# 医药应用高等数学

山东教育出版社

# 医药应用高等数学

周怀梧　主　编

张　馥
邓恒道　副主编

山东教育出版社
一九八五年·济南

## 参 加 编 写 者


| | |
|---|---|
| 南京铁道医学院 | 孙光云　周长洪 |
| 山东医学院 | 张　馥　郭怀兰<br>周凤君　虞孝珍 |
| 南京中医学院 | 周永治 |
| 苏州医学院 | 邓恒道 |
| 上海中医学院 | 贺银华 |
| 哈尔滨医科大学 | 张　仲　张慕良 |
| 第一军医大学 | 白敦衍　陈德真 |
| 第二军医大学 | 薛祉绥 |
| 延边医学院 | 尹锡杰 |
| 山西医学院 | 刘庆欧 |
| 浙江医科大学 | 周怀梧　李乃英 |



**医药应用高等数学**

周怀梧　主　编

张　馥
邓恒道　副主编

*

山东教育出版社出版

（[illegible]）

山东省新华书店发行　山东淄博印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本　30.75印张　700千字

1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

印数 1—20,000

书号 13275·27　定价 5.15 元

# 前　言

近几十年来，各种数学方法在医药科学领域已被日益广泛、深入地应用，并取得了显著的成效。遗传、变异、代谢、免疫、神经活动、药物作用、生物药剂以及生物医学工程等问题的定量研究，打开了遗传学、生物化学、微生物学、生理学、药理学、药剂学及生物物理学研究的新局面；疾病的发生和发展，分布和传播，以及诊断和处理等问题的定量研究，将使病理学、流行病学、诊断学以及临床治疗学发生深刻的变化。现代医药学正在向着数量化、精确化，即数学化的方向迈进，人们有理由期望医药科学将逐步地成为精确的科学。

现代医药学的这种发展趋势，自然对医药人才的数学水准提出了新的要求。高等医药院校的学生很有必要继续学习高等数学，掌握更多的数学工具，努力增强科学抽象和逻辑推理的能力，只有这样，才能适应医药事业发展的需要，才能在社会主义现代化建设中做出较大的贡献。

本书是根据高等医药院校高等数学课的教学需要编写的，可供医学、口腔、卫生、检验、药学、中药等专业和研究生班作教材使用，也可供医药研究人员学习和参考。书中打有“*”号的章节，医学、卫生各专业如受教学时数限制可以不讲；《概率论》一章药学各专业可与数理统计课安排在一起讲授，也可作为数理统计课的教学参考读物；《线性代数》和《偏微分方程》两章，可按实际情况取舍。

编写中我们着重注意下述几点：（1）注意与中学数学教学相衔接。一元函数微分学的一些内容虽在中学已经讲授，我们对某些重点、难点仍作详细叙述，对其余内容则作必要的复习与补充。（2）注意体现“医药应用”的特点，尽力从现代医药研究的需要选编某些新的内容、典型的例题和习题。（3）注意既便于教又便于学，力图贯彻循序渐进、由浅入深、抽象与直观结合、理论联系实际等原则。此外，各节配有习题，章末有必要的附表，书末有习题答案和教学参考书。

贵阳医学院王恩惠、成都中医学院石云锦、西安医学院曹志远、南京医学院黄大贶、上海第一医学院孙伟民、上海第二医学院李建立等老师曾对本书初稿提出许多宝贵意见。王恩惠、石云锦两位老师担任本书的审稿工作，付出了辛勤的劳动。在此，一并表示深切的感谢！

编　者

1984年10月

# 目　录

# 第一章　函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象，而极限法则是其基本研究方法。函数与极限在中学都已学过，这里仅作必要的复习与补充。

## 第一节　函　　数

### 一、函数概念

客观世界中的一切事物都处于运动变化之中，因而无论是研究自然科学还是研究技术科学，都经常与各种变量打交道，比如，自由落体运动的速度随时间而变；人或动物服药后，血液中的药物浓度（简称血药浓度）也随时间而变；皮肤的温度随环境的温度而变；圆面积随半径而变，等等。显然，在同一个问题中出现的几个变量，往往是相互联系，彼此有关的。函数的概念正是在研究种种现实问题变量之间的相互关系中建立起来的。

**定义 1**　设在某个过程中有两个变量$x$和$y$，如果变量$x$在某个范围内任意取定一个数值时，变量$y$按照某种规律总有确定的数值与之对应，则称变量$y$为变量$x$的函数．常记作

$$y=f(x)$$

其中$x$称为自变量，$y$也称为因变量．

如果对于自变量的某一个值$x_0$，函数有确定的对应值，则称函数在$x_0$处有定义，使函数有定义的自变量的取值范围称为函数的定义域。当函数用纯粹的解析表达式给出时，通常认为函数的定义域就是使该表达式有意义的自变量的一切实数值。然而在实际问题中，函数的定义域需根据问题的实际意义来确定。

**例 1**　在自由落体运动中，假定物体开始时距地面的高度为$H$，则路程函数

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

的定义域为：$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2H}{g}}$，其中$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$是物体着地的时刻。

**例 2**　在一次静脉注射给药的情况下，血药浓度（$C$）随时间（$t$）的变化规律常可用下式表示：

$$C=Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}$$

其中$A$、$B$及$\alpha$、$\beta$皆为正的常数，$e$为无理数，其近似值为2.71828……，该函数的定义域为$0\leqslant t<+\infty$。

**例 3** 有人研究环境温度（$T_e$）在19℃至31℃的范围内变化时，皮肤温度（$T_s$）与环境温度之间的依赖关系有如下经验公式：

$$T_s = 32.8 + 0.27(T_e - 20)$$

自然，该经验公式的适用范围，即19℃$\leqslant T_e \leqslant$31℃便是函数$T_s$的定义域。

**例 4** 设函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$，则其定义域为$-1 < x < 1$。

为方便起见，一般用数轴上的区间来表示变量的取值范围，如果$x$的取值范围为$a \leqslant x \leqslant b$，则记为闭区间$[a,b]$，而$a < x < b$则记为开区间$(a,b)$，与此相仿，若$a < x \leqslant b$或$a \leqslant x < b$，则分别记为半开区间$(a,b]$和$[a,b)$。依此，上述四例中各函数的定义域依次为$\left[0, \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$，$[0, +\infty)$，$[19, 31]$及$(-1, 1)$。

除函数的定义域以外，函数概念中另一个基本要素是自变量与因变量之间的对应规律(即函数关系)，这在函数记号中用“$f$”或“$\varphi$”等字母表示，它随具体问题的不同而有不同的具体形式。函数关系可以用解析表达式，也可以用图形或表格来表示。因此，函数的表示法，通常有解析法、图示法和列表法。

当自变量取定义域中的某一个值时，函数的对应值称为当自变量取该值时的函数值。如果自变量在定义域内任意取一个确定值时函数都只有一个确定值与之对应，则称该函数为单值函数，否则称为多值函数。上述四例中的函数都是单值函数，下面是一个多值函数的例子。

**例 5** 以直角坐标系的原点为圆心，半径为$r$的圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2$$

当$x$在闭区间$[-r, r]$上取值时，由上式可确定$y$的一个值（当$x = \pm r$时），或确定$y$的两个值（当$-r < x < r$时）与之对应，所以$y$是$x$的多值函数。

以后如无特别说明，讨论的函数都是指单值函数。

**二、分段函数**

在实际问题的研究中，有时需要在自变量的不同取值范围中用不同的式子表示一个函数。

**例 6** 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{当}x > 0 \\ 0 & \text{当}x = 0 \\ x - 1 & \text{当}x < 0 \end{cases}$$

是确定在区间$(-\infty, +\infty)$上的一个函数（图1—1）。当自变量$x$取开区间$(0, +\infty)$内的数值时，对应的函数值用解析式$y = x + 1$计算，当$x$取开区间$(-\infty, 0)$内的数值时，对应的函数值用解析式$y = x - 1$计算，当$x = 0$时，函数值就是0。

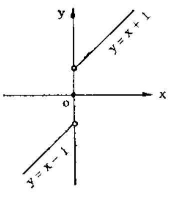


图1—1

在不同的定义区间内，用不同的解析式表示的函数，称为

分段函数。求分段函数的函数值时，要将自变量代入所在区间的解析式计算，在例6中，当$x$分别取2.5，0，－1.3时，相应的函数值为

$$f(2.5)=(x+1)\Big|_{x=2.5}=2.5+1=3.5;$$

$$f(0)=0;$$

$$f(-1.3)=(x-1)\Big|_{x=-1.3}=-1.3-1=-2.3$$

在不同范围内用不同的式子表示一个函数，不仅与函数的定义不矛盾，而且是客观实际的反映，在科学技术中有重要意义。

**例7** 在电子技术中，经常会遇到各种波形，图1—2是三角波形中的一个波形，表示电压$u$随时间$t$的变化规律，根据图中给出的条件，不难求得相应的解析表达式为

$$u=\begin{cases}\frac{3}{2}t & 当\ 0\leqslant t\leqslant 10\\ 30-\frac{3}{2}t & 当 10< t\leqslant 20\end{cases}$$

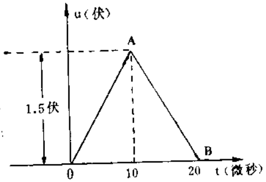


图1—2

**例8** 在正常机体的血液中，胰岛素的量受血糖的影响，为研究血液中胰岛素浓度的变化规律，让一名病人禁食（以便降低其血糖水平），通过注射给以大量的糖。根据实验测得的血液中胰岛素浓度$C(t)$（单位/毫升）随时间$(t)$（分钟）的变化数据，可建立下列经验公式：

$$C(t)=\begin{cases}t(10-t) & 当\ 0\leqslant t\leqslant 5\\ 25\,e^{-k(t-5)} & 当\ 5< t\end{cases}$$

其中$k=\ln 2/20$，而$\ln 2=\log_e 2$，通常把以$e$为底的对数称为自然对数。

### 三、反函数

在研究两个变量之间的依赖关系时，常可根据实际需要选定其中一个为自变量，另一个为因变量。例如，在研究自由落体运动时，若是考虑下落路程$S$随时间$t$的变化规律，则得$S=\frac{1}{2}gt^2$；若已知物体下落的路程$S$，要求下落所需的时间$t$，则可把$S$当作自变量，而时间$t$为因变量，此时$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$。我们称后者为前者的反函数，称前者为直接函数。

**定义2** 设给定$y$是$x$的函数$y=f(x)$，且$y$与$x$之间一一对应，如果把$y$当作自变量，$x$当作函数，则由关系式$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$，称为函数$f(x)$的反函数，而$f(x)$称为直接函数。

由反函数的定义可见，如果$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数，则$y=f(x)$也是$x=\varphi(y)$的反函数，所以$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$互为反函数。例如，$x=\frac{y-b}{a}$是$y=ax+b$的反函

数。当然$y=ax+b$也是$x=\frac{y-b}{a}$的反函数。

习惯上用字母$x$表示自变量，用$y$表示函数，所以$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$往往写成$y=\varphi(x)$。因为函数关系$\varphi$没有发生变化，所以$y=\varphi(x)$与$x=\varphi(y)$表示同一个函数，从图形上看，$y=\varphi(x)$与$x=\varphi(y)$表示的曲线形状一样，只是位置发生了变化，由于$x$与$y$的互换，所以$y=\varphi(x)$与$x=\varphi(y)$的图形对称于直线$y=x$。例如图1—3中，直线Ⅰ是函数$y=\frac{x-b}{a}$的图形，而直线Ⅱ是函数$x=\frac{y-b}{a}$的图形，直线Ⅰ与直线Ⅱ对称于直$y=x$。

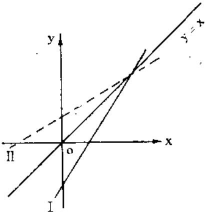


图1—3

## 习 题 1—1

1．求下列函数的定义域：

（1）$y=e^{-2x}+\sqrt{1-x^2}$；

（2）$y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$；

（3）$y=\log_3(\log_3 x)$；

（4）$y=\arcsin(x-2)$。

2．求下列函数值：

（1）$f(x)=\frac{|x-3|}{x+1}$，　求$f(3)$，$f(-3)$，$f(0)$，$f(a^2)$；

（2）$\varphi(x)=2^{x-2}$，　求$\varphi(2)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(\frac{5}{2}\right)$；

（3）$f(x)=x^2-3x+7$，求$f(x+\Delta x)$，$f(x+\Delta x)-f(x)$；

（4）$\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0;\\ 2, & 0\leqslant x<1;\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$　求$\varphi(3)$，$\varphi(0)$，$\varphi(-0.5)$；

（5）$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0;\\ x, & 0\leqslant x<1;\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$　求$f(1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(-3)$。

3．求下列函数的反函数：

（1） $y=\sqrt[3]{x^2+1}$， $(x\geqslant 0)$；

（2） $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

（3） $y=2\sin 3x$；

（4） $y=1+\lg(x+2)$。

## 第二节 初 等 函 数

### 一、基本初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数，中学里已详细学习过，这里不再赘述。为复习和应用的方便，我们将其归纳成下表（见6、7页）

### 二、复合函数

实际问题中会遇到这样一种情况：变量$y$不直接依赖于自变量$x$，而是直接依赖于变量$u$，但$u$依赖于$x$，这样$y$通过$u$而依赖于自变量$x$，成为$x$的函数。

例如，物体上抛时的动能$E$是物体速度$v$的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2=f(v) \tag{1}$$

而物体运动的速度$v$又是时间$t$的函数，即

$$v=v_0-gt=\varphi(t) \tag{2}$$

将（2）式代入（1）式，便得

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2 \tag{3}$$

这时，我们称$E$是$t$的复合函数。

**定义** 如果$y$是$u$的函数：$y=f(u)$，$u$又是$x$的函数：$u=\varphi(x)$，对于$x$在$\varphi(x)$的定义域或其一部分上取值时所对应的$u$值，$y=f(u)$有定义，则称$y=f[\varphi(x)]$是$x$的复合函数，$u$称为中间变量。

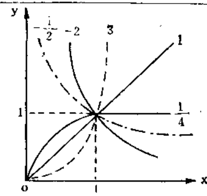
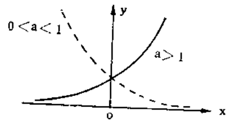
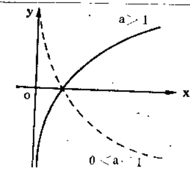
例如，由$y=e^u$，$u=\operatorname{arctg}x$可以复合成函数$y=e^{\operatorname{arctg}x}$。但是，不要认为任何两个函数都可以复合成一个复合函数，例如，$y=\arcsin u$，$u=\sqrt{3+x^2}$就不能复合成$y=\arcsin\sqrt{3+x^2}$。因为$u$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，在此定义域中的任何$x$值所对应的$u$值都大于1，从而使$y=\arcsin u$都没有定义。

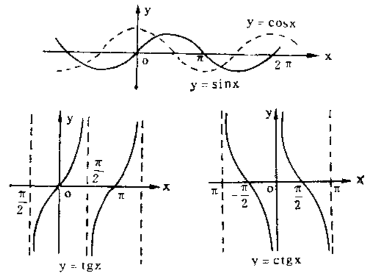
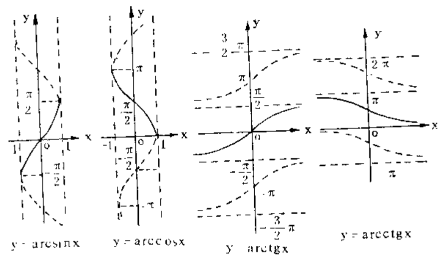
由基本初等函数及常数进行有限次的四则运算（加、减、乘、除）及有限次的函数复合步骤而构成的函数，称为初等函数。今后讨论的函数绝大多数是初等函数，但须指出，分段函数不是初等函数。

### 三、函数尺与曲线的直线化

直线可看成是曲线的一种特殊类型，最易确定，最易研究。因此，在医药学、生物科学及统计学等研究工作中，常采用曲线的直线化法，把按指数规律或其他规律变化的现

# 基 本 初 等 函 数 表

<table>
<tr><th></th><th>类别及解析式</th><th>定义域</th><th>值域</th><th>图形</th></tr>
<tr><td rowspan="2">幂<br>函<br>数<br>$y=x^{\mu}$</td><td>$\mu>0$<br>$\mu$ 次抛物线</td><td>因 $\mu$ 而异，但 $(0, +\infty)$，是公共定义域</td><td>因 $\mu$ 而异，但 $(0, +\infty)$ 是公共值域</td><td rowspan="2">（在第一象限内）</td></tr>
<tr><td>$\mu<0$<br>令 $\mu=-m\ (m>0)$<br>$y=x^{-m}=\frac{1}{x^{m}}$，<br>$m$ 次双曲线</td><td>公共定义域为 $(0, +\infty)$</td><td>公共值域为 $(0, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">指数函数<br>$y=a^{x}\quad a>0,\ a\neq1)$</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td><td>$(0, +\infty)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">对数函数<br>$y=\log_{a}x\ (a>0,\ a\neq1)$</td><td>$(0, +\infty)$</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td><td></td></tr>
</table>

| 类别及解析式 | 定义域 | 值域 | 图形 |
|---|---|---|---|
| 三角函数 | | |  |
| $y=\sin x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $[-1, 1]$ | |
| $y=\cos x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $[-1, 1]$ | |
| $y=\mathrm{tg}\,x$ | $x \neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ | $(-\infty, +\infty)$ | |
| $y=\mathrm{ctg}\,x$ | $x \neq n\pi$<br>$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ | $(-\infty, +\infty)$ | |
| 反三角函数 | | |  |
| $y=\arcsin x$ | $[-1, 1]$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | |
| $y=\arccos x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ | |
| $y=\mathrm{arctg}\,x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | |
| $y=\mathrm{arcctg}\,x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $(0, \pi)$ | |

象，通过坐标变换，化为直线来研究。相反地，有时先将实验数据表示在特定的坐标纸（如对数坐标纸、半对数坐标纸等）上。如各数据点明显地呈一直线排列，便可用相应的函数关系来描述所研究的现象。

怎样把曲线转化为直线呢？让我们考虑一个简单的幂函数

$$y=\frac{1}{2}x^2 \quad (x>0) \tag{4}$$

在普通均匀尺度的直角坐标系上，它的图形如图1—4所示，是一条抛物线。

现在对（4）式两边取对数，得

$$\lg y=2\lg x-0.3010 \tag{5}$$

若记$Y=\lg y$，$X=\lg x$，（5）式可写为

$$Y=2X-0.3010 \tag{6}$$

（6）式显然是一条斜率为2、截距为$-0.3010$的直线方程。可见，如果在纵轴和横轴均用对数尺度的直角坐标系上作图，函数 $y=\frac{1}{2}x^2$的图形便是一条直线，如图1—5所示。

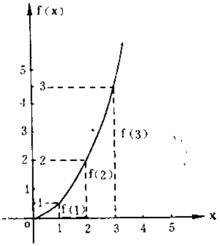


图1—4

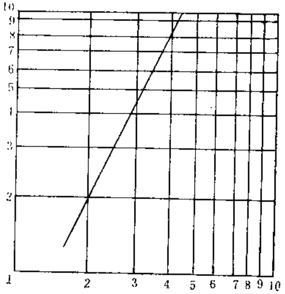


图1—5

对数尺度，说得完整些，称为对数函数尺，可分两步作成：

（1）列出对数函数值表，如下表所示：

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\lg x$ | 0.000 | 0.301 | 0.477 | 0.602 | 0.699 | 0.778 | 0.845 | 0.903 | 0.954 | 1.000 |

（2）作两条平行直线，在其中的一条上划出普通的均匀刻度尺，依次标出上表所列各个$y$值，在另一条上相应地标出各个$x$值，得一非均匀刻度尺，此即对数函数尺（图1—6）。

可见，所谓对数函数尺，实际上就是按对数函数$\lg x$的函数值划出刻度，却标以相

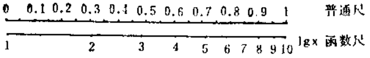



图1—6

应的自变量$x$值的一种非均匀刻度尺。

一般地，如按函数$f(x)$的函数值划出刻度，却标以相应的自变量$x$的值的尺子，称关$f(x)$函数尺。其具体作法，也可仿照上述两步进行。

## 习　题　1—2

1．什么叫复合函数？什么叫初等函数？试举例说明。

2．下列复合函数是怎样复合而成的？试剖析之。

（1）$y=\cos\frac{x^2}{2}$；　　（2）$y=\lg\sin(x+2)$；

（3）$y=e^{x^2}$；　　（4）$y=(1+x^2)^8$；

（5）$y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；　　（6）$y=\arccos\frac{x}{a}$；

（7）$y=\sqrt{\sin^4(x+1)}$。

3．下列函数能否写成$y$关于$x$的复合函数？为什么？

（1）$y=a^u$，　$u=\cos v$，　$v=x^4$；

（2）$y=\sqrt{u}$，　$u=\lg v$，　$v=\frac{1}{x^2+2}$。

4．什么叫做函数尺？试作（1）$y=\sqrt{x}$；（2）$y=\frac{1}{3}x^3$的函数尺。

5．通过适当的变换把下列函数转化为线性函数：

（1）$y=ae^{bx}$；　　（2）$y=a+\frac{b}{x}$；　　（3）$y=\frac{1}{a+be^{-x}}$。

## 第三节　极　　限

### 一、极限的概念

研究函数的极限就是研究在自变量的某个变化过程中，对应的函数值的变化趋势。自变量的变化有各种各样的方式，通常研究这样两种情形：一种是自变量$x$的绝对值$|x|$趋向无穷大，记作$x\to\infty$；另一种是自变量$x$无限趋近某个值$x_0$，记作$x\to x_0$。在这两种情况下，函数极限的定义如下：

**定义1** 如果自变量$x$的绝对值$|x|$无限增大时，函数值$f(x)$无限趋近于一个常数$A$，则称$A$为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当x\to\infty)$$

从几何上看，极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$表示随着$x$的增大，曲线$y=f(x)$越来越接近直线$y=A$，亦即曲线上点的纵坐标$f(x)$到直线$y=A$的距离$|f(x)-A|$趋近于0(图1—7)．极限$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$的几何意义完全相仿，所不同的只是自变量$x$的变化方向相反。

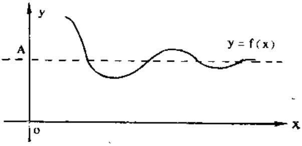



图1—7

**例1** （1）$\lim\limits_{x\to+\infty} 10^{-x}=0$;

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$;

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$。

分别见图1—8，图1—9及图1—10。

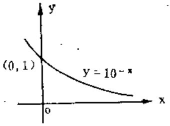



图1—8

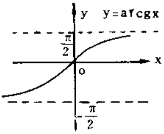



图1—9

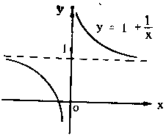



图1—10

**例2** 设$f(x)=\sin x$，当$x\to+\infty$时，$f(x)$在$+1$和$-1$之间不停地往复摆动，所以无极限。

**定义2** 设函数$f(x)$在点$x_0$附近有定义（在$x_0$处可以没有定义），如果当$x$无论以怎样的方式无限趋近$x_0$时，函数值$f(x)$无限趋近于一个常数$A$，则称$A$为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当x\to x_0)$$

由定义2可见：（1）当$x\to x_0$时，如果$f(x)$有极限$A$，则必有$|f(x)-A|\to 0$；