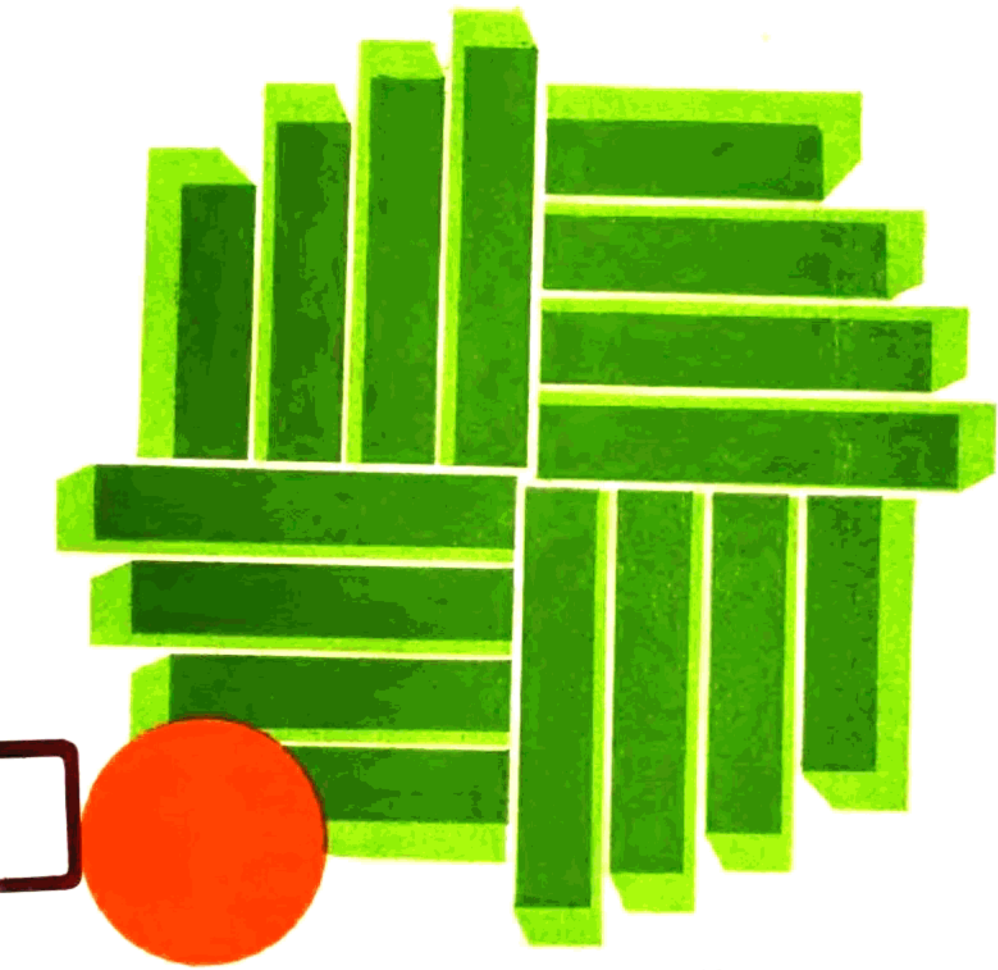
工程弹性力学

赵学仁 编



北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是为高等院校工程专业编写的弹性力学教材。前六章为基础部分，主要介绍了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法。后三章介绍了薄板的弯曲、薄壳的计算以及弹性力学中的能量原理，以供不同专业根据需要选用。

本书的特点是循序渐进、便于自学。可作为大专院校机械设计、建筑结构、宇航航空等专业本科生的必修课或选修课教材，也可供广大工程技术人员参考。

工程弹性力学

赵学仁　编

•

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

•

787×1092毫米　16开本　18.75印张　464千字

1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷

ISBN7-81013-082-×/O·19

印数：1-4000册　定价：3.75元

前　　言

《工程弹性力学》是为高等院校工程专业编写的弹性力学教材。弹性力学的基本理论和处理问题的方法已广泛应用于现代科学技术的许多领域之中，特别是在机械设计部门受到越来越多的重视。因此，弹性力学这门课不仅被列为固体力学专业的必修课，而且近年来也作为许多工程专业的必修课或选修课。本书是在原编讲义的基础上，参考了现行有关教材编写而成的，主要介绍了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法，以及薄板的弯曲、薄壳的计算和弹性力学中的能量原理。在内容上注意理论联系实际，特别是机械工程实际，注重工程应用。

为使初学者加深对弹性力学的基本概念、基本理论的理解和对基本方法的掌握，书中编入了较多的例题和习题，习题附有提示或答案。

本书由北京理工大学薛大为教授、程兆雄副教授和上海海运学院沈一飞教授进行了认真地审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处或错误，恳请读者批评指正。

编者

1988.5月

目　　录

第一章　绪论

第二章　弹性平面问题的基本理论

第三章　在直角坐标系中求解弹性平面问题

第四章　在极坐标系中求解弹性平面问题

第五章　弹性空间问题的基本理论

第六章　等直杆的自由扭转

第七章　薄板的弯

•第八章

第九章　弹性力学中的能量原理

第一章　绪　　论

本章将主要介绍弹性力学的基本任务、研究对象及方法。

§1-1　概　　述

弹性力学是固体力学的一个分支。它研究弹性体在外力或其它因素（例如，温度变化等）作用下所产生的应力、应变与位移，并为各种结构物或其构件的强度、刚度和稳定性计算提供必要的理论基础或精确的计算方法。

显然，弹性力学与材料力学（或结构力学）的任务是相同的。但是，弹性力学比材料力学（或结构力学）研究的对象更广泛，采用的方法更严密，所得的结果更精确。

我们知道，材料力学研究的对象主要是杆状构件（一维弹性杆件），而且常采用一些关于变形的近似假设。虽然这样求得的常常是近似解，但所得公式却非常简单，并具有工程上所需要的足够精度。结构力学研究的对象主要是杆状构件所组成的杆件系统，例如桁架、刚架等杆系结构。但是，在工程中还会遇到几何形状并非杆件的变形固体（二维或三维的构件），例如滚动轴承中的滚珠或滚柱〔图1-1（*a*）、（*b*）〕、板件、壳体和块体〔图1-1（*c*）、（*d*）、（*e*）〕等，这些都不是杆件，通常都不属于材料力学的研究范围；再如机器中的很多零件的截面尺寸有突然变化〔图1-1（*f*）〕，在这些截面上，实际应力与按材料力学公式算得的结果将有很大差异。上述材料力学难以解决的问题可以在弹性力学里加以解决；同时，弹性力学对杆状构件也作进一步地、精确地分析。对某些问题可依此精确结果来判断初等解答的误差，并可指出在一定的计算精度要求下，初等解答适用的范围或条件。

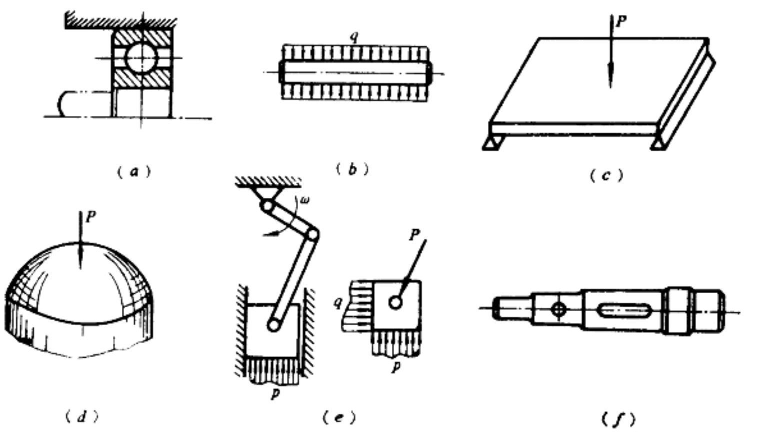
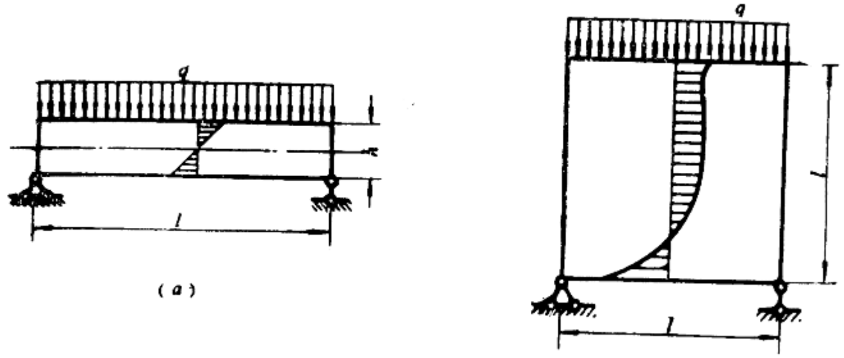


图 1-1

在材料力学（或结构力学）里，除了引用一些必要的“基本假设”外，为了简化计算，还常常根据不同的研究对象，又引入一些“补充假设”。例如，在材料力学中研究直梁弯曲时，引用了“平面截面”的假设；在结构力学中分析薄壁杆件的应力时，引用了“刚周边”的假设，等等。因此，所求得的解答常有一定的近似性。弹性力学在处理问题时，除引用必要的“基本假设”（见§1-2）外，通常不必引入类似于上述的“补充假设”，而是比较严格地按照静力学、几何学和物理学三个条件来考虑，因而所得结果比较精确。如图1-2a所示的简支梁在分布载荷q作用下而发生弯曲，在材料力学中由于引用了“平面截面”和“纵向纤维无挤压”的假设，因此，根据“平面假设”得出的结果是：横截面上的正应力按直线分布。事实上，这只有在梁的截面高度h远小于梁的跨度l时才与实际情况相符；否则，横截面上的正应力是按曲线分布的，如图1-2（b）所示。根据“纵向纤维无挤压”的假设得出的结果是：横向的挤压应力σ_y沿横截面高度处处为零。显然，这是一种近似。按弹性力学计算，σ_y沿梁截面高度按三次曲线规律变化，如图1-3所示。



（a）　　（b）

图 1-2

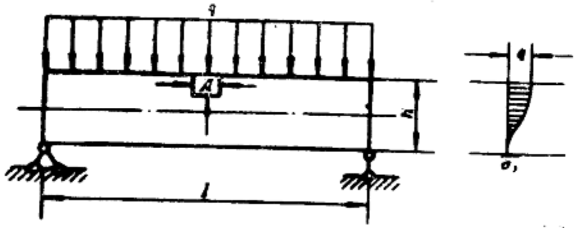


图 1-3

按照材料力学分析应力的方法所求得的应力分量，虽能保证杆件整段的平衡，但往往不能保证每一微小部分（微体）的平衡。如图1-4（a）所示的变截面杆，若采用材料力学方法计算其应力，则认为任一截面m-n上的正应力σ_x是均匀分布的，且无剪应力，从而得$\sigma_x = P/A$（A为横截面m-n之面积）；同时认为杆的纵向纤维无挤压，如图1-4(b)所示。这样，若在杆的边界上截取一微小部分来分析，可知其各个面上的应力分布如图1-4(c)

所示。可见，这一微小部分无法平衡。显然，这个结论是错误的。事实上，这一微小部分在外力作用下也是处于平衡状态的。

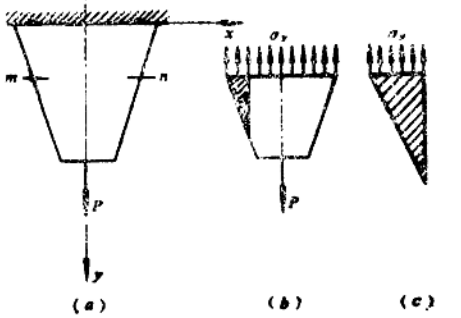


图 1-4

在弹性力学里，假想物体是由无限多个微小平行六面体—“单元体”所组成。当研究某点的应力状态时，就在该点附近取一“单元体”，考虑这一“单元体”的平衡，可得一组平衡微分方程，它能保证弹性体所有各微小部分的平衡。按照弹性力学的研究方法，图1-4(c)所示的微小部分(如果取得足够小，即为所谓“单元体”)的两个互相垂直的截面上均有正应力和剪应力存在，如图1-5所示。

综上所述，弹性力学可以解决材料力学无法解决的很多问题；并对杆状构件进行精确分析，以及检验材料力学公式的适用范围和精度。

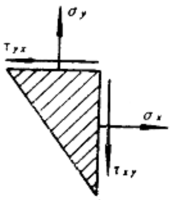


图 1-5

弹性力学可以解决一些几何形状比较复杂的变形固体问题。由于使用了较多的数学工具，因此能求得比较精确的解答。可是，由于弹性力学要求满足的条件比较严格，以致给许多问题的求解带来困难。因此，一些行之有效的实验方法以及有限差分法、有限单元法等数值方法，都是对弹性力学解析法的有力补充。

弹性力学是在不断地解决工程实际问题的过程中发展起来的。由于建筑工程的需要，伽里略(G.Galileo)于1638年研究了梁的弯曲问题。虎克(R.Hooke)根据试验结果于1660年提出了弹性体变形与所受外载荷成正比的物理定律(虎克定律)，为弹性力学提供了坚实的物理基础。但当时仍局限于解决杆、梁、柱、拱等简单的一维问题。在1821—1822年间，纳维埃(Novier)和哥西(A.L.Cauchy)导出了弹性力学的普遍方程，为弹性力学打下了数学基础。此后，许多学者都致力于解决二维和三维的典型工程问题(例柱体的扭转与弯曲问题、平面问题、板壳问题、接触问题以及孔边附近或裂纹尖端的应力集中问题，等等)，使弹性力学取得了重大的进展。但要精确地求解各种复杂的工程结构问题，由于弹性力学的基本方程十分复杂，在数学上仍有很大困难，因此在1908年和1915年里兹(W.Ritz)和伽辽金(Г.б.Галёркин)分别提出了基于能量原理的直接解法，从而开创了近似求解弹性力学问题的新途径。随后又出现了有限差分法、有限单元法、边界元法等有效的数值计算方法。特别是近代大型、高速电子计算机的出现及其广泛应用，目前对各种复杂的工程结构及其构件进行弹性分析已不存在原则上的困难。

弹性力学是以理论力学、材料力学等课程为基础，并为进一步学习有限单元法、实验应力分析、板壳力学、塑性力学和断裂力学等课程打下坚实的基础。

§ 1-2 弹性力学的基本假设

为了便于建立理想弹性体模型及数学处理，在弹性力学里对材料的性质作了某些假设。引用这些假设在于突出矛盾的主要方面，忽略一些次要因素。现将弹性力学的几个基

本假设叙述如下：

1．**物体是连续的** 假设物体所占据的全部几何空间都被组成该物体的介质所充满，没有任何空隙。这样，物体中的应力、应变和位移等物理量都是连续变化的，可以用坐标的连续函数来表示，并可用微积分手段来分析物体受力后各物理量的变化。实际上，所有物体都是由微小颗粒组成的，它们之间存在着空隙，是不符合连续性假设的。但是，微粒的尺寸以及它们之间的空隙相对于宏观物体来说都是很微小的，故可不考虑物体内的分子构造。因而，将物体看成是连续的不会引起显著误差。

2．**物体是均匀的** 假设整个物体是由同一种材料组成的，物体内的各部分具有相同的力学性质。例如，物体的弹性常数（弹性模量和泊松系数等）不随坐标位置而改变。这样，当我们对物体中的任何一部分进行研究时，均可代表整个物体的力学性质。实验证明，这一假设对于许多固体材料、特别是金属材料是比较符合的。如果物体是由两种以上材料混合组成的，那么只要每种材料的颗粒远小于物体的尺寸，而且在物体内均匀分布，也可把它视为均匀的。

应当指出的是，均匀性与连续性是两个不同的概念。例如，把两块不同材料的金属板焊接在一起，便成为一块连续而不均匀的板。

3．**物体是各向同性的** 假设物体内每一点沿各不同方向的力学性质都是相同的，例如，物体的弹性常数不随方向而改变。这里应当注意均匀性与各向同性的区别：前者是指物体内各点的力学性质相同，而后者是指物体内某一点沿各个不同方向的力学性质相同。当然，若用显微镜观察，就是工程上常用的钢材及其合金材料，它们所含的晶粒也是各向异性的。但是，由于晶粒相对于物体的尺寸来说是非常微小的，而且是杂乱排列的，物体的性质是无数晶粒的平均性质，所以从统计的观点来看，仍可认为钢材是各向同性的。有些工程材料，例如木材、竹材等则是各向异性的。为了更好地发挥材料的性能，在工程中往往人为地将材料做成各向异性的，例如夹层板等。

4．**物体是完全弹性的** 假设物体在外加因素（载荷、变温等）作用下引起的变形，当外加因素除去后能完全恢复原来形状而没有任何残余变形。同时还假定材料服从虎克定律，即应力与应变成正比。这就保证了应力与应变之间的一一对应关系。当然，完全弹性的材料是没有的。但由实验可知，对于工程上的大多数材料，当应力不超过某一限度时，这个假设与实际情况基本相符。

5．**物体的变形是微小的** 假设物体在载荷或温度变化等外加因素作用下各点所产生的位移都远小于物体的原始尺寸，因而应变分量和转角都远小于1（但要注意：应变小不足以保证位移与转角也小）。这样，在分析物体变形后的平衡状态时，可以用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸（即硬化原理）；考虑物体的变形建立几何方程和物理方程时，可以略去应变和转角的二次幂或二次乘积以上的项（高阶微量），使得到的基本方程都简化为线性偏微分方程，从而大大减少了求解中的困难，并且可以应用叠加原理。

在上述基本假设中，前四个属于物理假设，通常称为理想弹性体假设，第五个假设属于几何假设。本书所研究的实际受力体都被当作理想弹性体。当然，在有些受力体中往往还存在初应力，但在通常情况下可以略去不计，而在某些特殊情况下（譬如，焊接结构等）则须注意：只有当初应力与载荷或变温等引起的应力叠加后不超过材料的比例极限时，按弹性力学所得的结果才是正确的。

以上述基本假设为基础的弹性力学称为线弹性力学。由于它发展得早、理论严密和系统完整，因而在工程实际中得到广泛应用。本书所研究的问题就限于这个范围。如果物体中的应力超过弹性极限，物体便处于弹塑性状态，此时应力与应变已不再是线性关系（此即物理上的非线性）。研究物体处于弹塑性状态时的应力与应变的学科称为塑性力学。如果物体的变形不是微小的，则不能把应变、转角的二次幂或二次乘积以上的项略去不计（此即几何上的非线性），于是将得出非线性的偏微分方程，研究这类问题的弹性力学称为非线性弹性力学。

§ 1-3 弹性力学的研究方法

这里，回顾一下在材料力学中求解超静定问题时，基本方程的建立以及求解的方法。图1-6(a)所示为一简单超静定桁架，设所给结构为对称结构，各杆的横截面面积均为A，弹性模量均为E，其长度分别为$l_{14}=l/\cos\alpha=l_{34}$，$l_{24}=l$。在节点4处作用一铅垂向下的载荷$P$。现假想地将各杆拆开，取分离体如图1-6($b$)所示。设各杆的轴力分别为$N_{14}=N_{34}$（根据对称性）、$N_{24}$；变形为$\Delta_{14}=\Delta_{34}$、$\Delta_{24}$；节点4在铅垂方向的位移为$u$。

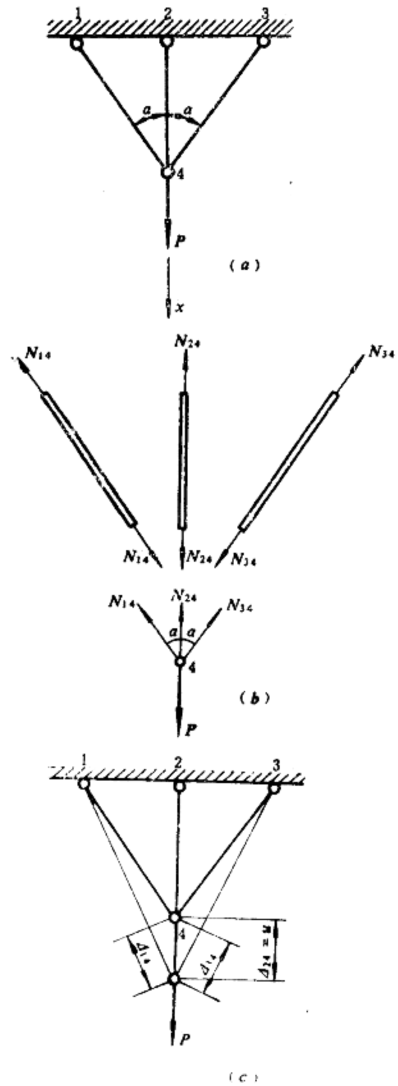


图 1-6

为了确定各杆的内力及节点4的铅垂位移u，必须进行三个方面的分析：节点处内力与外力的平衡分析；杆件变形与节点位移的几何分析；杆件的内力与变形的物理分析。也就是必须从静力学、几何学和物理学条件的分析入手。

1. **静力学条件**　根据静力学平衡条件，由节点4的平衡方程$\Sigma F_x=0$，可得

$$N_{24}+2N_{14}\cos\alpha=P \qquad (a)$$

由于只能列出一个平衡方程，而有两个未知轴力，因此必须考虑该问题变形的几何条件。

2. **几何学条件**　根据杆件的变形与节点位移之间的关系，由图1-6（c）可得

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{24}&=u\\ \Delta_{14}&=u\cos\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

由式（b）消去位移u，便得

$$\Delta_{14}=\Delta_{24}\cos\alpha \qquad (c)$$

式（c）表明各杆间的变形关系，称为变形协调条件（或连续条件）。通过几何分析增加了一个方程式（c），但多了两个未知量。因而，必须建立杆件内力与变形的物理学条件。

3．**物理学条件** 根据变形与轴力间的关系，由物理方程(虎克定律) 可得

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{24}&=\frac{N_{24}l_{24}}{EA}\\ \Delta_{14}&=\frac{N_{14}l_{14}}{EA}\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

通过上面三个方面的分析，得到（a）～（d）4组方程。显然，式（b）与式（c）是等价的，因而可从两个方面来综合上述方程：

综合式（a）、（c）、（d），有

$$\left.\begin{aligned}&N_{24}+2N_{14}\cos\alpha=P\\ &\Delta_{14}=\Delta_{24}\cos\alpha\\ &\Delta_{24}=\frac{N_{24}l}{EA}\\ &\Delta_{14}=\frac{N_{14}l}{(EA\cos\alpha)}\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

综合式（a）、（b）、（d），有

$$\left.\begin{aligned}&N_{24}+2N_{14}\cos\alpha=P\\ &\Delta_{24}=u,\ \Delta_{14}=u\cos\alpha\\ &\Delta_{24}=\frac{N_{24}l}{(EA)}\\ &\Delta_{14}=\frac{N_{14}l}{(EA\cos\alpha)}\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

式（1-1）及式（1-2）即为求解该结构的方程组。由于方程式（1-1）有4个 方 程，4个未知数；方程式（1-2）有5个方程，5个未知数，而且都是代数方程，因而可以 直 接求解。

但是，在力学中一般不是由式（1-1）及式（1-2）直接求解，而是根 据式（1-1）及式（1-2）再分别进行消元，便得常用的力法及位移法方程。

（1）力法 从式（1-1）中消去变形，只保留内力作为未知量，可得用内力表 示 的方程为

$$N_{24}+2N_{14}\cos\alpha=P$$

$$N_{24}-\frac{N_{14}}{\cos^2\alpha}=0$$

解此方程，则得

$$\left.\begin{aligned}N_{14}=N_{34}&=\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}\\ N_{24}&=\frac{P}{1+2\cos^3\alpha}\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

然后，由式（1-1）的后二式求Δ_{24}、$\Delta_{14}=\Delta_{34}$，最后，再由式（b）确定u。

（2）位移法 从式（1-2）中消去内力及变形，只保留位移作为未知量，可得用位移

表示的方程为

$$\frac{EA}{l}(1+2\cos^3\alpha)u=P$$

解此方程，则得

$$u=\frac{Pl}{EA(1+2\cos^3\alpha)} \tag{1-4}$$

然后，再由式（1-2）的后4式求Δ_{24}、$\Delta_{14}=\Delta_{34}$及N_{24}、$N_{14}=N_{34}$。

由本例可见，在材料力学中求解超静定问题可归结为两点：从静力学、几何学和物理学三个方面来建立求解超静定问题的基本方程；用“力法”或“位移法”来求解各种具体超静定问题。

上述两点对于分析弹性力学问题同样是适用的。因为弹性力学的基本内容，同样可归结为这样两个方面：建立基本方程；根据基本方程求解各类具体问题。

建立弹性力学的基本方程所采用的方法同材料力学相比更一般化了。它不是对某个构件或结构建立方程，而是对从物体中截取的单元体建立方程，由此建立的是偏微分方程适用于各种构件或结构的弹性体。

一般来说，任何弹性体在外力作用下，其内部各点的应力、应变和位移是不同的，而都是位置坐标的函数。这些函数关系只用平衡条件是不能求得的，所以，任何弹性力学问题均为超静定问题，必须从静力学、几何学和物理学三个方面来考虑。因此，在用弹性力学的方法处理问题时，首先对单元体用静力学条件，得到一组平衡微分方程；然后考虑变形条件，得到一组几何方程；最后再利用广义虎克定律得到表示应力与应变关系的物理方程。此外，在弹性体的表面上，还必须考虑体内的应力与外载荷之间的平衡，从而得到边界条件。根据边界条件求解上述方程，便得各种具体问题的解答。这就是说，可根据足够数目的微分方程和定解条件，来求解未知的应力、应变和位移。

同材料力学一样，在求解弹性力学问题时，根据基本方程中所保留的未知函数，求解方法可以分为“应力法”和“位移法”。“应力法”是以应力为基本未知函数，在求解过程中先行求出，然后再求其余的未知函数；而“位移法”是以位移为基本未知函数。

由于弹性力学问题的基本方程是偏微分方程，求解它在数学上存在很大的困难。因此，在具体求解时，通常采用“逆解法”或“半逆解法”。所谓“逆解法”就是先设一组解答，如果这组解答能满足所有的偏微分方程，同时满足某种边界条件，则这组解答就是正确解答，而且也是唯一的。而所谓“半逆解法”就是先设一部分解答，另一部分在求解过程中求出。如前所述，由于数学上的困难、弹性力学问题不是总能直接从解偏微分方程组得到解决的，因而，对于一些复杂的问题，往往借助于实验方法或采用数值方法或采用能量近似法等来解决。

§ 1-4 基本物理量的定义、记号与符号

本节将定义弹性力学中常用的物理量，并介绍其记号与正负号规定。

1. **外力** 作用于物体的外力可分为体积力（简称体力）与表面力（简称面力）两种。

(1) 体力　体力是指分布于物体体积内的外力。它作用于物体内部的各个质点上，例如重力、磁力和运动物体的惯性力等。物体内部各点的体力相同称为常体力，例如重力和物体作匀加速平动时的惯性力等，均属常体力。物体内部各点的体力不同称为变体力，它是坐标位置的函数，例如高速旋转物体的惯性力，即属变体力。一般来讲，物体内各点的体力是不同的。为了表述体力在物体内任一点P处的大小和方向，可设想取一包含P点的体积元ΔV，如图1-7(a)所示，若作用在ΔV上的体力之合力为ΔR，则体力的平均集度为$\dfrac{\Delta R}{\Delta V}$；假如体力是连续分布的，则当$\Delta V$无限趋近于零时，$\dfrac{\Delta R}{\Delta V}$将趋于某一极限$f$，即

$$f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta V}$$

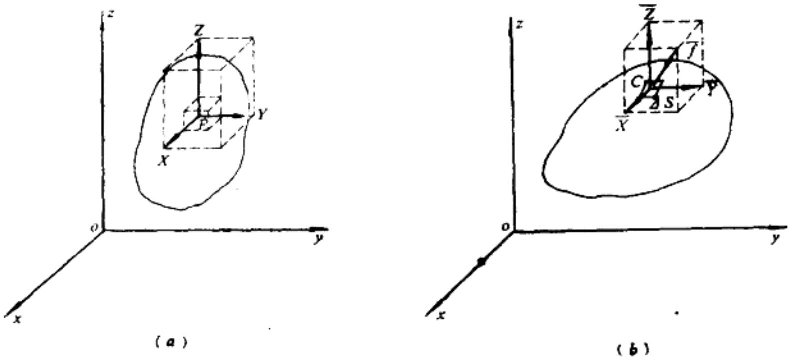


图 1-7

这个极限矢量f反映了P点处受力的大小和方向，称为作用于P点处的体力集度。因为ΔV是标量，所以f的方向就是ΔR的方向。在直角坐标系中，体力集度f通常用它在三个坐标轴上的投影X、Y、Z来表示，这三个投影称为该点的体力分量；其正负视指向而定，当指向沿坐标轴的正方向时为正，沿坐标轴的负方向时为负。其量纲为〔力〕〔长度〕$^{-3}$（常用单位为N/m^3）。

(2) 面力　面力是指分布于物体表面上的外力。它作用于物体表面的各个点上，例如物体间的接触力和气体压力等。如果将一个小立块置于气体中，则其面力是均匀分布的，且垂直于其表面。在一般情况下面力的分布是不均匀的，它是物体表面各点位置坐标的函数。为了表述物体表面上某点C处面力的大小和方向，可设想取一包含C点的面积元Δs，如图1-7(b)所示。若作用在Δs上的面力之合力为ΔH，则面力的平均集度为$\dfrac{\Delta H}{\Delta s}$；假如面力是连续分布的，则当$\Delta s$无限趋近于零时，$\dfrac{\Delta H}{\Delta s}$将趋于某一极限$p$，即

$$p=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta H}{\Delta s}$$

这个极限矢量p反映了作用于C点处面力的大小和方向，称为C点处的面力集度。因为Δs

是标量，所以p的方向就是ΔH的极限方向。在直角坐标系中，面力集度p通常用它在三个坐标轴的投影$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$来表示，这三个投影称为该点的面力分量；其正负号视指向而定，当指向沿坐标轴的正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。其量纲为〔力〕〔长度〕$^{-2}$（常用单位为Pa）。

2．**应力**　我们知道，物体在外力作用下，其内部将产生抵抗变形的“附加内力”。所谓一点处某个截面上的应力就是指该截面上的“附加内力”（以后简称内力）在该点处的集度。为了考察物体内某点处的应力，同材料力学一样，仍采用截面法，即设想用过k点的m-n截面将该物体截分为A、B两部分，弃去B部分，且将B对A的作用以内力来代替，如图1-8(a)所示。现令作用于包含k点的面积元ΔA上的内力为$\Delta \boldsymbol{R}$，则作用在ΔA上的平均总应力为$\frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta A}$，假设内力是连续分布的，则当$\Delta A$趋于零时，其极限

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta A}$$

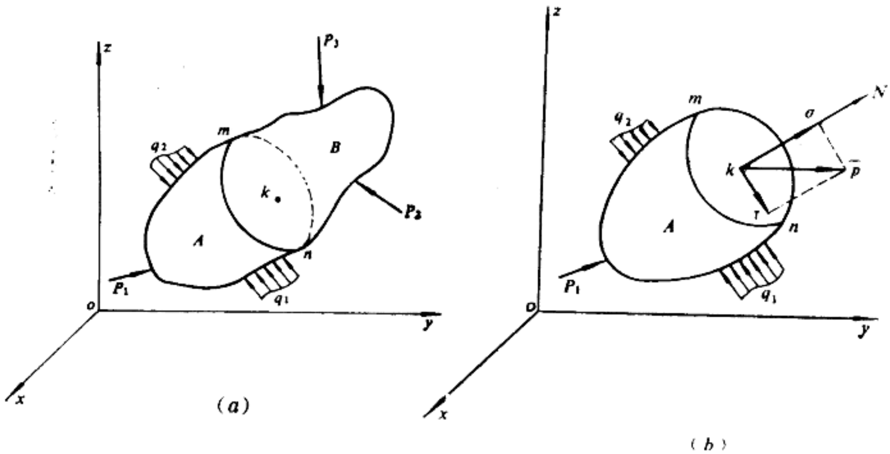


图 1-8

就是m-n截面上k点的总应力（其数值表示截面该点处内力的集度），如图1-8（b)所示。

在一般情况下，同一截面上各点的应力数值是不同的；即使过物体内的同一点，当过该点所作截面方位不同时，应力也不同。这就是说应力不仅与研究点的位置有关，而且还与所取截面方位有关。

在研究物体的变形和强度时，常将总应力分解为垂直于截面的法向分量（称为正应力）和沿截面的切向分量（称为剪应力）。

为了描述物体内一点的应力状态，可在该点截取一包含该点的微小平行六面体，并使其各棱边分别平行于空间直角坐标系的三个坐标轴，其边长分别为dx、dy、dz，如图1-9所示。每个面上都有三个应力分量，即一个正应力和两个剪应力，它们分别与三个坐标轴平行。

应力的记号　正应力用字母σ表示。用一个脚标来表明这个正应力的作用面和作用方向。例如，σ_x是作用在垂直于x轴的面上沿x轴方向的正应力；剪应力用字母τ表示，并

加两个脚标，前一个脚标表明τ的作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个脚标表明τ的作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，τ_{xy}是作用在垂直x轴的面上沿y方向的剪应力。余类推。

应力的正负　如果某一个面上的外法线方向与坐标轴的正方向一致，则该面上的应力就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负；反之，如果某一个面上的外法线方向与坐标轴的负方向一致，则该面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图1-9所示的应力全是正的。

上述应力正负号规定，对正应力来说是与材料力学的应力正负号规定相同的（拉为正、压为负）；但对于剪应力来说，同材料力学的应力正负号规定不完全相同。

可以证明，六个剪应力并不是互不相关，而是两两相等的，即

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}$$

这就是剪应力互等定理，它可以根据图1-9所示单元体的平衡条件来得到（见§2-2）。

因此，受力体内任一点处只有6个应力分量（即σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy}）是独立的。若写成列矩阵形式，并用$\{\sigma\}$表示，则

$$\{\sigma\}=[\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}\ \tau_{xy}]^T$$

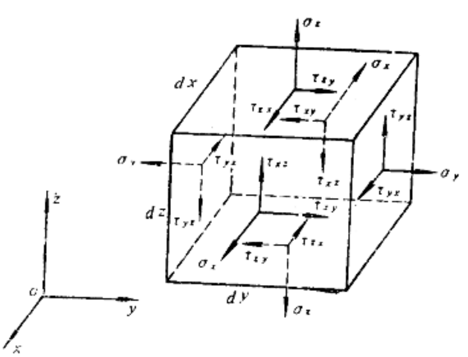


图 1-9

称为应力列阵。可以证明，如果某点的6个应力分量是已知的，那么，经过该点的任何斜面上的应力均可求得。也就是说，这6个应力分量完全可以确定该点的应力状态，因此，这6个应力分量称为该点的应力分量。应力的量纲是〔力〕/〔长度〕^{2}（常用单位为Pa）。

3．**应变**　物体在外力作用下，其形状要发生改变。这种形状改变不管多么复杂，对于其中的某一个单元体来说，无非是产生两种变形，即棱边长度的改变；两正向（或负向）相交面之间夹角（直角）的改变。因此，为了考察物体内某一点处的应变，同样可在该点处从物体内截取一单元体，研究其沿坐标轴正方向的三个线元dx、dy、dz以及两两相交面之间的变化情况。如图1-10所示，物体变形后，这三个线段的长度以及两两相交面之间的夹角（直角）都可能发生改变。线段每单位长度的伸长（或缩短）量称为正应变（或线应变）；两相交面间夹角（直角）的改变量（用弧度表示）称为剪应变。

应变的记号　正应变用字母ε表示，并用一个脚标来表明这个正应变是沿哪个坐标轴方向的。例如ε_x就表示x方向线段的正应变。剪应变用字母γ表示，并用两个脚标来表明这个剪应变是哪两个相交面间夹角（直角）的改变量。例如γ_{xy}就表示沿x、y正方向两相交面夹角（直角）的改变量。

应变的正负　正应变的正负号规定与正应力相对应，即以伸长为正，缩短为负；而剪应变的正负号规定也与剪应力相对应，即单元体的两个正向（或负向）相交面夹角（直角）变小为正，变大为负。图1-10所示的应变全是正的。

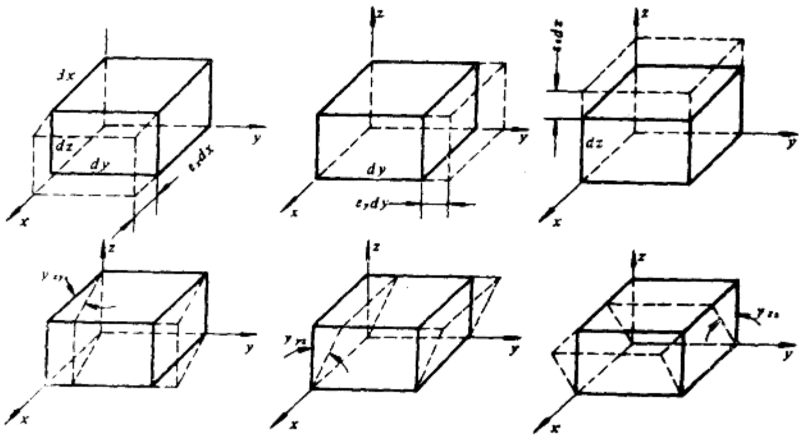


图 1-10

根据上述分析可知，独立的应变分量也只有6个（即ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy}）。若写成列矩阵形式，并用$\{\varepsilon\}$表示，则

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\ \gamma_{xy}]^T$$

称为应变列阵。可以证明，如果某点的6个应变分量是已知的，那么，经过该点的任何方向的正应变及任意两相交面间夹角的改变均可求得。也就是说，这6个应变分量完全可以确定该点的应变状态。因此，这6个应变分量称为该点的应变分量。根据定义可知，应变是无量纲的量。

4．位移 所谓位移就是物体变形时各点位置的改变量。我们知道，物体在外力或其它因素作用下产生变形的过程中，其内部各点（除给定位移为零的边界外）都可能向任意方向产生位移，如图1-11所示，任一点M在变形后移动到了M'，则$\overrightarrow{MM'}$为总位移向量（用δ表示）。

位移的记号 在直角坐标系中，物体内任一点的位移δ用它在三个坐标轴上的投影u、v、w来表示（图1-11），称为该点的位移分量。它们是x、y、z的单值连续函数，而且还假定它们具有三阶连续偏导数。若将它们写成列矩阵形式，并用$\{\delta\}$表示，则

$$\{\delta\} = [u\ v\ w]^T$$

称为位移列阵。

位移的正负号 其正负视其指向而定，指向以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。图1-11所示的位移分量均为正。位移的量纲是〔长度〕。

这里须指出的是：在求解弹性力学问题时，位移是个重要的物理量。为了反映物体受力后的变形情况，必须表明各点的位移。如果物体在发生位移后，仍保持各点间初始状态时的相对位置，则物体实际上只产生了刚体平移和转动，这种位移称为刚性位移；如果物体各点在发生位移后，改变了各点间初始状态时的相对位置，则物体也就产生了变形。因此，一般来讲位移本身还不能表明物体内各点变形的剧烈程度。例如，图1-12所示的刚架，BC段上虽有位移，但此处并未产生变形。总之，一个物体的位移一般由两部分组成：一是整个物体像刚体一样运动所引起的位移（一般包括平动和转动），即刚性位移；二是物

体各点间的相对运动，即物体自身变形而产生的位移。前者与变形无关，后者才与应变有着明确的几何关系。

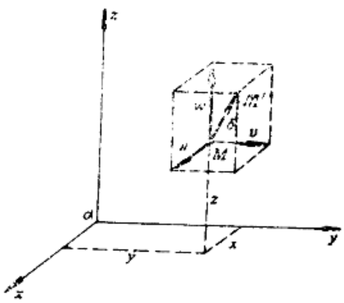


图 1-11

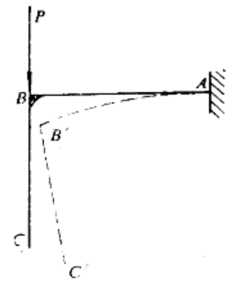


图 1-12

综上所述，弹性体任一点的体力分量、面力分量；应力分量、应变分量以及位移分量都是随着该点的位置而改变，它们都是坐标位置的函数。

在弹性力学里，通常是根据已知条件（例如弹性体的形状和大小、弹性常数、所受的体力和面力以及约束情况等）求解未知的应力、应变和位移。

思 考 题

1-1 试指出弹性力学的任务和研究的对象以及分析问题的方法与材料力学有什么相同点及不同之处？

1-2 试举例说明什么是各向同性体，什么是非均匀各向同性体，什么是非均匀各向异性体？

1-3 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？

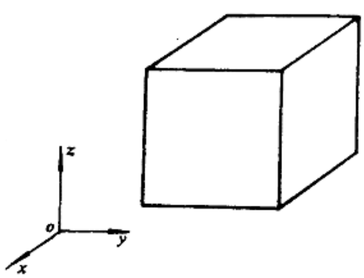
1-4 在弹性力学中应力分量的正负号规定与材料力学中的正负号规定哪些是相同的，哪些是不同的？

1-5 什么叫一点的应变及位移，二者有什么联系及区别？

1-6 试在图示单元体上按真实指向画出下列应力状态的应力分量：

$$\sigma_x = 100\text{Pa},\ \sigma_y = -50\text{Pa},\ \sigma_z = 120\text{Pa}$$
$$\tau_{xy} = -50\text{Pa},\ \tau_{yz} = 60\text{Pa},\ \tau_{zx} = 80\text{Pa}$$

1-7 若已知弹性体内某点应力为零，则其应变是否也一定为零？若已知弹性体内某点应变为零，则其应力是否也一定为零？若已知弹性体内某点应变为零，则其位移是否也一定为零？若已知弹性体内某点位移为零，则其应变是否也一定为零？



题1-6图