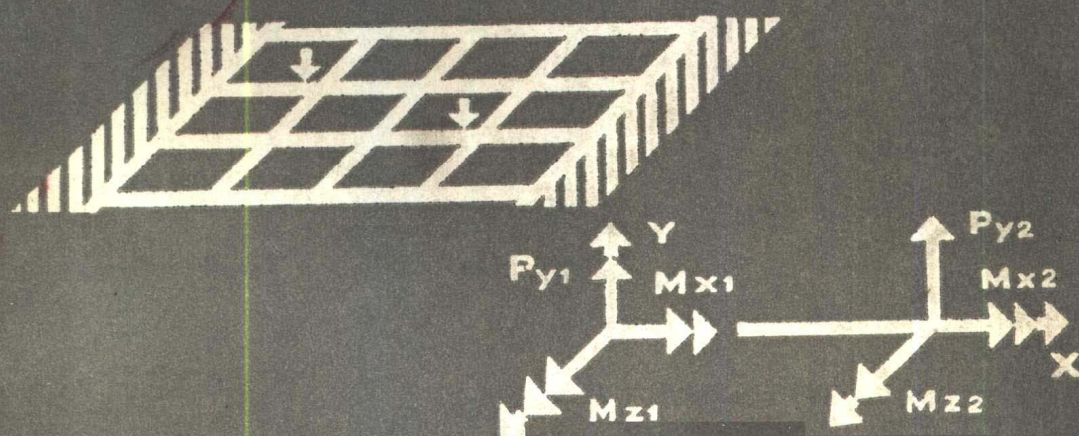


J·D·陶德 著 卞松德 译

结构理论与分析

STRUCTURAL THEORY
AND ANALYSIS



上海科学技术出版社

结构理论与分析

[英] J. D. 陶 德著

卞松德译

何福照校

上海科学技术出版社

结构理论与分析

【英】J. D. 陶 德著

卞松德译

何福照校

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 15.25 字数 365,000

1982 年 2 月第 1 版 1982 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1—13,300

统一书号: 15119·2166 定价: (科五) 1.75 元

内 容 简 介

本书为英国牛津大学的结构理论教材,是目前较为优秀的一本结构力学著作。全书内容分 11 章,阐述了静定结构超静定结构在外载作用下内力、弹性变形、塑性变形的理论和计算方法,同时研讨了梁、刚架的塑性分析方法和柱的稳定性等专题。各章后面附有习题。为了便于读者自学,书末录有供进一步阅读的文献目录和各章习题解答。本书特点是取材新颖、叙述精炼,能不拘一格地提出问题 and 解决问题。

读者对象:主要为从事工程力学、土木建筑、机械制造专业的技术人员、教师和大专学生。

译者序

本书是根据世界著名学府——英国牛津大学的名为“Structural Theory and Analysis”一书译出的。

本书作为结构理论的基础教材也十分适合于我国高等院校的学生阅读。这是因为具有丰富教学经验的陶德教授所著的这本书是专为学生而精心编写的。本书既精辟地分析了基本结构理论,又出色地研究了结构计算的新理论。

本书思路新颖,能够不拘一格地提出问题和解决问题。一些在习惯上被大家认为是必须依据实验才能得出的结论,在本书内却直接从理论分析推导出来了。例如,关于梁的弯曲理论的基本假设就是如此处理的。本书对于读者有浓厚兴趣的能量法和结构矩阵分析也进行了详细的论述。在第六章有用余能理论来分析结构的实际例子。在第八章,作者独具一格地把各类结构的矩阵分析,通过一空间结构杆件的刚度矩阵巧妙地贯通起来。突出地显示了运用电子计算机进行结构计算的优越性。在第十章的柱的稳定课题中,作者用各种方法研究了压杆的稳定问题,其中有些新方法是特别引人入胜的。

由于本书体系严密,因此读者在阅读时应注意前后的连贯性。例如在第五章所论述的第一弯矩面积定理和第二弯矩面积定理,都是后续各章的分析超静定结构的理论基础之一。当然,这是和国内同类教材的思路很不相同的。

在阅读第八章时,假如读者遇到矩阵知识方面的困难,那就可通过边阅读该章内容,边参考数学书的办法来自行克服。

一些院校的教学实践表明,该书内容很受广大学生的欢迎。该书也是从事教学、生产、设计和科研的力学工作者的有益参考书。

在译校以及使用原书的过程中,对原书一些个别错漏之处作了订正。为了使本书前后用词统一,作了一些正名定词工作,如将原书的“柔度系数”定名为“柔度”,“刚度系数”定名为“刚度”。还有一些名词也均按国内习惯称呼译出。又为了使读者能一目了然地看清本书内容和结构,对原书目录章节标题也作了较多的修改。限于水平,译文中难免还有不妥之处,欢迎读者批评指正。

全书译校工作曾得到空军工程学院力学教研室许多同志的大力支持。此项工作还得到清华大学龙驭球教授、西安冶金建筑学院鍾朋教授的关怀和指导。尤其是,西安公路学院何福照教授在百忙中全面细致地审校了本书译文,并对译文的定稿工作给予了宝贵的具体指导。对此,本人表示衷心的感谢。

译者

序 言

本书主要为高等院校本科学生所撰写,而这篇序言,我想应在启发读者了解本书的内容以及撰写的动机方面有所帮助。本人对学生是否阅读一本书的序言部分一直有所怀疑,因为他极有可能在教师的指示下只攻读某一专门的章节,也许他仅对例题演算的数量更有兴趣,或者对该书的难易程度更为关注。不管怎样,本人还是想作以下几点说明。

多年来,我从事结构和弹性理论两方面的讲学和教授工作,而且有幸曾以导师制的方式指导过几批学生。这就有助于使我发现现有课本有关结构理论方面的难点或不够完善的地方。我亦充分意识到一年年不断培养学生过程中所暴露的基本弱点。我希望我也许能消除其中的某些困难,并指出它们的共同症结。

本书拟作为高等院校学生在结构理论方面的基础教材。但是,仅仅一本书是不可能包括该课程各种不同深度所需要的全部材料的。因此,在课程的最后一年,无疑地需要更加专业化的课本。本书前两章研究静定结构,对此专题必须牢固地掌握和领会,因为它是结构理论的基础之一,另一个主要的基础是弹性理论。所以不可能撰写出一本只包含结构理论而不引用某些弹性原理的教科书来。在第三章,我试图纳入所有的基本弹性理论,但是我没有从数学方面作较多的详细论述。本书前后尽量采用统一的符号。

结构理论施教的重点近几年一直在变化,特别是计算机被广泛运用以来。然而,对于基本结构理论仍然需要有真正的理解。第六章介绍了刚度和柔度的基本概念,同时也包括了解超静定结构时和确定位移时运用功和能量法的例子。另有单独一章包含了弯矩分配和转角位移法——这些仍然是结构分析的重要方法,如果一个结构不太复杂,它们就能迅速提供解答。第八章需要矩阵方面的知识。这一内容可确认为工科学生数学课目中的必修课。这一章讨论了刚度和柔度方法,虽然这方面常有专著论述,我还是努力从纯杆件的思路出发在该章中提供充足的资料。读者在初学时可能不易消化,但他们可以从前面几章中获得充分的基本知识,再稍加坚持,必能入门掌握。尤其是,其中有些例题是既用刚度法又用柔度法加以详尽演算的。

最后三章讨论的专题,我相信是一本基础课本应当加以讨论的。但遗憾的是,在讨论稳定问题的同时,不可能包括单根压杆情况以外的更多的问题。最后一章中,我希望能在塑性破坏方面作一适当的介绍,以便使这方面较专业化的文章读起来容易些。

求任一数值值时所使用的的是国际标准制单位。每一章后列有要解的习题,其中一部分,经牛津克拉林顿出版社许可,选自牛津大学试卷,但对它们的答案,则由本人负完全责任。

在此类性质的教科书中,当然不能列入原始材料,但对多年来帮助我构成本题材概念的各种不同材料的提供者,本人在此谨表感谢之意。

J. D. 陶德

1974年于牛津大学

目 录

第一章 平面静力学

1.1 引言	1
1.2 平衡方程	1
1.3 支座、反作用力和分离体图	2
1.4 稳定性和反力的确定	3
1.5 反力的计算	4
1.6 条件方程	6
1.7 虚功原理	6
1.8 剪力和弯矩	7
1.9 荷载、剪力和弯矩之间的关系	10
1.10 迭加原理	11
1.11 力多边形	13
1.12 索多边形	14
1.13 反力图解法	15
1.14 弯矩图解法	15
1.15 三铰拱的图解法	17
1.16 垂直荷载索多边形的微分方程	18
1.17 影响线概述	19
1.18 反力、剪力和弯矩的影响线	19
1.19 单个移动荷载作用下影响线的应用	20
1.20 用虚功原理求作影响线的方法	21
1.21 多个移动荷载作用下影响线的应用	23
1.22 结点荷载下的影响线	26
1.23 三铰拱的影响线	26

第二章 静定结构

2.1 简单平面桁架	29
2.2 稳定性的判别式	29
2.3 结点法	31
2.4 图解法	32
2.5 截面法	33
2.6 联合桁架	34
2.7 复杂桁架	35
2.8 虚功法	35
2.9 静定空间结构	37

2.10 轴力系数法	37
2.11 刚架	39
2.12 静定桁架的影响线	42

第三章 弹性、塑性和梁的弯曲的基本原理

3.1 符号规则	48
3.2 应力	48
3.3 应变	50
3.4 应力和应变之间的关系	51
3.5 轴向拉伸或压缩的组合杆	53
3.6 平面主应力	54
3.7 应力莫尔圆	56
3.8 平面主应变	57
3.9 应变莫尔圆	59
3.10 弹性模量之间的关系	61
3.11 应变能	63
3.12 梁的纯弯曲	64
3.13 组合梁的弯曲	67
3.14 非对称截面梁的弯曲	68
3.15 弯曲应变能	70
3.16 弯曲和轴力的组合	71
3.17 梁的塑性弯曲	72
3.18 塑性弯曲和轴力的组合	75

第四章 扭转与剪切的影响

4.1 圆形横截面的扭转	78
4.2 扭转应变能	80
4.3 扭转、弯曲和轴力的组合	80
4.4 圆杆的塑性扭转	81
4.5 梁的剪应力	82
4.6 翼缘内的剪应力分布	85
4.7 剪力中心	86
4.8 薄壁筒横截面的扭转	87
4.9 矩形薄壁横截面的扭转	88

第五章 梁的变形

5.1 引言	91
5.2 直接积分法	91
5.3 马可梨法	93
5.4 弯矩面积法	96

5.5 查表法	99
5.6 剪力引起的挠度	100

第六章 虚功法和能量法

6.1 引言	103
6.2 应变能和余能	103
6.3 柔度	104
6.4 麦克思威尔互等定理	105
6.5 柔度法基本概念	107
6.6 运动不定度	108
6.7 刚度法基本概念	109
6.8 实功法	111
6.9 虚功法	112
6.10 静定结构的虚功法计算	113
6.11 能量法和静定结构的能量法计算	116
6.12 维立奥脱-莫尔位移图	121
6.13 超静定桁架的虚功法计算	124
6.14 恩格塞的相容性理论	126
6.15 多次超静定桁架的能量法和虚功法计算	128
6.16 桁架梁的能量法计算	129
6.17 刚架的能量法和虚功法计算	131
6.18 环和拱的能量法和虚功法计算	133
6.19 超静定桁架的刚度法计算	136

第七章 弯矩分配法和转角位移法

7.1 弯矩分配法	140
7.2 符号规则	140
7.3 旋转刚度和传递系数	141
7.4 分配系数	142
7.5 固端弯矩	142
7.6 例题	144
7.7 修正旋转刚度	145
7.8 支座位移与侧移	149
7.9 有斜杆的刚架	153
7.10 矩形多层刚架	154
7.11 转角位移法	155

第八章 刚度法和柔度法

8.1 引言	159
8.2 刚度法概述	159

8.3	一空间结构杆件的刚度矩阵	160
8.4	铰接平面桁架的刚度法计算	162
8.5	铰接超静定桁架的刚度法计算实例	165
8.6	空间桁架的刚度法计算	170
8.7	连续梁的刚度法计算	171
8.8	平面刚架的刚度法计算	174
8.9	格排结构的刚度法计算	178
8.10	特殊情况刚度法计算	179
8.11	柔度法概述	179
8.12	杆件的柔度矩阵	181
8.13	铰接超静定桁架的柔度法计算实例	182
8.14	平面刚架的柔度法计算实例	183
8.15	刚度法与柔度法的选择	190
第九章 超静定梁的影响线		
9.1	两跨连续梁的影响线	192
9.2	贝帝互等定理	193
9.3	应用贝帝定理作影响线的方法	194
9.4	多跨连续梁的影响线	196
第十章 柱的稳定性分析		
10.1	引言	199
10.2	欧拉临界荷载	200
10.3	有初始变形的压杆	202
10.4	理想弹塑性压杆	203
10.5	双模量理论	204
10.6	切线模量理论	206
10.7	实用压杆公式	206
10.8	压杆临界荷载的苏斯威尔法实验	207
10.9	压杆临界荷载的能量法计算	209
第十一章 梁和刚架的塑性分析		
11.1	引言	212
11.2	超静定梁的破坏	212
11.3	荷载系数	215
11.4	结构破坏的条件及基本定理	216
11.5	图解法	216
11.6	虚功法	219
11.7	联合机构法	222
推荐文献		229
习题答案		229

第一章 平面静力学

1.1 引言

首先我们需要对结构一词下一定义。读者可能已具有桥、水坝或大建筑物的轮廓了;毫无疑问它们之中的任何一个都属于结构的范畴。但是,它们都严格地限制着具有更广泛含义的结构一词的使用。一辆汽车、一架飞机、一只牛奶箱或你正坐着的椅子都是结构。它们都是为了承受某种形式的外载而设计的,并且最重要的是,当荷载作用时,在大多数情况下仅有小量的变形。所有的工程结构物或结构构件都承受外力或荷载,这些荷载将引起其它的外力即结构的支座反力。以椅子为例:它是为了承受由你本身重量所提供的外荷载而设计的;力通过椅子的各部分传递,并在椅子的下端受到反作用力。当飞机水平飞行时,在机翼上必然作用着垂直反作用力,以作为和飞机重量相平衡的升力。机翼的结构是如此设计的以致于它的升力能可靠地传递到机身上去。

某些类型的结构如水坝,它依靠自身的大部分的重量来抵抗施加荷载;本书不打算对这种类型的结构进行研究。如果一个结构是静止的或是匀速运动的,那么全部施加荷载和反作用力的合力将为零,这种结构是平衡的。但是,假如速度不是常数,那么除了考虑作用力以外,还必须考虑惯性力。本书只讨论静力平衡的结构。通常我们必须将一个结构进行简化和抽象,以便于获得一个显示单根杆件受力概念的较好的理论解答。在推算出杆件所受的力以后,我们就能依次进行每根杆件的设计了。

作用在结构上的荷载可分为两大类,即恒载与活载。恒载仅取决于结构自身的重量,并且可把它计算得相当准确。活载可起因于种种情况并且常常只能估算。如移动荷载、风载、雪载、冲击荷载以及地震引起的振动等都是活载的例子。此外,结构各杆件由于几何尺寸的改变、支座移动和温度变化也会使其受力发生变化。

1.2 平衡方程

当所有力的合力和对一点的合力矩等于零时,该力系成平衡。对于具有相互垂直的 x 、 y 和 z 轴的三维系统来说,平衡力系必须满足六个条件。这六个条件可用数学式子表示如下:

$$\sum P_x = \sum P_y = \sum P_z = 0 \quad (1-1)$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0 \quad (1-2)$$

式中 P_x 是任一力在 x 方向的分力, M_x 是 P 力对 x 轴的力矩。

这些方程式可以用矢量表示为

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = 0 \quad (1-3)$$

$$\mathbf{M}_R = M_{Rx} \mathbf{i} + M_{Ry} \mathbf{j} + M_{Rz} \mathbf{k} = 0 \quad (1-4)$$

式中 $\mathbf{R}$ 是力系的合力而 $\mathbf{M}_R$ 是合力矩。

显然 $R_x = \sum P_x$, $M_{Rx} = \sum M_x$ 等等。

事实上不一定需要垂直的坐标轴。对于力的总和来说可以选用任意3个坐标轴,对于力矩的总和来说也可以选用任意3个坐标轴,当然对于三个平行坐标轴的情况将除外。

假如力系是同一平面的,也即 $P_x=0$, $M_x=M_y=0$, 这种力系就只有3个平衡条件

$$\sum P_x = \sum P_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\sum M_x = 0 \quad (1-6)$$

平面力系所出现的几种特殊情况:

- (1) 假如仅有2个力作用在一个平衡物体上,那么这两个力一定大小相等方向相反。
- (2) 假如仅有3个力作用在一个平衡物体上,那么这三个力必然相交于一点。
- (3) 一组不平衡的平面力系可化为一个合力和合力矩。

1.3 支座、反作用力和分离体图

施加于结构上的荷载必然通过结构的各部分传到若干指定的点或支座上。在这些点上或支座上的合力和合力矩称反作用力。支座可分为3种不同的类型——滚动的、铰接的和固定的。必须着重指出,这些全是理想的支座条件,即在滚动或铰接支座中没有摩擦;而在固定支座中没有移动和转动。实际条件也许与理想条件出入很大。

图1-1a的简支梁上有一斜力 P 作用着。在 A 端有一个滚动支座——这就允许发生完全自由的转动或水平移动——因此 A 端仅有一个垂直反作用力。 B 端有一个铰支座,因此在 B 点的水平和垂直位移被阻止了,但允许发生自由转动。 B 端的反作用力和铅垂方向倾斜一个角度,但可以分解为两个分力,一个是水平的,另一个是垂直的。

假如现在画线为梁并施加同样的反作用力(图1-1b),我们就有了一个所谓的分离体图。 V_A 和 V_B 分别代表 A 端和 B 端反力的垂直分力, H_B 代表 B 端反力的水平分力。但是 V_B 和 H_B 可以合起来,并由单一的倾斜反力 R_B 来代替。水平反力 H_A 也可标在图上,但是其数值显然为零。

可以说画结构分离体图这一步骤总是需要的。注意必须紧接着将所有施加荷载和反力标在图上。

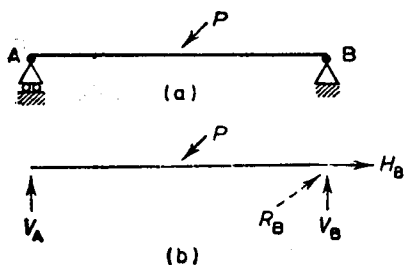


图 1-1

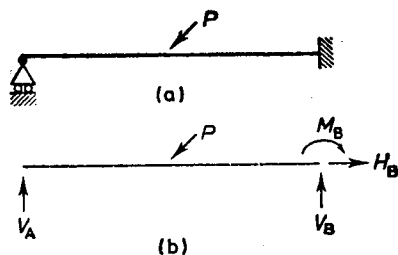


图 1-2

在图1-2a,展示了一根在 B 端有一固定支座的同一根梁,这种支座通常称为固定端或插入端支座。除了垂直和水平反力分量 V_B 和 H_B 以外,在 B 端还需加上另一弯矩 M_B ,如果支座是固定的,那么弯矩将阻止任何可能发生的转动。分离体图示于图1-2b。

1.4 稳定性和反力的确定

如果我们考虑一个作用着已知荷载的平面系统,那么分离体图能展示出所有的未知反力。对于静定平衡系统来说,有3个平衡条件可应用,并依据未知反力可导致三个方程式。然后再联立求解这些方程式。一般说来,一个完整的解答限制在3个未知数,如果未知数比3个独立反力的未知数少,那么就没有足够的未知数来满足三个方程式,这样的系统是不平衡的。因此,就外部支座来说,它被称为静力不稳定的。

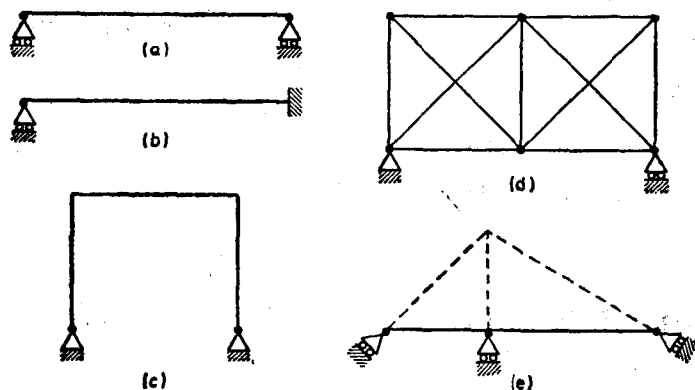


图 1-3

如果未知数多于三个,那么方程式不能完全解出,该系统就是静不定的或超静定的。例如,设有5个未知力,其中2个力的数值可任意指定,那么剩下的3个可从平衡方程式找到,并且它们完全随先前所选择的两个反力的数值而定。这并不意味着超静定系统是不可解的,这个名称含有超静定系统不能单靠静力平衡条件来解的意思。还需要关于荷载作用下系统变形方式的附加知识。这类结构通常称为超静定结构,它的解法将在稍后讨论。

图1-3展示了各种结构的一些例子。梁a只有2个垂直的未知反力,因此是不稳定系统。梁b有4个未知反力,一个在左端,3个在右端,因此该梁是一次超静定结构,即比静力解多了一个未知反力。门型刚架c也是一次超静定结构,因为在每个支座上有一个垂直和水平反力。桁架d对反力来说是静定结构,但是就构件的内力来说,它是超静定结构,这种结构会在后面碰到。应注意在各种情况下,静定方程总是与施加于系统上的荷载无关的。回到系统a:假如垂直外力施加于梁上,那么在每个支座上仅引起反力的垂直分力,图示的支座系统是完全能支撑这些荷载的,因此系统是稳定的。然而,倘如施加一个水平力,不管它是多么小,不稳定就发生了。可以看出,稳定的和确定的反力方程必须独立于作用在结构上的实际荷载。假如受到小量横向风载的作用时结构就破坏了,那么这种只能抵抗垂直荷载的结构实际上是不设计的。在图e中,由虚线所示的三个支座作用线都通过一点。任一作用在梁上的荷载系统都绕此交点产生力矩,并且此力矩不能由反力来抗衡;因此梁将绕交点旋转。根据这一事实,一般地说,反力必须能够抵抗施加于结构的任何小量的位移和旋转。在某些情况下,未知反力的数字还能通过所谓的条件方程来减少,这种情况将接着在1.6节所示例题中详细讨论。

1.5 反力的计算

反力的计算也许用一、两个例子就能很好说明了,但是在处理特定的情况之前,我们应当考虑可以施加的各种荷载型式。一个集中荷载被假定为作用在一点上,实际上这是不可能的,因为直接在荷载作用点上,杆件应力必然为无穷大。实际上材料在荷载作用下会变形,同时荷载将因此会在小面积上分布从而使集中应力减少。但是,就计算的目的而言,假定荷载作用在一点上是足够精确的。另一个很普遍的荷载形式叫做均匀分布荷载($U.D.L$),正如这一名称所提示的,沿着杆件表面每单位长度或单位面积上的分布值是一个常数。

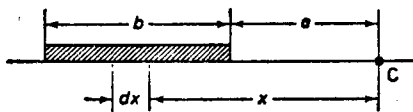


图 1-4

假定每单位长度上的荷载为 p 、求作用在长度 b 上的均布荷载对 O 点的力矩,见图 1-4。考虑距离 O 点为 x 的荷载元素 dx 。此“集中”荷载对 O 点的力矩为 $px dx$ 。总弯矩通过下式积分求出

$$M_o = \int_a^{a+b} px dx = pb \left(a + \frac{b}{2} \right) \quad (1-7)$$

从方程 1-7 可清楚看到,力矩也可以由作用在中点的大小等于总值的集中荷载来代替均布荷载得到。如果荷载不是均匀分布的而是 x 的函数,那么弯矩亦能用类似的方法求得。这样的分布荷载能用作用在荷载系统中点的数值等于荷载总值的集中荷载来代替。

作为数字例子,我们来考虑图 1-5a 的一根梁,首先取分离体图如图 1-5b,由水平方向判断可看出 H_A 为零。

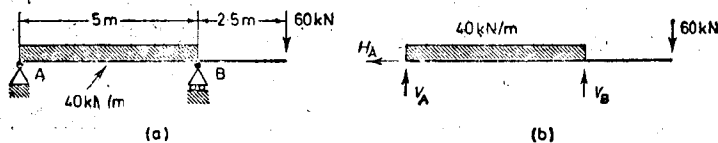


图 1-5

整个系统对 A 点取矩

$$(40 \times 5 \times 2.5) + 60(5 + 2.5) = 5V_B$$

$$V_B = 190 \text{ kN}$$

竖向分析

$$V_A + V_B = 200 + 60$$

故

$$V_A = 70 \text{ kN}$$

常常可通过对另一些适当的点的取矩演算得到核对,例如 $\sum M_B$ 。

$$(60 \times 2.5) = (40 \times 5 \times 2.5) - 5V_A$$

故

$$V_A = 70 \text{ kN}$$

最后这一方程是与对 B 点的弯矩值的总和为零是等效的。只要在 B 点没有施力矩,该值就是正确值。

在图 1-6a 中,一梁通过三个支座, AD 和 DO 以铰相连接。由分离体图(图 1-6b)看来,这似乎象超静定问题,因为这里有四个未知反力。然而在 D 点有一个铰,这里的弯矩等于零,因此我们就有了一个附加条件,这就是所谓的条件方程。

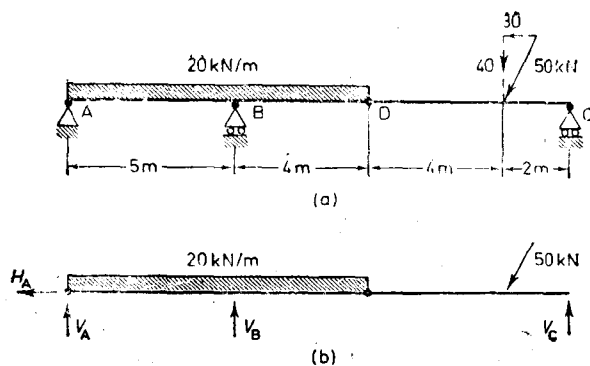


图 1-6

解出水平力

$$H_A = -30 \text{ kN}$$

负号表示 H_A 和图中所假定的方向相反。

考虑 DC 部分, 由 $\sum M_D$ 得

$$6V_C = 40 \times 4$$

因此

$$V_C = 26.7 \text{ kN}$$

注意当对铰取矩时, 只包括 DC 梁上的力的弯矩。

$$\text{由 } \sum M_A \text{ 得 } (20 \times 9^2)/2 + (40 \times 13) = 5V_B + (26.7 \times 15)$$

$$V_B = 186 \text{ kN}$$

解出垂直力

$$V_A = 220 - 26.7 - 186 = 7.3 \text{ kN}$$

上述值可以通过对 B 点取矩来校核。

使用条件方程的另一个例子是三铰刚架(图 1-7a) E 点的弯矩等于零, 因此对 ECD 部分, 由 $\sum M_E$ 得

$$6H_D = 3V_D$$

对 ABE 部分, 由 $\sum M_E$ 得

$$3V_A = 4H_A + (30 \times 1)$$

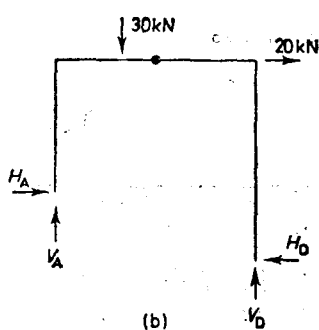
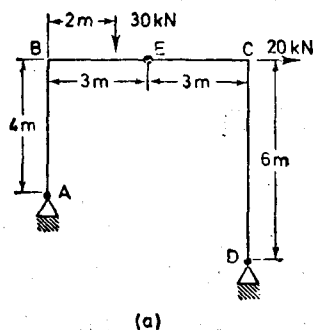


图 1-7

垂直分析

$$V_A + V_D = 30$$

水平分析

$$H_A + 20 = H_D$$

这样就有了包含 4 个未知数的 4 个方程。解方程组我们就得到

$$V_A = 2 \text{ kN} \quad V_D = 28 \text{ kN}$$

$$H_A = -6 \text{ kN} \quad H_D = 14 \text{ kN}$$

H_A 的负号表示 H_A 的作用方向和图 1-7b 所示的方向相反。

1.6 条件方程

条件方程在上节某些问题的计算中已经采用了。可以看出,条件方程能减少结构的超静定次数。

图 1-8a 所示的对称拱在两端是固定的,且受到对称荷载 P 的作用。从图 1-8b 的分离体图看出,它有六个未知反力。显然,该拱为三次超静定。但是,假如运用对称性,就有 $H_A = H_B$, $M_A = M_B$ 及 $V_A = V_B$ 。通过竖向分析可以证明, V_A 和 V_B 均等于 P 。因此该拱仅为二次超静定。图 1-9a 所示的梁有两个相等的跨度且荷载是对称的。由图 1-9b 的分离体可以看出,此问题为一次超静定。但是有一个 $V_A = V_C$ 的条件方程,它使所讨论的问题可视为静定的。然而这个条件方程在这种情况下并不减少超静定次数,整个条件方程表示对中点的弯矩的总和为零——这当然是所期望的,因为在中间支座上没有外施加力矩。

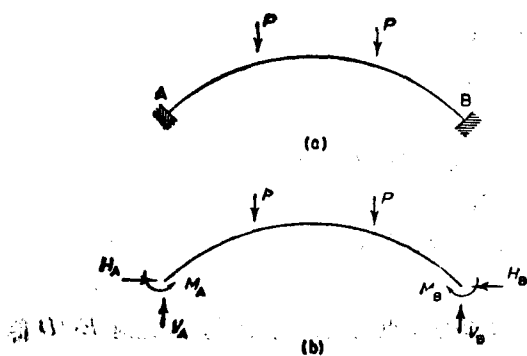


图 1-8

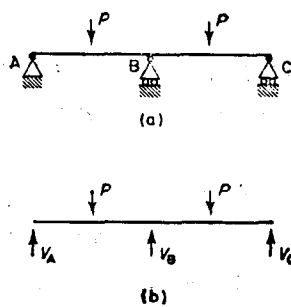


图 1-9

必须强调的是,一般说来这种类型的条件方程必须在荷载和结构都完全对称的情况下才能使用。在所给的例子里,梁的两部分都有一样的长度,一样的横截面并由一样的材料做成,因而是完全对称的。

1.7 虚功原理

这是一个非常重要的原理,它在结构工程方面有许多重要的应用。

假如一个力在某一方向上引起一位移,那么力和该位移的乘积即为该力所做的功,也就是说,只有当力和位移在同一方向时才做功。因此必须取位移在力的方向上的分解部分。现在考虑作用着若干力 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的一质点。这些力是同时作用的且有合力 P_R 。假定质点在某一方向上移动微段距离 Δ 。如果力的大小是不变化的,那么所做的功为

$$P_1 \cdot \Delta + P_2 \cdot \Delta + \dots + P_n \cdot \Delta = P_R \cdot \Delta$$

如果这些力处于平衡状态,那么合力 P_R 为零,因此

$$P_1 \cdot \Delta + P_2 \cdot \Delta + \dots + P_n \cdot \Delta = 0 \quad (1-8)$$

这就是虚功原理,虚功原理是说:如果处于平衡状态的质点在任一方向上有位移,那么作用在质点上的力系所做的总功为零。唯一的必要条件是力系必须在位移中保持不变。力系可以为广义力,即并不非要直线力,还可以是弯矩或扭矩。位移也可以是线位移或角位移。虚

功原理同时可称为虚位移原理, 因为并不非要发生位移不可——它也可以是想象的。实际上我们是在用稍微不同的方式讲述平衡原理。

虚功原理不难从一个质点引伸到一个平衡结构。结构可以认为由许多质点组成, 其中的每一个质点是平衡的——因此虚功原理仍然适用。

现在我们运用这一原理求图 1-6 所示梁的反力 V_B 。重新画出该梁 (图 1-10a)。由于要求 B 点反力, 因此在 B 点的所求反力的方向上, 也就是在垂直方向施加一个虚位移。该梁向上变形, 其位置如图 1-10a 所示, 所有位移都被大大夸大了。当梁绕 A 端、 O 端和铰 D 旋转时 B 移动到 B' 。

假如垂直位移 BB' 是 v , 那么均布荷载的分布中点就垂直移动 $9v/10$, 50 kN 荷载的作用点就垂直移动 $3v/5$ 。

运用虚功原理并注意到只需要 50 kN 荷载的垂直分量, 故

$$-\left(180 \times \frac{9}{10} v\right) - \left(40 \times \frac{3}{5} v\right) + V_B v = 0$$

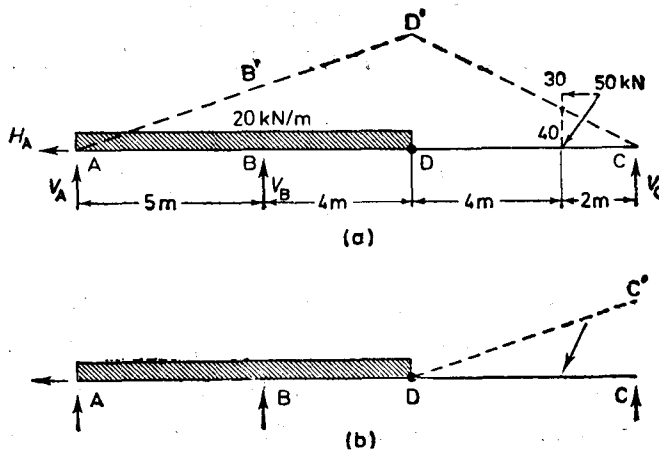


图 1-10

因此 $V_B = 186 \text{ kN}$

因为力的作用方向和位移的方向相反, 所以求得的虚功为负号。

假如要求反力 V_C , 那就在 C 点施加一垂直位移 v_1 。因为梁仍然在 A 、 B 支座上并绕 D 点 (图 1-10b) 转动, 于是虚功方程为

$$-\left(40 \times \frac{2}{3} v_1\right) + V_C v_1 = 0$$

因此 $V_C = 26.7 \text{ kN}$

1.8 剪力和弯矩

结构设计的目的是为了制造一个能够承受特定力系的结构。结构的单根杆件在同时承受轴向、横向荷载、弯矩和扭矩时, 设计起来就十分复杂。

讨论暂时仅限于一根简单直梁。设施加荷载、支座反力均位于包含梁的中心轴的同一平面内。

这种梁示于图 1-11a。假想梁在 xx 处被截开, 于是其分离体图可示于图 1-11b。