的关系及其运算用图形示意出来，易于直观理解，这种图称为文氏图(Venn).

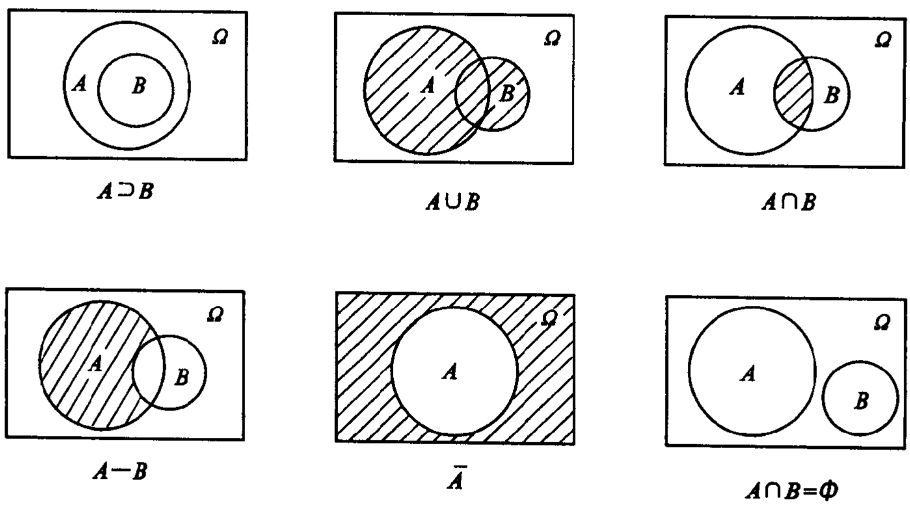


图 1.1　文氏(Venn)图

假设 A,B,C 是三个任意事件，则它们满足：

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A(BC) = (AB)C$

(3) 分配律　$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

$A(B - C) = (AB) - (AC)$

(4) 对偶律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 一般地，对偶律可表述为

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

注意，文氏图仅是一种直观示意，不能作为证明工具，对于上述运算律的

证明,需用严格的集合论证明手法,下面给出一例.

例 1.2　证明对偶律$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

证明　在集合关系证明中,要证明 $A \subset B$,需且只需证明对于 A 中的任意一元素 ω,ω 亦为 B 中的元素即可. 用符号可表述为

$\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$. 这里符号"$\forall$"读作"对于任意的","$\in$"读作"属于","$\Rightarrow$"读作"推出". 现在给出证明:

$\forall \omega \in \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow \omega$ 不属于 A 同时 ω 不属于 $B \Rightarrow \omega$ 不属于

$$A \cup B \Rightarrow \omega \in \overline{A \cup B}$$

从而知

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$$

另一方面

$\forall \omega \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \omega$ 不属于 $A \cup B \Rightarrow \omega$ 不属于 A,同时 ω 不属于 $B \Rightarrow$

ω 属于 $\bar{A}$,同时 ω 属于 $\bar{B} \Rightarrow \omega \in \bar{A} \cap \bar{B}$

从而得知

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

因而

$$\overline{A \cup B} = \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

由于事件是集合,事件的运算即是集合的运算,表 1.1 给出概率论中事件及其运算与集合论中集合及其运算的术语对照.

表 1.1　术语对照表

符号	概率论	集合论
ω	样本点	元素
Ω	必然事件(基本事件空间)	空间(全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
A	事件	子集
$\omega \in A$	事件 A 发生	ω 是 A 中的元素
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A = B$	二事件 A,B 相等	二集合元素完全相同
$A \cup B$	二事件 A,B 至少发生一个	二集合的并集
$A \cap B$	二事件 A,B 同时发生	二集合的交集
$A - B$	事件 A 发生而同时 B 不发生	二集合的差集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 对 Ω 的补集
$A \cap B = \varnothing$	二事件 A,B 互不相容	二集合 A、B 不相交

例 1.3　设 A,B,C 为三个事件，则：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C}$$

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生可表示为

$$AB\overline{C}$$

(3) 所有这三个事件同时发生可表示为

$$ABC$$

(4) 这三个事件恰好发生一个可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$$

(5) 这三个事件恰好发生二个可表示为

$$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$$

(6) 这三个事件至少发生一个可表示为

$$A\cup B\cup C$$

或

$$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$$

例 1.4　从一只黑箱依次取两球，箱中装有 2 只白球(标号 1,2)，2 只黑球(标号 3,4)，则可能结果是

$$(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)$$
$$(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)$$

若以事件 A 表示第一次取黑球，以事件 B 表示第二次取黑球，则

$$A=\{(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$
$$B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(4,3)\}$$
$$AB=\{(3,4),(4,3)\}$$
$$A-B=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$
$$\overline{A}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)\}$$

§1.3　随机事件的概率

在一次随机试验中，随机事件可能出现，也可能不出现，但它出现的可能性的大小是客观存在的．例如，掷一枚均匀的硬币，由对称性知，“正面”和“反面”这两个事件出现的可能性都是 1/2. 又如掷一枚均匀的骰子，出现点数“1”，“2”，…，“6”这 6 个事件可能性都是 1/6. 可见，事件发生的可能性是客观存在，并且可以用一数字来度量，概率就是度量这种可能性大小的数字特征，它是概率论中最基本的概念．

本节先从频率的概念出发，引入概率的统计定义，然后给出特定范围内，

即古典概型以及几何概型场合概率的定义，最后给出概率的公理化定义并讨论这一定义下概率的一些常用性质．

1.3.1 概率的统计定义

历史上有许多人做过掷硬币这一随机试验，表 1.2 给出了统计学家德莫根、浦丰以及皮尔逊等人的试验结果．

表 1.2 掷“硬币”试验结果

实验者	掷次数 n	出现“正面”次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
德莫根	2 048	1 061	0.518
浦　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.2 可以看出，随着试验次数的增加，描述出现“正面”可能性大小的量 —— 频率明显地趋于 0.5. 大量试验表明，这一结果具有一般性，即在随机试验中，随着试验次数 n 的增加，事件 A 出现的频率趋于某一确定的数字 $p, 0 \leqslant p \leqslant 1$. 由此引出如下概率的统计定义．

定义 1.2 在随机试验中，若随机事件 A 出现的频率 m/n 随着试验次数 n 的增加，趋于某一常数 $p, 0 \leqslant p \leqslant 1$，则定义事件 A 的概率为 p，记作 $P(A) = p$.

由定义 1.2 可以证明概率的统计定义具有如下性质．

性质 1.1 （概率统计定义的性质）

(1) 对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$；

(3) 对于两两互斥的有限多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，$P(A_1 + \cdots + A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$

证明 (1) 是显然的；(2) 由于 Ω 是必然事件，每次试验均发生，则其频率恒等于 1，自然 $p = 1$；对于 $\varnothing$，由于它表示不可能事件，在每次试验中均不可能发生，则其频率恒等于 0，$p = 0$；(3) 根据 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互斥，所以 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$ 的频率 $\frac{r}{n}$，与 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的频率 $\frac{r_1}{n}, \frac{r_2}{n}, \cdots, \frac{r_m}{n}$ 满足等式

$$\frac{r}{n} = \frac{r_1}{n} + \frac{r_2}{n} + \cdots + \frac{r_n}{n}$$

根据定义 1.2 知

$$P(A_1 + \cdots + A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$$

概率的统计定义直观地描述了事件发生的可能性大小，反映了概率的本质内容．但也有明显的不足，即无法根据此定义计算某事件的概率．例如，投掷硬币的例子中，当硬币很均匀时，随着试验次数的增加，出现正面的频率趋于 1/2，而且当试验次数越大时，频率离概率的近似程度越近．然而实际试验次数总是有限的，n 要多大，准确到什么程度，定义中没有确定表述．为此，将研究范围缩小，给出可计算的概率定义．

1.3.2 概率的古典概型定义

古典概型是古典概率模型的简称，它是指这样一类随机试验：

(1) 样本空间中仅含有限个样本点；

(2) 每个样本点出现的可能性是一样的．

其一表述的是样本点的有穷性，其二表述的是样本点出现的等可能性．例如，在一黑箱中放置 n 个完全相同的球，每个球上标记号码 $1,2,\cdots n$，现从箱中随机地取出一球，那么，这 n 个球中每个球被取出的可能性都是 $1/n$.

对于古典概型，以 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 表示样本空间，$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示样本点．对于任一随机事件 $A=\{\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_m}\}$，下面给出概率的古典概型定义．

定义 1.3　假设 Ω 共含 n 个样本点，对于任意事件 A，它含 m 个样本点，则定义 A 的概率为 m/n，记作

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}} \tag{1.1}$$

式(1.1)给出的古典概型场合的概率定义是符合实际的．例如，掷硬币，如果硬币均匀，即出现"正面"，"反面"是相等可能的，则由式(1.1)，出现"正面"的概率等于 1/2；掷均匀骰子，出现点数 1 的概率为 1/6；从放有 n 个相同球的黑箱中取球，每个球被取出的概率为 $1/n$.

式(1.1)的定义虽然简单，但对于一给定的随机试验，要计算某一事件 A 的概率不是一件简单的问题，有些问题具有相当的难度，下面给出一些古典概型概率计算的例子．

例 1.5(取球问题)　箱中有 α 个白球，β 个黑球，从中任取 $a+b$ 个球，试求所取的球恰好含 a 个白球，b 个黑球的概率($a\leqslant\alpha,b\leqslant\beta$).

解　此例的随机试验是从箱中随机地取出 $a+b$ 个球，取后不返回，属于排列组合计算中的组合问题．样本空间中所含的样本点个数为 $n=C_{\alpha+\beta}^{a+b}$，这里记号"C_l^k"表示从 l 中取出 k 个组合的所有可能组合数．事件 A"有 a 个白球，b 个黑球"，所含的样本点个数为 $m=C_\alpha^a C_\beta^b$. 因而事件 A 的概率为

$$P(A)=C_{\alpha+\beta}^{a+b}/C_\alpha^a\cdot C_\beta^b$$

例 1.6(分房问题) 有 n 个人,每个人都以同样的概率 $1/N$ 被分配在 $N(n \leqslant N)$ 间房中的每一间中,试求下列各事件的概率:

(1) 某指定 n 间房中各有一人;

(2) 恰有 n 间房,其中各有一人;

(3) 某指定房中恰有 $m(m \leqslant n)$ 人.

解 先求样本空间中所含样本点的个数.

首先,把n个人分列N间房中去共有N^n种分法,其次,求每种情形事件所含的样本点个数.

(a) 某指定 n 间房中各有一人,所含样本点的个数,即可能的分法为 $n!$;

(b) 恰有 n 间房中各有一人,所有可能的分法为 $C_N^n n!$;

(c) 某指定房中恰有 m 人,可能的分法为

$$C_n^m(N-1)^{n-m}.$$

进而我们可以得到三种情形下事件的概率,其分别为:

(1)$n!/N^n$; (2)$C_N^n \cdot n!/N^n$; (3)$C_n^m(N-1)^{n-m}/N^n$.

上述分房问题中,若令 $N=360, n=30, m=2$ 则可演化为生日问题,全班学生 30 人,求:

(1) 某指定 30 天,每位学生生日各占一天的概率;

(2) 全班学生生日各不相同的概率;

(3) 全年某天恰有二人在这一天同生日的概率.

利用上述结论可得概率分别为:

(1) $30!/365^{30}$;

(2) $C_{365}^{30} \cdot 30! \approx 0.294$;

(3) $C_{30}^2(364)^{28}/(365)^{30}$

由(2) 立刻得出,全班 30 人至少有 2 个人生日相同的概率大于 70%.

例 1.7(随机取数问题) 从 $1,2,\cdots,10$ 共 10 个数字中任取一个,假定每个数字都以 1/10 的概率被取中,取后还原,先后取出 7 个数字,试求下列各事件 $A_i(i=1,2,3,4)$ 的概率.

(1)7 个数字全不相同;

(2) 不含 10 与 1;

(3)10 恰好出现 2 次;

(4) 至少出现 2 次 10.

解 样本空间中所含的样本点个数为 10^7,各事件的概率分别为

(1) $P(A_1)=\dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}{10^7}=\dfrac{10!}{10^7\times 3!}$;

(2) $P(A_2)=\dfrac{8^7}{10^7}$;

(3) $P(A_3)=\dfrac{C_7^2 9^5}{10^7}$;

可将(3)的结果推广到"10恰好出现 k 次($k\leqslant 7$)",其概率为

$$P(A_3^*)=C_7^k 9^{7-k}/10^7 \quad (k\leqslant 7)$$

(4) 由 $P(A_3^*)$ 易得

$$P(A_4)=\sum_{k=2}^{7} C_7^k 9^{7-k}/10^7$$

例 1.8(中彩问题)　从1,2,…,33共33个数字中任取一个,假定每个数字都以1/33的概率被取中,取后不还原,先后取出7个数字,求取中一组特定号码 A 的概率.

解　$P(A)=\dfrac{1}{C_{33}^7}=\dfrac{1}{4\ 272\ 048}\approx 2.340\ 7\times 10^{-7}$

即中一等奖的概率约为0.000 000 234 07,是一个接近零的很小的小概率事件,约为 $\dfrac{1}{4\ 270\ 000}$.

性质 1.2　对古典概型的概率具有如下性质:

(1) 对于任意事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;$P(\varnothing)=0$;

(3) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容,则

$$P(A_1+\cdots+A_m)=P(A_1)+\cdots+P(A_m)$$

证明　根据定义,(1),(2)显然成立,设 $A_i=\{\omega_1^{(i)},\cdots,\omega_{k_i}^{(i)}\}$,根据互不相容性知

$$A_1+\cdots A_m=\{\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{k_1}^{(1)};\omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{k_2}^{(2)};\cdots;\omega_1^{(m)},\cdots,\omega_{k_m}^{(m)}\}$$

共含 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i$ 个样本点,若设 Ω 中所含样本点数为 n,则

$$P(A_1+\cdots+A_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}k_i=\frac{k_1}{n}+\cdots+\frac{k_m}{n}=P(A_1)+\cdots+P(A_m)$$

1.3.3　概率的几何概型定义

相对于统计定义,概率的古典定义具有可计算性的明显优点,但它也有显明的局限性,要求样本有限,如果样本空间中所含的样本点个数是无限的,古典概型的概率定义就不适用了.如果保留样本点等可能出现的要求,将样本点有限放宽到无限,这便引入了几何概型的定义.

定义 1.4　若对于一随机试验,每个样本点出现是等可能的,样本空间 Ω 所含的样本点个数为无穷多个,且具有非零的,有限的几何度量,即 $0<m(\Omega)<\infty$,则称这一随机试验是一几何概型的.

注意这里几何度量，直观地说，对一维区间它是长度，对二维区域是面积，对三维则是体积…… 等等．对于几何概型引入概率的定义如下．

定义 1.5 对于一随机试验，以 $m(A)$ 表示任一事件 A 的几何度量，若 $0 < m(\Omega) < \infty$，则对任一事件 A，定义其概率为

$$p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

几何概型的概率定义具有如下性质．

性质 1.3 对于几何概型的概率具有性质：

(1) 对于任意事件 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$；

(3) 设可列多个事件 $A_1, A_2, \cdots$，互不相交，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

证明 由定义 1.5，(1)，(2) 显然成立．对(3)，利用几何度量的完全可加性

$$m(A_1 + \cdots + A_n + \cdots) = m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n) + \cdots$$

可得

$$P(A_1 + \cdots + A_n + \cdots) = m(A_1 + \cdots + A_n + \cdots)/m(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)/m(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

由性质 1.1，性质 1.2 和性质 1.3 可知，对于三种概率的定义均具有相同的三条性质．常常称(1)，(2) 为概率的正则性；(3) 为概率的完全可加性．

例 1.9(会面问题) 甲、乙二人相约在 0 到 T 这段时间内在预定地点会面，先到的人要等侯另一人 t $(t < T)$ 后方可离去，试求这两人能会面的概率．

解 设甲到的时刻为 x，乙到的时刻为 y，则

$$0 \leqslant x \leqslant T, \qquad 0 \leqslant y \leqslant T$$

这样(x, y) 构成边长为 T 的正方形 Ω，二人能会见的条件是

$$|x - y| \leqslant t$$

这条件决定 Ω 中一子集 A，如图 1.2 所示，根据定义 1.5，有

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2} = 1 - \frac{(T - t)^2}{T^2}$$

例 1.10(浦丰问题) 平面上画有等距离 $a(a > 0)$ 的一些平行线，向平面任意投一长为 $l(l < a)$ 的针，试求针与一平行线相交的概率．

解 以 M 表落下后针的中心，x 表 M 与最近一平行线的距离，φ 表针与这一平行线的交角(见图 1.3)，则

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

决定了 $x\varphi$ 平面上一矩形 R. 为了使针与最近平行线相交,其充分必要条件为

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\sin\varphi$$

这一条件决定 $x\varphi$ 平面上一区域 A,如图 1.4 所示. 则所求事件 A 的概率为

$$P(A) = \int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi / \frac{a}{2}\pi = \frac{2l}{\pi a} \qquad (1.2)$$

注意 $P(A)$ 仅依赖于比值 $\frac{l}{a}$,则当 l 与 a 成比例变化时,$P(A)$ 不变. 由式(1.2)可得

$$\pi = \frac{2l}{P(A)a} \qquad (1.3)$$

式(1.3)提供了求 π 值的一个方法,如果我们能事先求得 $P(A)$,那么由式(1.3)可求出 π 的值. 事实上,我们可以以手工试验或计算机模拟试验求出 A 的频率,进而以频率逼近概率.

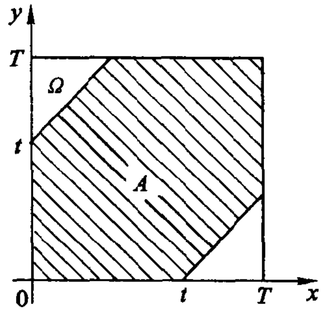


图 1.2　约会问题

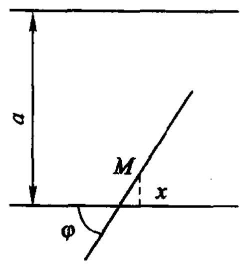


图 1.3　浦丰问题

1.3.4　概率的公理化定义

到本节为止,我们给出了古典概型和几何概型的概率定义,概率的古典概型定义在整个 19 世纪被人们广泛接受,但其弱点也很明显,它既要求试验的可能结果总数有限,又要求某种等可能性,它的适用范围有限. 当把这一定义推广到无限多种可能结果的场合,如几何概型时,适用范围仍然有限. 19 世纪末以来,数学的各个分支广泛流行着一股公理化潮流,这个流派主张把最基本的假定公理化,其他结论则由它们经过演绎导出. 1933 年,苏联统计学家提

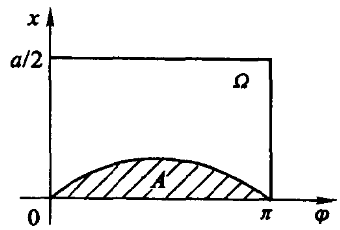


图 1.4　浦丰问题概率