第 6 篇　机械振动和噪声

主　编　唐恒龄
编写人　唐恒龄
　　　　张益群

第 1 版

机械振动与噪声

主　编　屈维德
编写人　屈维德
　　　　樊　鹏
　　　　唐恒龄

第 1 章　机械振动的基础资料

1　机械振动的类型（见表 6.1-1）

表 6.1-1　机械振动的分类

分　类	名　称	主要特征及说明
按产生振动的原因分类	自由振动	系统受初始干扰或原有外部激励取消后，只靠其恢复力维持的振动。振动的频率就是系统的固有频率。有阻尼时，振动逐渐衰减
	受迫振动	在外部激励的持续作用下，系统被迫产生的振动。其振幅、频率及时间历程与外部激励函数密切相关
	参数振动	系统中某个或某几个参数作周期性变化引起的振动。其运动方程一般是线性微分方程，方程中没有外力项，参数的系数是周期函数
	自激振动	由系统的反馈控制环节，把非振荡性能源转换为振荡性激励所产生的周期性振动。没有外部激励，维持振动的交变力是由系统自身激发的。振动的频率接近系统的固有频率
按振动的规律分类	简谐振动	运动的规律按正弦或余弦函数随时间而变化的周期性振动。振动的幅值和相位能预先确定
	非简谐振动	运动的规律不按正弦或余弦函数随时间变化的周期性振动。可用“谐波分析”方法，将其分解为若干简谐振动
	瞬态振动	非稳态的、非随机的、短暂存在的振动。可用各种方法求解描述其运动规律的函数
	随机振动	运动规律具有不确定性、不可预估性和相同条件下的其他各次振动的不重复性的振动。可用概率与统计的方法进行研究
按振动系统的自由度数分类	单自由度系统的振动	在振动过程中的任何瞬时，确定系统的几何位置只需一个广义坐标的振动
	多自由度系统的振动	在振动过程中的任何瞬时，确定系统的几何位置需要多个广义坐标的振动
	弹性体振动	在振动过程中的任何瞬时，确定系统的几何位置需要无限多个广义坐标的振动

（续）

分　类	名　称	主要特征及说明
按振动系统结构参数的特性分类	线性振动	系统的各参数都具有线性性质，能用常系数线性微分方程描述的振动。系统的响应能运用叠加原理，振动的固有频率与其振幅无关
	非线性振动	系统中的某个或某几个参数（如刚度、阻尼等）具有非线性性质，只能用非线性微分方程描述的振动。不能运用叠加原理，振动的固有频率与其振幅有关
按振动位移的特征分类	扭转振动	振动体上的质点只作绕轴线的振动。振动使振动体产生扭转变形
	摆动	振动体上的质点作围绕转轴的振动
	角振动	振动位移是角位移的振动。扭转振动和摆动都属于角振动
	纵向振动	振动体上的质点只作沿轴线方向的振动
	横向振动	振动体的质点只作垂直轴线方向的振动。横向振动使振动体产生弯曲变形
	直线振动	振动位移是直线位移的振动。包括纵向、横向振动
其他	瞬态振动	在冲击的作用下及冲击停止后产生的初始振动及剩余振动。包括初始条件引起的和激励变化时的振动。瞬态振动在系统中很快消失
	波动	振动以一定速度由近及远向周围介质的传播。波动只是振动过程的传播，即介质的质点只在其平衡位置振动不随波前进

2　机械振动的表示方法

机械振动的幅值包括位移幅值、速度幅值和加速度幅值。位移幅值是指振动体离开其平衡位置的最大位移。周期振动每往复一次的时间间隔称为周期 T。周期的倒数称为频率 f，通常以每秒 c 次，即 c/s 表示。$1c/s$ 亦称为 1 赫兹（Hz）。当频率以每秒 ω 弧度表示

时，称为角频率。

$$f = \frac{1}{T} \tag{6.1-1}$$

设 n 表示每分钟振动的次数

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 0.1047n \tag{6.1-2}$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = 9.5493\omega \tag{6.1-3}$$

振动体的振动量是指振动体的位移、速度或加速度。这些振动量是时间的函数。通常以时间为横坐标，以振动体的一种振动量为纵坐标的曲线图来描述振动的运动规律，也就是振动的时间历程。例如简谐振动的时间历程，在上述的曲线图上，是正弦曲线或余弦曲线，见图6.1-1。

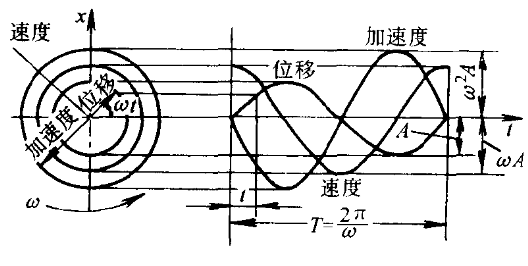


图 6.1-1　简谐振动的矢量表示

图中幅值为 A 的位移矢量以等角速度 ω 作反时针方向旋转，在 t 时刻，它在纵轴上的投影表示振动体在此时刻的振动位移 x

$$x = A\sin\omega t \tag{6.1-4}$$

对时间 t 求导，$\dot{x} = \omega A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$　　(6.1-5)

幅值为 ωA 的速度矢量比位移矢量超前 90°，同样以等角速度 ω 作反时针方向旋转。在 t 时刻，此速度矢量在纵轴上的投影表示振动体在此时刻的振动速度 $\dot{x}$。

再对 t 求导，$\ddot{x} = \omega^2 A\sin\ (\omega t + \pi)$　　(6.1-6)

幅值为 ω^2A 的加速度矢量比位移矢量超前 180°，同样以等角速度 ω 作反时针方向旋转。在 t 时刻，此加速度矢量在纵轴上的投影表示振动体在此时刻的振动加速度 $\ddot{x}$。

例　今有两个等角频率的简谐振动

$$x_1 = 4\cos(\omega t + 5°)$$

$$x_2 = 6\sin(\omega t + 55°)$$

它们的位移矢量都是以等角速度 ω 作反时针方向旋转，可以合成为一简谐振动。求①合成位移矢量的幅值；②合成简谐振动的时间历程。

解

1）应用 $\cos\theta = \sin\ (\theta + 90°)$ 的关系，x_1 可以用正弦来表示，即

$$x_1 = 4\sin(\omega t + 95°)$$

两者合成后的位移为

$$x = 4\sin(\omega t + 95°) + 6\sin(\omega t + 55°)$$

两者的矢量和见图 6.1-2。

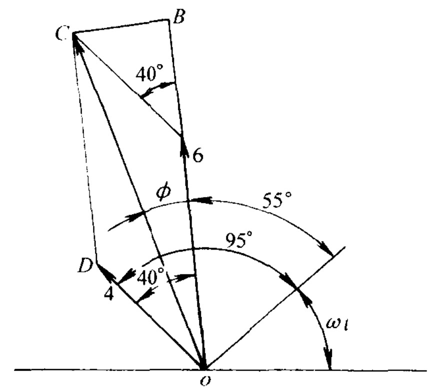


图 6.1-2　两个简谐振动的合成

$$\angle BoD = 95° - 55° = 40°$$

合成位移矢量的幅值 $\overline{oC}$ 为

$$\sqrt{4^2 + 6^2 + 2(4)(6)\cos 40°} = 9.4218$$

2）

$$\overline{BC} = 4\sin 40°$$

$$\overline{oB} = 6 + 4\cos 40°$$

$$\tan\phi = \frac{\overline{BC}}{\overline{oB}} = 0.2837$$

$$\phi = 15°50'$$

合成简谐振动的时间历程 $x = 9.4218\sin(\omega t + 70°50')$。

简谐振动也可用复数来表示。参见图 6.1-3，纵轴是虚轴；横轴是实轴；$i = \sqrt{-1}$。

$$x = Ae^{i\omega t} \tag{6.1-7}$$

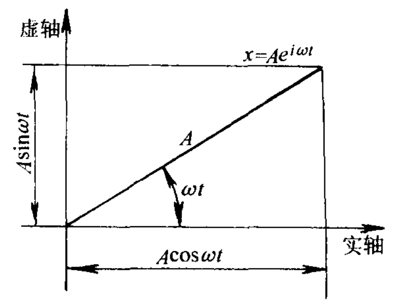


图 6.1-3　简谐振动的复数表示

式中　A——复数的模；

ωt——振动位移 x 与实轴所成的角。

振动速度　$\dot{x} = i\omega Ae^{i\omega t}$　　(6.1-8)

振动加速度　$\ddot{x} = -\omega^2 Ae^{i\omega t}$　　(6.1-9)

例　求两复数 $5e^{i\frac{\pi}{2}}$ 及 $9e^{i\frac{\pi}{6}}$ 的和（图 6.1-4）。

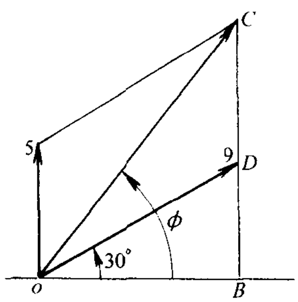


图 6.1-4　两复数的和

解

$$\frac{\pi}{2}\text{rad}=90^\circ$$

$$\frac{\pi}{6}\text{rad} = 30^\circ$$

$$\overline{oB} = 9\cos 30^\circ = 7.7942$$

$$\overline{DB} = 9\sin 30^\circ = 4.5$$

$$\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} = 9.5$$

$$\overline{oC} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{oB}^2} = 12.2882$$

$$\tan\phi = \frac{\overline{CB}}{\overline{oB}} = 1.21886$$

$$\phi = 50^\circ.6332 = 0.8837\text{rad}$$

$$5e^{i\frac{\pi}{2}} + 9e^{i\frac{\pi}{6}} = 12.2882e^{i0.8837}$$

通过复数运算，同样可以把两个角频率相等的简谐振动合成为一个简谐振动。

简谐振动幅值的各种描述量：

峰值$=A$

峰-峰值$=2A$

均方值$=\dfrac{A^2}{2}$

均方根值$=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot A=0.7071A$

平均绝对值$=\dfrac{2A}{\pi}=0.6366A$

3　机械振动系统的动力学模型

当分析、计算、监测和控制机械系统的振动特性时，建立其动力学模型，是必不可少的一步。首先根据实际结构的形状、尺寸、材料、支承、联结及受力情况，建立反映其动力特性的物理模型，也称力学模型。再根据物理模型的动力特性及求解数学表达式的手段，建立其数学模型，也即用于求解系统振动特性的数学表达式。

一个具体结构可以根据不同的用途，建立不同的动力学模型。为便于分析和计算，应抓住结构的主要特征，忽略次要因素，对其进行一定程度的简化(线性化、离散化…)，在满足工程精度要求的前提下，模型应尽可能的简单，以降低成本。动力学模型大体可分为：

1）集总参量模型　由惯性元件（集中质量、刚体、圆盘）、弹性元件（弹簧、弹性梁、弹性轴段）和阻尼元件（阻尼器）等离散元件组成的模型。其自由度是有限的。运动量只依赖于时间而与空间无关，可用常微分方程来描述。这种模型由于过多的简化，与实际结构的动力特性相差较大，只适用于初步估算系统的动力特性及工程精度要求不高的情况。

2）连续参量模型　由无数个质量通过弹性连结而成的连续模型。有无限多个自由度。运动量既与时间有关又与空间有关，必须用偏微分方程来描述。这种模型比较反映结构的真实情况，但只有一些形状比较简单的系统，其数学表达式才有解析解，因此，常用于弦、杆、梁、板、膜和壳等系统。

3）离散参量模型　由有限个离散单元组成，而每个单元则是连续的。这种模型按照有限元的计算方法，比较容易地解决其偏微分方程的求解问题，而且，能满足较高的工程精度，可用于各种结构。

4）混合模型　把大型复杂结构、划分为若干子结构。根据各子结构的特征，选用上述模型，分别建立其相应的模型。对子结构模型进行分析或实验，得到各子结构的动力特性后，通过模态综合技术，求得整个结构的动力特性。适用于大型复杂结构。

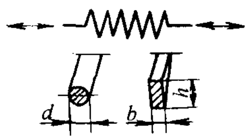
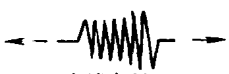
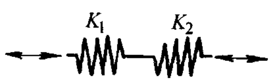
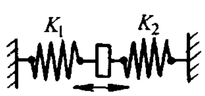
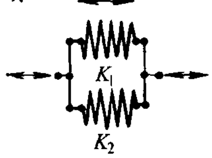
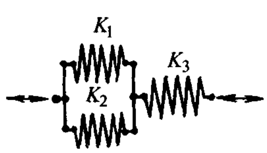
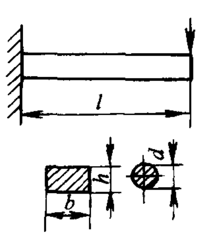
物理模型建成后，建立其数学模型。同一个物理模型，可以有不同的数学模型。例如，对系统的参量可以建成线性或非线性、定常或时变、确定性或随机性等不同数学模型；对信号分析可建成用微分方程描述的连续时间模型，或用差分方程描述的离散时间模型；对输入输出关系可建成输入—输出模型，或状态空间模型。可以根据建模的目的和求解数学表达式的手段，来选取以上各种数学模型。

4　构件刚度的计算与折算

弹性体所受外力的增量与其所产生的位移的增量之比，称为**刚度**。刚度就是弹性体产生单位位移所需的力。在扭振系统中，弹性体所受外力矩的增量与其所产生的角位移的增量之比，称为**扭转刚度**。扭转刚度就是弹性体产生单位角位移所需的扭矩。简单弹性元件的刚度和扭转刚度见表 6.1-1。复杂元件或整个系统的刚度通常用实验方法求得。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

表 6.1-1a 弹性元件的刚度

<table>
<tr><th>简 图</th><th>说 明</th><th>刚 度 K</th></tr>
<tr><td></td><td>圆柱形拉伸或压缩弹簧</td><td>圆形截面 $K=\frac{Gd^4}{8ND^3}$
矩形截面 $K=\frac{4Ghb^3\eta}{\pi ND^3}$
<table><tr><td>h/b</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>η</td><td>0.141</td><td>0.196</td><td>0.229</td><td>0.263</td><td>0.281</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
D_1 - 大端中径(cm)
D_2 - 小端中径(cm)</td><td>圆锥形拉伸弹簧</td><td>圆形截面 $K=\frac{Gd^4}{2N\ (D_1^2+D_2^2)\ (D_1+D_2)}$
矩形截面 $K=\frac{16Ghb^3\eta}{\pi N\ (D_1^2+D_2^2)\ (D_1+D_2)}$
式中 $\eta=\frac{0.276\left(\frac{h}{b}\right)^2}{1+\left(\frac{h}{b}\right)^2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>两个串联弹簧</td><td>$\frac{1}{K}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}$</td></tr>
<tr><td>n 个串联弹簧</td><td>$\frac{1}{K}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\cdots+\frac{1}{K_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>两个并联弹簧</td><td>$K=K_1+K_2$</td></tr>
<tr><td>n 个并联弹簧</td><td>$K=K_1+K_2+\cdots+K_n=\sum_{i=1}^{n}K_i$</td></tr>
<tr><td></td><td>混联弹簧</td><td>$K=\frac{(K_1+K_2)\ K_3}{K_1+K_2+K_3}$</td></tr>
<tr><td></td><td>等截面悬臂梁</td><td>$K=\frac{3EI_3}{l^2}$
圆形截面 $K=\frac{3\pi d^4E}{64l^3}$
矩形截面 $K=\frac{bh^3E}{4l^3}$</td></tr>
</table>

（续）

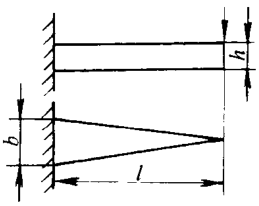
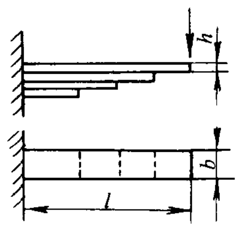
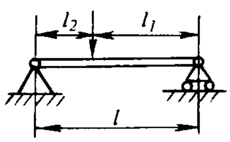
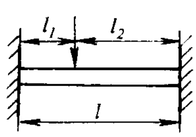
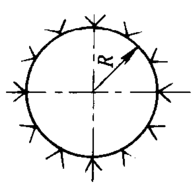
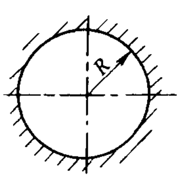
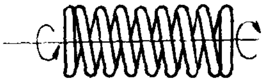
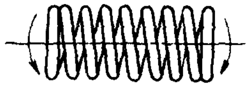
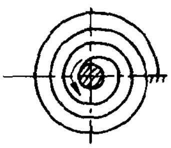
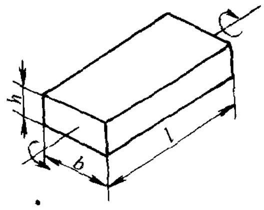
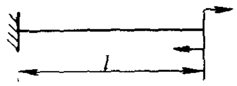
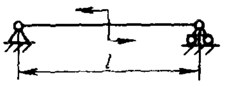
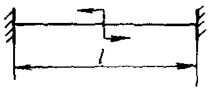
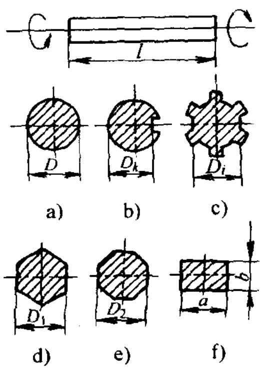
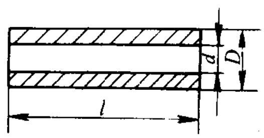
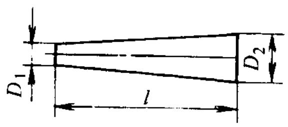
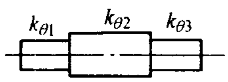
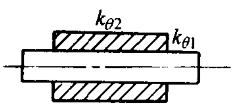
简　　图	说　　明	刚　　度　　K
	等厚三角形悬臂梁	$K=\dfrac{bh^3E}{6l^3}$
	悬臂板簧（各板排列成等强度梁）	$K=\dfrac{nbh^3E}{6l^3}$ n—钢板数
	简支梁	$K=\dfrac{3EI_a l}{l_1^2 l_2^2}$ 当 $l_1=l_2$ $K=\dfrac{48EI_a}{l^3}$
	两端固定的梁	$K=\dfrac{3EI_a l^3}{l_1^3 l_2^3}$ 当 $l_1=l_2$ $K=\dfrac{192EI_a}{l^3}$
	周边简支，中心受载的圆板	$K=\dfrac{4\pi Et^3}{3R^2(1-\mu)(3+\mu)}$ t—圆板厚，μ—泊松比
	周边固定，中心受载的圆板	$K=\dfrac{4\pi Et^3}{3R^2(1-\mu^2)}$ t—圆板厚，μ—泊松比
说明	E—弹性模量（Pa）　D—弹簧中径（m）　I_a—截面惯性矩（m^4）　d—钢丝直径（m）　N—弹簧有效圈数 G—切变模量	

表 6.1-1b 弹性元件的扭转刚度

简 图	说 明	扭转刚度 k_θ
	圆柱形扭转弹簧	$k_\theta=\frac{Ed^4}{32ND}$
	圆柱形弯曲弹簧	$k_\theta=\frac{Ed^4}{32ND}\frac{1}{(1+E/2G)}$
	卷簧	$k_\theta=\frac{EI_a}{l}$ l—钢条总长
 	两端受扭的矩形条	当$\frac{b}{h}=1.75\sim20$ $k_\theta=\frac{\alpha Gbh^3}{l}$ 式中：$\alpha=\frac{1}{3}-\frac{0.209h}{b}$
	两端受扭的平板	当$\frac{b}{h}>20$ $k_\theta=\frac{Gbh^3}{3l}$
 	力偶作用于悬臂梁的端部	$k_\theta=\frac{EI_a}{l}$①
 	力偶作用于简支梁的中点	$k_\theta=\frac{12EI_a}{l}$② ①、②、③为计算转角的刚度
 	力偶作用于两端固定梁的中点	$k_\theta=\frac{16EI_a}{l}$③
 	实心轴	a) $k_\theta=\frac{G\pi D^4}{32l}$ b) $k_\theta=\frac{G\pi D_k^4}{32l}$ c) $k_\theta=\frac{G\pi D_i^4}{32l}$ d) $k_\theta=1.18\frac{G\pi D_1^4}{32l}$ e) $k_\theta=1.1\frac{G\pi D_2^4}{32l}$ f) $k_\theta=\alpha\frac{G\pi b^4}{32l}$ a/b: 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 α: 1.43 | 2.94 | 4.57 | 7.90 | 11.23

（续）

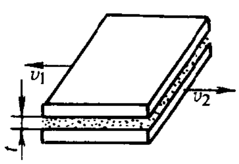
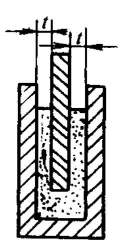
简　图	说　明	扭转刚度 k_θ
	空心轴	$k_\theta=\dfrac{G\pi\ (D^4-d^4)}{32l}$
	锥形轴	$k_\theta=\dfrac{3G\pi D_1^3D_2^3\ (D_2-D_1)}{32l\ (D_2^3-D_1^3)}$
	阶梯轴	$\dfrac{1}{k_\theta}=\dfrac{1}{k_{\theta1}}+\dfrac{1}{k_{\theta2}}+\cdots$
	紧配合的轴	$k_\theta=k_{\theta1}+k_{\theta2}+\cdots$
说明	E—弹性模量（Pa）　D—弹簧中径（m）　G—切变模量（Pa）　d—钢丝直径（m）　I_a—截面惯性矩（m^4）　N—弹簧有效圈数	

5　机械振动系统的阻尼系数

线性粘性阻尼力与振动速度之比，称为**粘性阻尼系数**。对于扭振系统来说，粘性阻尼系数就是振动体所受到的线性粘性阻尼力矩与振动角速度之比。如果阻尼是非线性的，为了便于分析，可用等效粘性阻尼来代替非线性阻尼。等效粘性阻尼就是分析振动运动时所假想的线性粘性阻尼。等效粘性阻尼的值，可按简谐振动时每个循环中，它所耗散的能量与实际阻尼所耗散的能量相等而求得。两个反向相对运动的表面间具有液体介质时的粘性阻尼系数见表 6.1-2。

等效粘性阻尼系数见表 6.1-3。

表 6.1-2　粘性阻尼系数

简　图	说　明	粘性阻尼系数 c
	液体介于具有相对运动的二平行板之间	$c=\dfrac{\eta A}{t}$ A—上板与液体的接触面积（m^2） t—液层厚度（m）
	板在液体内平行移动	$c=\dfrac{2\eta A}{t}$ A—动板的一侧与液体的接触面积 m^2

（续）

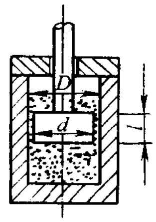
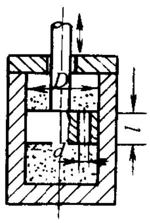
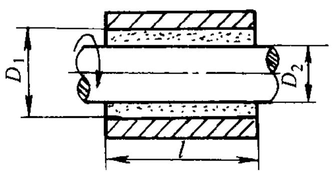
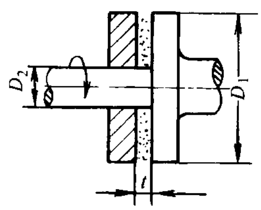
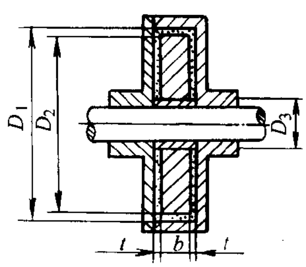
简　　图	说　　明	粘性阻尼系数 c
	液体通过移动的活塞柱面与缸壁间的间隙	$c=\dfrac{6\pi\eta l d^3}{(D-d)^3}$
	液体通过移动活塞中的小孔	$c=\dfrac{8\pi\eta l}{n}\left(\dfrac{D}{d}\right)^4$ n—小孔数
	液体介于具有相对运动的两同心圆柱之间	$c_\theta=\dfrac{\pi\eta l\ (D_1+D_2)^3}{2\ (D_1-D_2)}$
	液体介于具有相对运动的两同心圆盘之间	$c_\theta=\dfrac{\pi\eta}{32t}\ (D_1^4-D_2^4)$
	液体介于具有相对运动的圆柱形壳与圆盘之间	$c_\theta=\pi\eta\left(\dfrac{bD_1^2D_2^2}{D_1^2-D_2^2}+\dfrac{D_1^4-D_3^4}{16t}\right)$
说明	c—粘性阻尼系数（N·s/m）　η—动力粘度（N·s/m²）　c_θ—粘性扭转阻尼系数（N·m·s/rad）	

表 6.1-3　等效粘性阻尼系数

阻尼的种类	阻　尼　力	等效粘性阻尼系数 c_e
干摩擦阻尼	$\pm F$	$c_e=\dfrac{4F}{\pi\omega A}$
流体摩擦阻尼	$c_2\dot{x}^2$	$c_e=\dfrac{8c_2\omega A}{3\pi}$

（续）

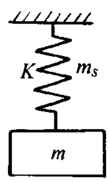
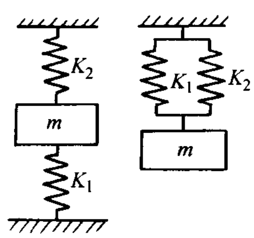
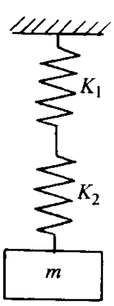
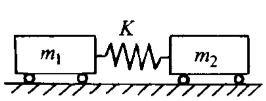
阻尼的种类	阻　尼　力	等效粘性阻尼系数 c_e
与速度的 n 次方成正比的阻尼	$c_n\dot{x}^n$	$c_e=\dfrac{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}c_n\omega^{n-1}A^{n-1}$
一般非线性阻尼	$f\ (x,\ \dot{x})$	$c_e=\dfrac{1}{\pi\omega A}\int_0^{2\pi}f\ (A\sin\varphi,\ \omega A\cos\varphi)\ \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
说明	x—振动体的位移 m　A—振幅 m　ω—频率 rad/s　$x=A\sin\omega t$　Γ—伽马函数　$\dot{x}$—速度	

6　机械振动系统的固有频率

由无阻尼系统的质量和刚度所决定的频率，称为固有频率。有阻尼线性系统的自由振动频率，称为阻尼固有频率，它与系统的质量（或转动惯量）、刚度和阻尼有关。对小阻尼系统，它和无阻尼系统的固有频率相差不大。估算小阻尼系统的固有频率时，可应用无阻尼系统的固有频率计算公式。无阻尼的弹簧—质量系统的固有频率计算公式见表 6.1-4。

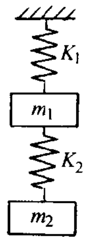
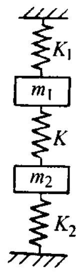
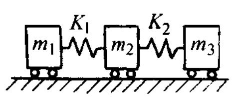
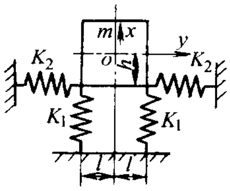
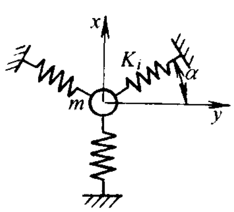
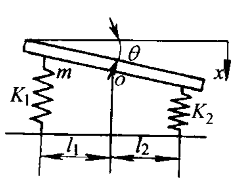
物理摆是任意形状的刚体绕通过质心以外的轴而摆动的摆。单摆是由一个摆锤系在不能伸长且无重量的悬线下端构成的，摆锤的质量集中于悬线的下端。

表 6.1-4　弹簧-质量系统的固有频率

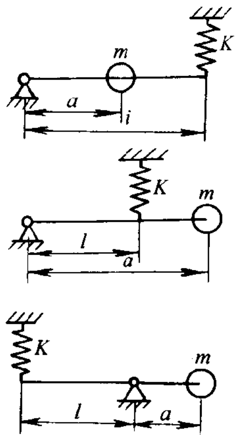
序号	系统简图	说　明	固有频率 ω_n
1		一个质量，一个弹簧的系统	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{m}}$ 若计及弹簧的质量 m_s $\omega_n=\sqrt{\dfrac{3K}{3m+m_s}}$
2		一个质量，两个弹簧并联的系统	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{K_1+K_2}{m}}$
		一个质量，n 个弹簧并联的系统	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{K_1+K_2+\cdots K_n}{m}}$
3		一个质量，两个弹簧串联的系统	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{K_1K_2}{m\ (K_1+K_2)}}$
		一个质量，n 个弹簧串联的系统	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{1}{m\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{K_i}\right)}}$
4		两个质量，一个弹簧的系统	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{K\ (m_1+m_2)}{m_1m_2}}$

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

（续）

序号	系统简图	说　明	固有频率 ω_n
5		两个质量，两个弹簧的系统	$\omega_n^2=\frac{1}{2}\left[\omega_1^2+\omega_2^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right]\mp\frac{1}{2}\sqrt{\left[\omega_1^2+\omega_2^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right]^2-4\omega_1^2\omega_2^2}$ 式中　$\omega_1^2=\frac{K_1}{m_1}$　$\omega_2^2=\frac{K_2}{m_2}$
6		两个质量，三个弹簧的系统	$\omega_n^2=\frac{1}{2}\ (\omega_{11}^2+\omega_{22}^2)\ \mp\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{11}^2-\omega_{22}^2)^2+4\omega_{12}^4}$ 式中　$\omega_{11}^2=\frac{K_1+K}{m_1}$，$\omega_{22}^2=\frac{K_2+K}{m_2}$ $\omega_{12}^2=\frac{K}{\sqrt{m_1m_2}}$
7		三个质量，两个弹簧的系统	$\omega_n^2=\frac{1}{2}\ (\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\ \mp\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)^2-4\omega_1^2\omega_3^2\frac{m_1+m_2+m_3}{m_2}}$ 式中　$\omega_1^2=\frac{K_1}{m_1}$，$\omega_2^2=\frac{K_1+K_2}{m_2}$，$\omega_3^2=\frac{K_2}{m_3}$
8		直线振动和摇摆振动的联合系统	$\omega_n^2=\frac{1}{2}\ (\omega_y^2+\omega_\theta^2)\ \mp\frac{1}{2}\ \sqrt{(\omega_y^2-\omega_\theta^2)^2+4\omega_y^4\varepsilon^2}$ 式中　$\omega_y^2=\frac{2K_2}{m}$，$\omega_\theta^2=\frac{2K_1l^2+2K_2h^2}{I}$ $\varepsilon=\frac{h}{\rho}$，$\rho=\sqrt{\frac{I}{m}}$
9		质量为三个弹簧所支持的系统（质量中心与各弹簧的中心线在同一平面内）	$\omega_n^2=\frac{1}{2}\ (\omega_{xx}^2-\omega_{yy}^2)\ \mp\frac{1}{2}\ \sqrt{(\omega_{xx}^2-\omega_{yy}^2)^2+4\omega_{xy}^4}$ 式中　$\omega_{xx}^2=\frac{K_{xx}}{m}$，$\omega_{yy}^2=\frac{K_{yy}}{m}$，$\omega_{xy}^2=\frac{K_{xy}}{m}$ $K_{xx}=\sum_i K_i\cos^2\alpha_i$　$K_{yy}=\sum_i K_i\sin^2\alpha_i$ $K_{xy}=\sum_i K_i\sin\alpha_i\cos\alpha_i$
10		刚性梁为两个弹簧所支持的系统	$\omega_n^2=\frac{1}{2}\ (a+c)\ \mp\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4\left(\frac{b}{\rho}\right)^2}$ 式中　$a=\frac{K_1+K_2}{m}$，$b=\frac{K_2l_2-K_1l_1}{m}$ $c=\frac{K_1l_1^2+K_2l_2^2}{m\rho^2}$　$\rho=\sqrt{\frac{I}{m}}$

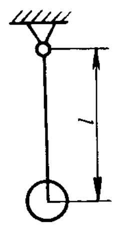
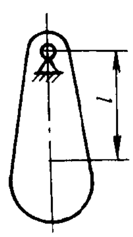
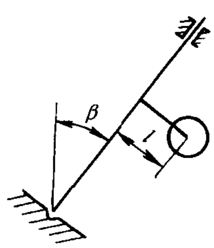
（续）

序号	系统简图	说　明	固有频率 ω_n
11		质量位于被铰支承和弹簧支承的刚性梁系统	$\omega_n=\sqrt{\frac{Kl^2}{ma^2}}$ 若计及梁的质量 m_g $\omega_n=\sqrt{\frac{3Kl^2}{3ma^2+m_gl^2}}$ 当具有 n 个质量的情况时 以　$m_1a_1^2+m_2a_2^2+\cdots+m_na_n^2$ 代替上式中的 ma^2 当具有 n 个弹簧的情况时， 以　$K_1l_1^2+K_2l_2^2+\cdots K_nl_n^2$ 代替上式中的 Kl^2
说明	m—振动体的质量（kg）　I—振动体的转动惯量（kg·m²）　K—弹簧的刚度（N/m）　ρ—振动体的回转半径（m）		

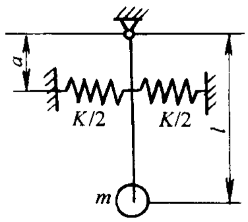
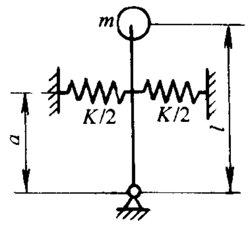
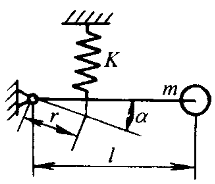
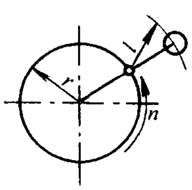
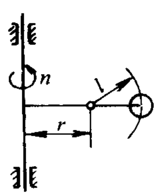
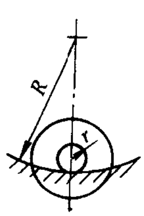
弦可以看作抗拉强度很大而弯曲刚度微不足道的线材。在实际应用上，钢丝受张力时亦可看作弦。摆和弦的固有频率见表 6.1-5。

轴和圆盘构成的轴系的扭转振动固有频率见表

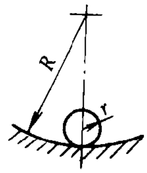
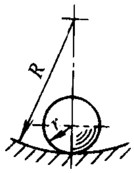
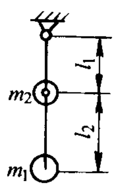
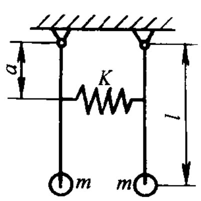
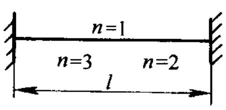
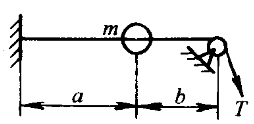
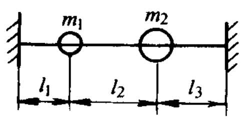
表 6.1-5　摆、弦的固有频率

序号	简　图	说　明	固有频率 ω_n
1		单摆	$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}$
2		物理摆	$\omega_n=\sqrt{\frac{gl}{\rho^2+l^2}}$ l—摆的重心至转轴中心的距离
3		倾斜摆	$\omega_n=\sqrt{\frac{g\sin\beta}{l}}$ β—转轴中心线与悬垂线之间的夹角

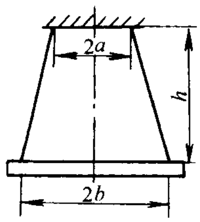
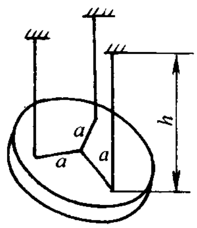
（续）

序号	简　图	说　明	固有频率 ω_n
4		双簧摆	$\omega_n=\sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2}+\frac{g}{l}}$
5		倒立双簧摆	$\omega_n=\sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2}-\frac{g}{l}}$
6		杠杆摆	$\omega_n=\sqrt{\frac{Kr^2\cos^2\alpha-Pr\sin\alpha}{ml^2}}$ 式中　$P=K\delta_{st}$　δ_{st}—弹簧静位移（cm）
7		离心摆（转轴中心线垂直于振动体的运动平面）	$\omega_n=\frac{\pi n}{30}\sqrt{\frac{r}{l}}$ 式中　n—转轴每分钟的转数
8		离心摆（转轴中心线在振动体的运动平面中）	$\omega_n=\frac{\pi n}{30}\sqrt{\frac{l+r}{l}}$ 式中　n—转轴每分钟的转数
9		圆盘及其轴在弧面上摆动	$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{(R-r)(1+\rho^2/r^2)}}$

（续）

序号	简　图	说　明	固有频率 ω_n
10		圆柱体在弧面上摆动	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{2g}{3\,(R-r)}}$
11		球在弧面上摆动	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{5g}{7\,(R-r)}}$
12		二重摆	$\omega_n^2=\dfrac{m_1+m_2}{2m_1}\left[\omega_1^2+\omega_2^2\mp\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4\omega_1^2\omega_2^2\dfrac{m_2}{m_1+m_2}}\right]$ 式中　$\omega_1^2=\dfrac{g}{l_1}$，$\omega_2^2=\dfrac{g}{l_2}$
13		二联合单摆	$\omega_{n1}^2=\dfrac{g}{l}$ $\omega_{n2}^2=\dfrac{g}{l}+\dfrac{2Ka^2}{ml^2}$
14		两端固定，内受张力的弦	$\omega_n=\dfrac{n}{l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho_l}}$ $n=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi\cdots$
15		质量位于受张力的弦上	$\omega_n=\sqrt{\dfrac{T\,(a+b)}{mab}}$ 若计及弦的质量　m_s $\omega_n=\sqrt{\dfrac{3T\,(a+b)}{(3m+m_s)\,ab}}$
16		两质量位于受张力的弦上	$\omega_n^2=\dfrac{T}{2}\left[\dfrac{l_1+l_2}{m_1l_1l_2}+\dfrac{l_2+l_3}{m_2l_2l_3}\mp\sqrt{\left(\dfrac{l_1+l_2}{m_1l_1l_2}-\dfrac{l_2+l_3}{m_2l_2l_3}\right)^2+\dfrac{4}{m_1m_2l_2^2}}\right]$

（续）

序号	简　　图	说　明	固有频率 ω_n
17		一水平杆被两根对称的弦吊着的系统	$\omega_n=\sqrt{\frac{gab}{\rho^2h}}$ ρ—杆的回转半径
18		一水平板被三根等长的平行弦吊着的系统	$\omega_n=\sqrt{\frac{ga^2}{\rho^2h}}$ ρ—板的回转半径
说明	m—振动体的质量（kg）　K—弹簧的刚度（N/m）　T—弦受的张力（N）　g—重力加速度（m/s²）　ρ_l—弦单位长度的质量（kg/m）　ρ—振动体的回转半径（m）		

6.1-6。

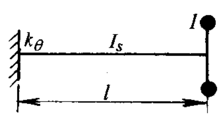
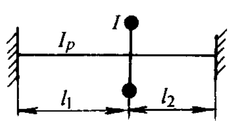
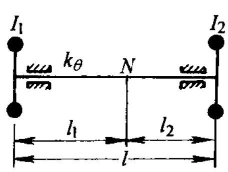
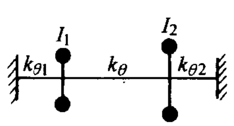
圆轴的扭转刚度 $k_\theta=\frac{G\pi d^4}{32l}$

式中　G——切变模量（Pa）；

d——轴的直径（m）；

l——轴的长度（m）。

表 6.1-6　轴系扭转振动的固有频率

序号	简　　图	说　明	固有频率 ω_n
1		一端固定一端有圆盘的轴系	$\omega_n=\sqrt{\frac{k_\theta}{I}}$ 若计及轴的转动惯量 I_s $\omega_n=\sqrt{\frac{3k_\theta}{3I+I_s}}$
2		两端固定中间有圆盘的轴系	$\omega_n=\sqrt{\frac{GI_p\ (l_1+l_2)}{Il_1l_2}}$
3		两端有圆盘的轴系	$\omega_n=\sqrt{\frac{k_\theta\ (I_1+I_2)}{I_1I_2}}$ 节点 N 的位置：$l_1=\frac{I_2}{I_1+I_2}l$，$l_2=\frac{I_1}{I_1+I_2}l$
4		三轴段两圆盘的系统	$\omega_n^2=\frac{1}{2}\ (\omega_{11}^2+\omega_{22}^2)\ \mp\frac{1}{2}\ \sqrt{(\omega_{11}^2-\omega_{22}^2)^2+4\omega_{12}^4}$ 式中　$\omega_{11}^2=\frac{k_{\theta1}+k_\theta}{I_1}$，$\omega_{22}^2=\frac{k_{\theta2}+k_\theta}{I_2}$，$\omega_{12}^2=\frac{k_\theta}{\sqrt{I_1I_2}}$

（续）

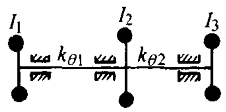
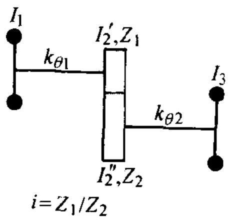
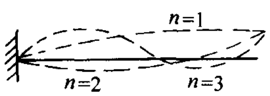
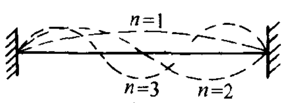
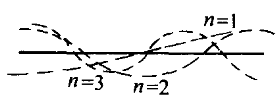
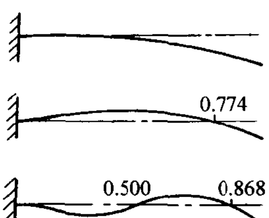
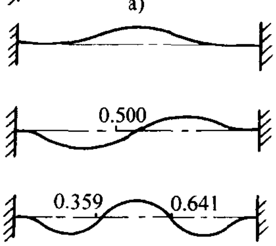
序号	简　图	说　明	固有频率 ω_n
5		两轴段三圆盘的系统	$\omega_n^2=\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)$ $\mp\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)^2-4\omega_1^2\omega_3^2\frac{I_1+I_2+I_3}{I_2}}$ 式中 $\omega_1^2=\frac{k_{\theta1}}{I_1}$，$\omega_2^2=\frac{k_{\theta1}+k_{\theta2}}{I_2}$，$\omega_3^2=\frac{k_{\theta2}}{I_3}$
6		两端有圆盘，轴与轴之间有齿轮联接的系统	将以下参数经过如下变换，利用上列公式，即可求出本系统的 ω_n $I_2\to I_2'+i^2I_2''$，$I_3\to i^2I_3$，$k_{\theta2}\to i^2k_{\theta2}$ 若不计及齿轮的质量 $\omega_n^2=\frac{k_{\theta1}k_{\theta2}\ (I_1+i^2I_3)}{I_1I_3\ (i^2k_{\theta2}+k_{\theta1})}$
说明	k_θ—扭转刚度（N·m/rad）　I—转动惯量（kg·m²）　I_p—极惯性矩（m⁴）　G—切变模量（Pa）		

表 6.1-7　杆、梁类的固有频率

序号	简　图	说　明	固有频率 ω_n
1	 a)  b)  c)	等截面杆，梁类的纵向与扭转振动	纵向振动 $\omega_n=\frac{a_n}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho_V}}$　扭转振动 $\omega_n=\frac{a_n}{l}\sqrt{\frac{G}{\rho_V}}$ 式中　a_n—振型常数 a）一端固定，一端自由 $a_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \cdots$ b）两端固定 $a_n=n\pi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi\cdots$ c）两端自由 $a_n=n\pi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi\cdots$
2	 a)  b)	等截面杆、梁类的横向振动	$\omega_n=\frac{\alpha_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI_a}{\rho_l}}$ 式中　α_n—振型常数 a）一端固定，一端自由，α_n 由下式求得 $1+\cosh\alpha\cdot\cos\alpha=0$ $\alpha_1=1.875,\ \alpha_2=4.694,\ \alpha_3=7.855\cdots$ b）两端固定，α_n 由下式求得 $1-\cosh\alpha\cdot\cos\alpha=0$ $\alpha_1=4.730,\ \alpha_2=7.853,\ \alpha_3=10.996\cdots$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com