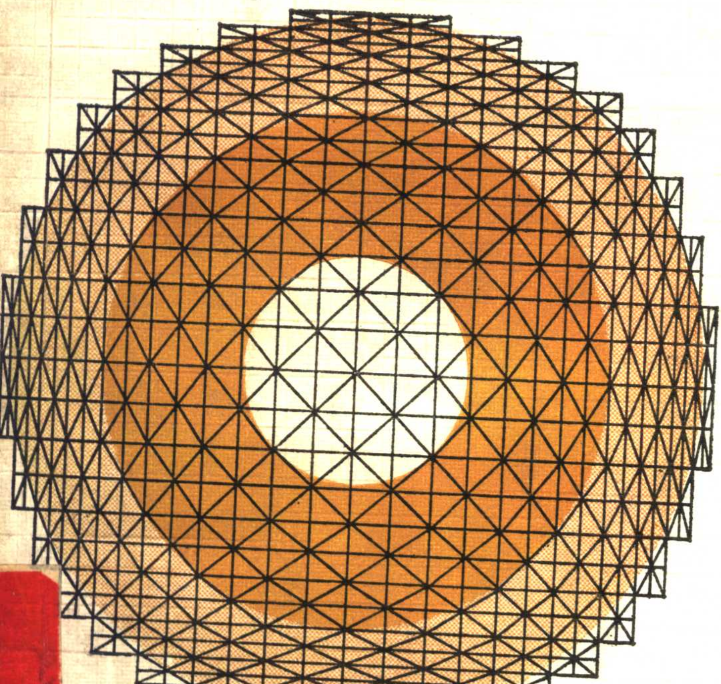
振动矩阵分析方法

[日]川井忠彦 著
刘锡荟 译
周锡元 罗恩 校



中国建筑工业出版社

振动矩阵分析方法

[日] 川井忠彦　著
刘 锡 荟　译
周 锡 元　罗　恩校

中国建筑工业出版社

本书着重介绍结构振动矩阵计算的入门知识，包括解析法和数值法。书中首先叙述单自由度体系和多自由度体系的基本原理、振动基本方程的建立及其解法，然后介绍能量原理和有限单元法。最后叙述有关这些方法在梁、框架、平板等振动上的应用。本书可供土建、机械、航空、造船等专业的结构工程技术人员及大专学校师生参考。

川井忠彦　著

マトリックス法振動および応答

培風館　1971

*　*　*

振动矩阵分析方法

刘锡荟　译

周锡元　罗　恩　校

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：$8^1/_8$ 字数：217 千字

1982年2月第一版　1982年2月第一次印刷

印数：1—5,400册　定价：1.35元

统一书号：15040·4134

译 者 的 话

本书系日本钢结构协会结构分析分会主办“应用电子计算机的结构分析讲座”丛书之一，内容侧重结构振动的矩阵分析方法。

作者在书中指出，矩阵分析方法确系结构分析方法上的一个革命；但它最终只不过是结构设计的一个工具而已。在进行数值分析的时候，必须了解和掌握蕴于数字之后的物理意义，舍此即不能透彻了解这种数值方法的真正意义。因此，作者认为，建立基本微分方程和给出边界条件和初始条件进行求解的传统方法，与数值分析方法，就象一部车辆的两个轮子，缺一不可。而把这两个轮子联系起来的车轴，就是能量原理。从这个观点出发，作者在本书中首先叙述了单自由度体系和多自由度体系的基本原理、基本方程的建立及其解法，然后介绍能量原理和有限单元法，最后叙述在梁、框架、平板方面的应用。本书对于基本原理的叙述比较清楚，简明扼要，解析法与数值法并重，这些都是它的优点。但是，本书只停留在入门的阶段，特别是在应用方面，仅仅作了一般性的介绍。尽管如此，我们认为，本书对于学习应用电子计算机进行振动分析的读者来说，仍不失为一本比较好的入门书籍。由于水平有限，译文难免有谬误之处，希读者不吝指正。

1979年春

目　　录

第一章　绪　论 ………………………………………………………… 1
第二章　单自由度质点-弹簧体系的振动 …………………………… 3
　2-1　运动方程式 ……………………………………………………… 3
　2-2　自由振动 ………………………………………………………… 5
　2-3　能量积分及能量守恒定律 ……………………………………… 9
　2-4　达朗贝尔原理、哈密尔顿原理及拉格朗日运动方程 ………11
　2-5　稳态强迫振动 ……………………………………………………15
　2-6　瞬态强迫振动 ……………………………………………………17
　2-7　任意外力 $f(t)$ 作用下的动力反应 …………………………19
　2-8　阻尼自由振动 ……………………………………………………25
　2-9　阻尼力作用下的强迫振动 ………………………………………27
第三章　多自由度质点-弹簧体系的振动 ……………………………31
　3-1　二自由度质点-弹簧体系的振动 ………………………………31
　3-2　二自由度质点-弹簧体系的强迫振动 …………………………38
　3-3　多自由度质点-弹簧体系的运动方程 …………………………42
　3-4　多自由度质点-弹簧体系的自由振动 …………………………47
　3-5　固有值问题的分析方法 …………………………………………58
　3-6　多自由度质点-弹簧体系的无阻尼强迫振动 …………………72
　3-7　有阻尼的多自由度质点-弹簧体系的振动 ……………………79
　3-8　用差分法求解多自由度质点-弹簧体系动力反应的
　　　　实用方法 …………………………………………………………84
第四章　能量原理与有限单元法 ………………………………………88
　4-1　虚功原理 …………………………………………………………88
　4-2　余虚功原理 ………………………………………………………91
　4-3　卡斯提也努定理 …………………………………………………93
第五章　梁的工程理论 …………………………………………………100

5-1　梁的轴向变形问题的分析 ……………………………………100
5-2　梁的弯曲变形问题的分析 ……………………………………103
5-3　关于梁扭转的圣维南理论 ……………………………………106
*5-4　弯曲与扭转的相关性 ……………………………………110
*5-5　I 型梁的扭转 ……………………………………113
*5-6　关于梁的弯曲扭转变形的工程理论 ……………………………………119
第六章　梁的振动理论 ……………………………………125
6-1　梁的纵向振动 ……………………………………125
6-2　梁的弯曲振动 ……………………………………137
6-3　梁的扭转振动 ……………………………………155
*6-4　梁的弯曲扭转耦联振动 ……………………………………165
6-5　传递矩阵法 ……………………………………176
第七章　框架结构的振动分析 ……………………………………182
7-1　框架振动分析中梁单元的一般刚度矩阵和质量矩阵 …………182
7-2　局部座标系与整体座标系的关系，刚度矩阵的
组合 ……………………………………183
7-3　简单框架结构振动分析的实例 ……………………………………188
*第八章　薄板的振动……………………………………202
8-1　薄板的位移函数及克希霍夫-洛夫假定……………………………………202
8-2　平板变形的虚功方程 ……………………………………205
8-3　平板的平面内变形分析 ……………………………………208
8-4　平板的弯曲分析 ……………………………………210
8-5　平板平面内振动的有限单元分析 ……………………………………217
8-6　板壳结构振动分析上的应用 ……………………………………228
附录 1　单自由度阻尼体系的瞬态反应 ……………………………………231
附录 2　3-8节中若干公式的证明……………………………………233
附录 3　梁弯曲扭转变形的位移函数 ……………………………………239
附录 4　三角形域内的定积分公式……………………………………243
参考文献……………………………………245
索引 ……………………………………248

第一章 绪 论

结构矩阵分析方法，是五十年代初期，美国波音航空公司为了精确地分析超音速飞机后掠翼的颤振问题而开始发展起来的。

结构物的自由振动分析和动力反应分析，对于宇宙火箭、飞机、船舶、车辆等运动的结构物来说，当然是重要的，即使对于各种机械的部件，以及象土木建筑结构这样的不动的结构物，在抗风、抗地震设计方面的重要性，近来也日益为人们所认识。

本书即从这一情况出发，对于近年来迅速发展的结构矩阵分析方法及其振动分析方法作一概略的说明。

基于矩阵方法的振动分析方法，简单地说，就是以哈密尔顿（Hamilton）原理为基础，对结构物动力反应问题作近似分析的数值计算方法，也就是用矩阵代数将瑞雷-李兹（Rayleigh-Ritz）法格式化的方法。因此，也可以说，它是一种将无限自由度的连续介质的振动用等价的有限自由度的质点-弹簧体系来近似地表示，并以此来研究其动力反应的方法。

本书首先在第二章以单自由度的质点-弹簧体系为例，通过其运动方程式的积分来说明自由振动现象的特征；其次，对运动方程式与能量守恒定律之间的关系，以及达朗贝尔（D'Alembert)原理和哈密尔顿原理加以说明，并阐明这些原理是弹性动力学的基本原理。接着，对阻尼振动及动力反应分析的具体方法作了说明。再次，在第三章里，首先对作为前一章继续的二自由度的质点-弹簧体系的振动分析作了叙述，然后，通过若干三自由度质点-弹簧体系的振动分析，说明如何应用矩阵代数来组织这个分析的方法。

第四章阐述了作为连续体应力分析基础的虚功原理及余虚功原理。本书所用的位移法就是以虚功原理为基础的直接解法，也就是瑞雷-李滋法以矩阵代数来组织的分析方法。

然后在第五章里，考察了连续体最简单的例子——梁的工程理论，对于众所周知的轴向变形及弯曲理论，以及圣·维南（St. Venant）扭转理论如何从虚功原理出发进行推导，均作了概略的说明。最后，对于薄壁梁的扭转以及常常不能忽略的弯曲扭转变形的近代理论作了一个梗概的介绍。

第六章从虚功原理出发导出了这类梁构件可能产生的各种振动，即纵向振动、弯曲振动、扭转振动的运动方程及边界条件，同时阐述了用位移法进行矩阵分析的具体过程，并导出了梁单元的各种刚度矩阵、质量矩阵及计算等价节点外力的公式。最后，对于比较复杂的梁的弯曲扭转振动的矩阵分析方法作了概略的说明。

第七章对于以这类梁单元组合成的各种框架结构振动的矩阵分析方法，通过若干简单的例子予以说明。

然后，在第八章里，对于更为复杂的连续体结构的振动分析方法，以平板为例作了说明，也就是说，叙述关于弹性薄板平面内及平面外变形的工程理论，从虚功原理出发导出了变形的基本方程及边界条件，然后通过两个例子来说明平面内振动的矩阵分析方法。最后，简略地介绍了板壳结构以及复杂的空间薄板结构的振动分析方法。

书末，介绍了一些基础参考书及有关的文献，供进一步深入学习的读者参考。

第二章　单自由度质点-弹簧体系的振动

单自由度质点-弹簧体系的运动是振动理论的基础。因此，本章首先应用牛顿运动定律导出其运动方程，并对其自由振动进行分析。然后，论述牛顿运动定律及能量守恒定律之间的关系，并说明作为动力学基本原理的哈密尔顿原理与牛顿运动定律是等价的。接着考察了稳态强迫振动、瞬态振动以及阻尼的影响，并对在计算随时间任意变化的干扰力的动力反应时经常用到的杜哈姆（Duhamel）积分作了说明。

2-1　运动方程式

现考察如图2-1所示的质点-弹簧体系。设质量为m的质点沿弹簧伸长的方向的位移为$x(t)$（取伸长方向为正），该质点的运动方程式，按牛顿第二运动定律可给出如下：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t) \tag{2-1}$$

其中，外力$F(x,t)$，由图2-1可知系由弹簧反力$r(x)$和干扰力$f(t)$所组成。即

$$F(x,t)=r(x)+f(t) \tag{2-2a}$$

其中

$$r(x)=-kx \tag{2-2b}$$

k一般称为弹簧常数，反力$r(x)$与弹簧的位移x成比例，其作用方向与位移x相反。

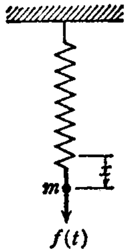


图 2-1 单自由度质点-弹簧体系的振动

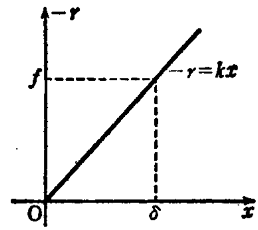


图 2-2 弹性弹簧的反力 r 与变位 x 之间的关系

"弹簧的反力与弹簧的伸长成比例"这一关系是英国的罗伯特·虎克（Robert Hooke，1635～1703）于1676年首先发现的，它是弹性体的基本特性，弹性力学，包括振动理论都是建立在这一定律上的。用图来表示这一关系，就可得到如图 2-2 所示的直线

$$f=k\delta \tag{2-3}$$

现取弹簧的伸长的单位为厘米，荷重为公斤，则 k 表示弹簧伸长 1 厘米所需要的力（公斤），以公斤/厘米为单位。k 也称为弹簧的**刚度**（stiffness），可以看作是表征弹簧刚劲程度的量。

将式（2-3）中弹簧的伸长 δ 解出，可以写成

$$\delta=cf \tag{2-4}$$

此处 c 表示1公斤荷重作用下弹簧的伸长(厘米)，其单位为厘米/公斤，称为弹簧的伸长率；也可称为弹簧的**柔度**(flexibility)，可以看作是表征弹簧柔软程度的量。由（2-3）及（2-4）式可以容易地看出下式是成立的：

$$kc=1 \tag{2-5}$$

将（2-2）式代入（2-1）式，可以求出如下的运动方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f(t) \tag{2-6}$$

在给定的初始条件下，求出（2-6）式的解，该质点-弹簧体系的运动就完全确定了。现令 $f(t)=0$ 作为求出此式一般解的第

一步，亦即考虑没有外力作用下的情况。这种情况下的振动称为**自由振动**（free vibration）、**自然振动**（natural vibration）或**固有振动**（eigen vibration）；与此相对应，式（2-6）所表示的振动称为质点-弹簧体系的**强迫振动**（forced vibration），或者广义地称为**动力反应**（dynamic response）。

2-2 自 由 振 动

现试看在时间 $t=0$ 时，弹簧有初始位移 x_0 或初始速度 $\dot{x}_0$，或两者同时都有的情况下，质点-弹簧体系作如何的运动。根据经验可知，该质点将作具有一定周期的振动，若能量没有耗损，则此运动将无限止地持续下去。令式（2-6）中的 $f(t)=0$，则其运动方程式成为

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\quad \omega^2=\frac{k}{m} \tag{2-7}$$

取初始条件为 $t=0$ 时

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

其中 · 表示对时间的导数。

为求解（2-7）式，现试取

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{2-8}$$

于是有

$$\dot{x}(t)=\omega(-A\sin\omega t+B\cos\omega t)$$

$$\ddot{x}(t)=-\omega^2(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$$

$$=-\omega^2x(t)$$

显然满足（2-7）式。

根据初始条件可得

$$x(0)=A$$

$$\dot{x}(0)=B\omega,\qquad \therefore B=\frac{\dot{x}(0)}{\omega}$$

故所求的解可由下式给出：

$$x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t \tag{2-9}$$

若取

$$\left.\begin{aligned} x_0&=a\cos\varphi \\ \frac{\dot{x}_0}{\omega}&=a\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} a&=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega)^2} \\ \tan\varphi&=\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

及

$$x(t)=a\cos(\omega t-\varphi) \tag{2-11}$$

利用此式可得

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t)&=-a\omega\sin(\omega t-\varphi) \\ \ddot{x}(t)&=-a\omega^2\cos(\omega t-\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

若将位移 $x(t)$、速度 $\dot{x}(t)$ 以及加速度 $\ddot{x}(t)$ 描成时间函数的图象，则可得如图2-3。

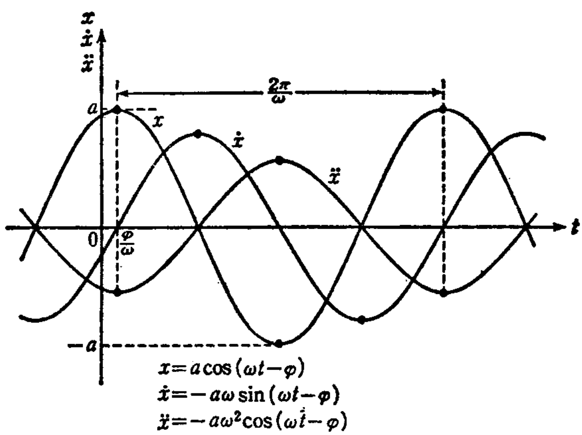


图 2-3　简谐振动时位移、速度、加速度随时间的变化

a称为**振幅**（amplitude），ω称为**圆频率**（circular frequency），φ称为**初相角**（initial phase angle）。φ由下式给

出：

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$$

由图2-3可以看出，$x(t)$随时间作正弦、余弦规律的变化，经过一定的时间间隔，该运动又重复出现。

这样的运动称为**简谐振动**(simple harmonic oscillation)。$\omega/2\pi$称为**固有频率**n，$2\pi/\omega$称为**固有周期**T。n表示每一秒时间内重复同一状态的次数，T则表示再次出现同一状态所需要的最短的时间。显然，下式成立：

$$nT=1 \tag{2-13}$$

由式（2-7）可知，ω是由该质点-弹簧体系的力学特性（m及k）所确定的固有的量，因此，把$n=\omega/2\pi$叫作固有频率。

上述的力学体系，由于只有一个方向的位移，即由一个方向的位移就可决定其变位状态，所以称为单自由度振动体系。它是自然界中可能发生振动的各种体系中最简单的一种。设在图2-3所示的质点-弹簧体系上作用有垂直向下的重力mg，则其平衡位置由

$$mg-kx=0 \quad 即 \quad x=\frac{mg}{k}$$

给出。因此，其运动方程式可由下式给出：

$$m\ddot{x}+kx=mg$$

若将座标的原点移到平衡位置上，即取

$$x(t)=u(t)+\frac{mg}{k}$$

运动方程式最后就成为

$$m\ddot{u}+ku=0$$

与（2-7）式形式上完全一样。

这样的质点-弹簧体系绕着平衡位置作简谐振动，假若没有摩擦力和其它使运动衰减的力的作用，则运动将无限止地持续下去。这正象图2-4所示的位于向下凹的光滑曲面上的小球的运动一样，若在小球上除了重力之外没有任何其它外力作用，小球将

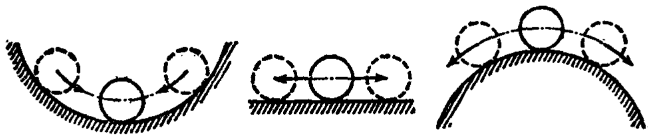


图 2-4　平衡位置的稳定性

静止地位于曲面的最下点。若小球上有外力作用，小球就会围绕着该平衡位置产生微小的振动。在一般情况下，该运动将会逐渐减弱，并再度回到平衡位置上静止下来。这样的平衡位置，一般称为**稳定平衡位置**。围绕稳定平衡位置的微小振动的例子很多，而**单摆**（pendulum）的运动就是最典型的例子。这种情况下的运动方程式，可从图2-5上看出，$l\theta$表示该质点沿着圆弧的变位，所以牛顿运动方程这时可写成

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad (2\text{-}14)$$

或

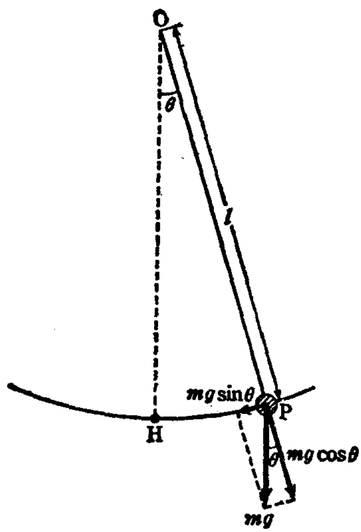


图 2-5　单摆的运动

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta \tag{2-15}$$

现设θ为微量，将$\sin\theta$按泰勒级数展开，并仅取其第一项，可得

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta \tag{2-16}$$

于是，运动成为$\omega^2=g/l$的简单振动，其周期T由下式给出：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2-17}$$

不用说，该式就是众所周知的计算质点单摆周期的公式。

2-3 能量积分及能量守恒定律

上一节，我们已经求出了单自由度体系自由振动的运动方程式（2-7）的解，现试用别种方法求其积分。现将（2-6）式的两边乘以$\dot{x}$，并对t进行积分。即

$$m\int\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt+\int kx\frac{dx}{dt}dt=\int f(t)\frac{dx}{dt}dt+\mathscr{E}$$

或

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\int kxdx=\int f(t)\dot{x}dt+\mathscr{E}$$

因此有

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\mathscr{W}+\mathscr{E} \tag{2-18}$$

其中 $\mathscr{W}=\int f(t)\dot{x}dt$，$\mathscr{E}$为积分常数。

由牛顿运动学可知，$(1/2)m\dot{x}^2$是称为时刻t的**动能**(kinetic energy)的物理量，现以$\mathscr{T}$表示之；$(1/2)kx^2$是质点偏离平衡位置的位移为x时弹簧内部贮存的**应变能**(strain energy)，现以$\mathscr{V}$表示之。而$\mathscr{W}$则是从时间$t=0$开始直到现在为止的时间间隔当中外力$f(t)$对质点所作的**功**（work）。故$\mathscr{E}$表示$t=0$时的动能和应变能之和。即

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}m\dot{x}_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2 \tag{2-19}$$

若将式（2-18）用文字表达出来，即“外力对某质点-弹簧体系所作的功，等于在此时间内所增加的动能与应变能之和”。这一定律与运动方程式（2-6）是等价的，它是用积分的形式来表示的运动定律。现考虑没有外力作用下的情况。由于$\mathscr{W}=0$，故有

$$\mathscr{T}+\mathscr{V}=\mathscr{E} \tag{2-20}$$

它表示“如果没有外力的作用，该质点-弹簧体系所具有的动能$\mathscr{T}$及应变能$\mathscr{V}$之和为一定”，这就是**能量不灭定律或能量守恒定律**（law of conservation of energy）。

现用（2-20）式来讨论该质点-弹簧体系的运动。即

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\mathscr{E}$$

因此，有

$$\dot{x}=\pm\sqrt{2\mathscr{E}/m-\omega^2x^2}$$

所以有

$$\pm\int\frac{dx}{\omega\sqrt{2\mathscr{E}/m\omega^2-x^2}}=\int dt-\frac{\varphi}{\omega}$$

积分后得

$$x=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}}{m}}\cos(\omega t\pm\varphi) \tag{2-21}$$

显然，所得到的解与上节的结果形式完全相同。

由式（2-18）得

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\mathscr{E}-\frac{1}{2}kx^2,(\because \mathscr{W}=0)$$

因此，运动的可能的范围显然应是

$$\mathscr{E}-\frac{1}{2}kx^2\geqq 0 \tag{2-22}$$

也就是说，运动发生在$-\sqrt{2\mathscr{E}/k}\leqslant x\leqslant\sqrt{2\mathscr{E}/k}$区间之内，可以看出，当$x=\pm\sqrt{2\mathscr{E}/k}$时，速度变成0，当$x=0$时，速度为最大。此点从图2-6中可看得很清楚。

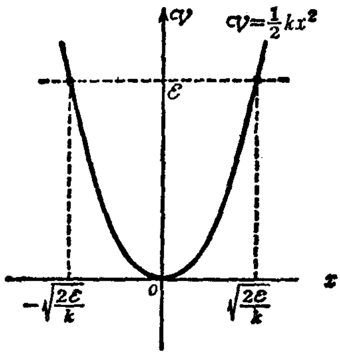


图 2-6 弹簧具有的应变能$\mathscr{V}$及简谐振动发生的范围

虽然，能量守恒定律及（2-18）式的存在，是通过单自由度质点-弹簧体系来说明的，但是，对于任何弹性体它都是成立的，这点将在第四章中予以说明。

2-4 达朗贝尔原理、哈密尔顿原理及拉格朗日(Lagrange)运动方程

上节通过牛顿运动第二定律对时间 t 的积分，说明了能量守恒定律，本节将对于与牛顿运动第二定律等价的，但更加本质的另一种形式的运动定律加以说明。

首先，运动方程式（2-6）可以改写如下：

$$f(t)-kx-m\ddot{x}=0 \qquad (2\text{-}23)$$

此式从物理意义上加以解释的话，可以阐述成“运动着的质点-弹簧体系，在任意时刻 t，作用于质点上的外力$f(t)$与弹簧反力$-kx$及**惯性力**（inertia force）$-m\ddot{x}$处于平衡状态”。因此，（2-23）式可称为**动力平衡条件**(condition of dynamical equilibrium）。

达朗贝尔首先提出，将运动着的质点的加速度$\ddot{x}$与质量m的乘积，冠以负号$-m\ddot{x}$，称之为惯性力，这样一来就可以把运动方