经济应用数学基础之二

线性代数及概率统计

主 编 穆达智
副主编 王天喜 汪心洪 崔秀琨

中国经济出版社

线性代数及概率统计

穆达智等　编

*

中国经济出版社发行

(北京市百万庄子3号)

天津市飞鹰快速印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　9印张　180千字

1989年3月第一版　　1989年3月第一次印刷

印数：1—5000

ISBN 7-5017-0303-5／F·283

定价：4.20元

前　言

随着国家改革开放形势的发展，学习经济和管理知识已成为热潮，企业家和管理干部不懂经济和管理已不能适应工作需要，但无论现代经济学和现代科学管理都需要作定量分析，因此数学便成为必不可少的基本工具，学习数学便成为摆在现代管理者面前的严峻任务。

由于我国十年动乱造成的严重恶果，目前的管理干部基础知识比较薄弱，加以读书无用论的影响，长期没有学习的机会，已有的不多的基础知识也遗忘不少。并且年龄多已超过卅岁，故学习数学便成为他们的一大难题。

目前市场上的数学书，适合普通高校的多，适合经济类成人学习和阅读的少，这更增加了企业家和管理者学习数学的难度。根据这些情况，我们编写了《经济应用数学基础》这套书，试图在这方面提供一些方便，由于作者水平所限，加以长期受苏联教育系统的影响，还不能摆脱原来体系，作比较彻底的变动，这一点今后仍需继续探索。

本书每章分别由吴郁萍（1）、匡澜（2）、陈启新（3）、王天喜（4）、崔秀琨（5、6、7）、汪心洪（8）、裴新年（9）、李璞（10）等同志撰写，并编选了习题，其中第五、六、七章习题则由杨宏仁同志编选。

编者

1989.3

目　　录

§ 6.2

第一章　行列式

本章介绍线性代数的一个重要内容——行列式。在提出行列式的概念之后，讨论了它的性质，研究了计算行列式的方法。

§1.1　行列式的概念

一、二阶和三阶行列式的定义

二元一次方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1.1)$$

其中 $x_j(j=1.2)$ 表示第 j 个未知量，a_{ij} 称为 x_j 的系数，它有两个下标，第一个下标 i 表示它在第 i 个方程，第二个下标 j 表示它是第 j 个未知量的系数。

例如：a_{22} 就是第二个方程中第二个未知量 x_2 的系数。b_1 b_2 称为常数项。

用加减消元法来解上述方程组(1.1)

将第一个方程的两边乘以 a_{21} 得

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}$$

将第二个方程的两边乘以 a_{11} 得

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$$

所得两式相减，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

同样消去 x_2 可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

如果当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则线性方程组(1.1)唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (1.2)$$

将解 (1.2) 代人方程组 (1.1) 可知 (1.2) 确为 (1.1) 的解。
为了使解(1.2)便于记忆，引人以下定义。

定义 1.1，把 a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} 四个数排成以下形式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D$ 叫二阶行列式，它表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 即：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

行列式 D 中的每一个数 $a_{ij}(i.j=1,\ 2)$ 称为该行列式的元素。横排叫行，竖排叫列。二阶行列式含有二行二列。如：a_{12} 则表示位于行列式的第一行，第二列的元素。a_{21} 则表示位于行列式第二行第一列的元素，其余类推。

注意：

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}$是一个记号，当所有元素都是数时，它表示一个确定的数。

按照二阶行列式的定义，容易看出解 (1.2) 中的两个分子也都可用行列式表示为

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

于是运用行列式的记号，线性方程组 (1.1) 的解 (1.2) 可表示

为:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

根据以上讨论，可得如下结论:

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

且设 $D\neq 0$，那么方程组(1.1)的解可表示为:

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

用行列式求解线性方程组，我们要注意以下二点:

(1) 分母 D 是由方程组的未知量的系数按原来顺序排成的行列式，它称为系数行列式，

(2) 第一个未知数 x_1 的分子是：用常数项 $b_1.b_2$ 分别代替系数行列式 D 中 x_1 的系数 $a_{11}.a_{21}$ 所构成的行列式；第二个未知量 x_2 的分子 D_2 是：用常数项 $b_1.b_2$ 分别代替 D 中的 x_2 的系数 $a_{12}.a_{22}$ 所构成的行列式。

例1. 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-8=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

解：把原方程组改写为

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-2y=-3 \end{cases}$$

于是

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\times(-2)-1\times3=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times8=-14$$

因为 $D=-7\neq0$，所以方程组有唯一解:

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1 \qquad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2$$

三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.3}$$

的解也可由相应阶的行列式唯一表出。

定义 1.2　三阶行列式由横的 3 行，竖的 3 列共 9 个元素组成，每个元素记作 a_{ij} 下标 i 和 j 分别表示元素所在的行和列。例 a_{32} 表示位于第 3 行第 2 列交点处的元素。三阶行列式确定一个数值，它是六条对角线上元素之积的代数和记忆方法如下:

$$\begin{array}{ccccc}
(+) & (+) & (+) & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
(-) & (-) & (-) & &
\end{array}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{23}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

等式左端叫三阶行列式，右端叫做三阶行列式的展开式。

因此线性方程组(1.3)的解可简记为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad (D \neq 0)$$

D: 是以未知量的系数为元素所组成的三阶行列式的简写;

D_1: 是以方程右端常数项 $bi(i=1,2,3)$ 代替 D 中第一列的 a_{11},a_{21},a_{31} 的行列式的简写;

D_2: 是以方程右端常数项 $bi(i=1,2,3)$ 代替 D 中第一列的 a_{12},a_{22},a_{32} 的行列式的简写;

D_3: 是以方程右端常数项 $bi(i=1,2,3)$ 代替 D 中第三列的 a_{13},a_{23},a_{33} 行列式的简写。

即:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例2. 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=3 \\ 6x-5y+2z=\dfrac{11}{6} \\ x+2y-6z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

解：分别计算 D,D_1,D_2,D_3

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}=60+48+6+20-8+108=234$$

$$\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ \dfrac{11}{6} & -5 & 2 \\ -\dfrac{1}{3} & 2 & -6 \end{vmatrix}=90+\frac{44}{3}-2-\frac{20}{3}-12+33$$

$$=117$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & \frac{11}{6} & 2\\ 1 & -\frac{1}{3} & -6\end{vmatrix}=-22-8+6-\frac{22}{3}+\frac{4}{3}+108$$

$$=78$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 6 & -5 & \frac{11}{6}\\ 1 & 2 & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{10}{3}+36+\frac{11}{2}+15-\frac{22}{3}+6$$

$$=58\frac{1}{2}$$

解得:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{117}{234}=\frac{1}{2} \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{78}{234}=\frac{1}{3}$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{58.5}{234}=\frac{1}{4}$$

二、代数余子式及 n 阶行列式的定义

为了将行列式的概念推广到任意阶，首先给出行列式的元素的代数余子式的概念。

定义1.3在 n^2个数构成的 n 行 n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，$a_{ij}(i=1,2,\cdots n;\ j=1,2,\cdots n)$ 称为第 i 行第 j 列的元素。划去 a_{ij} 所在的一行和一列，所得 $n-1$ 行，$n-1$ 列的结果称为 a_{ij} 的余子式。记为 M_{ij}。即：

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{ij} 前乘上 $(-1)^{i+j}$ 的结果，称为 a_{ij} 的代数余子式。记为 A_{ij}，即：　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

例如：对于行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ 元素 a_{23} 的余子式是

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ 而 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

利用代数余子式的记号，三阶行列式可以记为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_{1i}A_{1i}$$

一般地，对于 n 阶行列式有如下定义：

定义 1.4　　若 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(i = 1,2,\cdots n)$ 或 $D_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(j = 1,2,\cdots n)$ 称 D_n 为 n 阶行列式。简记为 $|a_{ij}|$

由此可知，一个 n 阶行列式等于其第一行诸元素与其代数余子式的乘积之和。

例3. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} \text{的值}$$

解：按第一行的元素展开为三阶行列式，再把三阶行列式展开为二阶行列式。

$$D=\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}=11\begin{vmatrix} 22 & 23 & 24 \\ 32 & 33 & 34 \\ 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}$$

$$-12\begin{vmatrix} 21 & 23 & 24 \\ 31 & 33 & 34 \\ 41 & 43 & 44 \end{vmatrix}+13\begin{vmatrix} 21 & 22 & 24 \\ 31 & 32 & 34 \\ 41 & 42 & 44 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \\ 41 & 42 & 43 \end{vmatrix}$$

$$=11\left[22\begin{vmatrix} 33 & 34 \\ 43 & 44 \end{vmatrix}-23\begin{vmatrix} 32 & 34 \\ 42 & 44 \end{vmatrix}+24\begin{vmatrix} 32 & 33 \\ 42 & 43 \end{vmatrix}\right]$$

$$-12\left[21\begin{vmatrix} 33 & 34 \\ 43 & 44 \end{vmatrix}-23\begin{vmatrix} 32 & 34 \\ 42 & 44 \end{vmatrix}+24\begin{vmatrix} 31 & 33 \\ 41 & 43 \end{vmatrix}\right]$$

$$+13\left[21\begin{vmatrix} 32 & 34 \\ 42 & 44 \end{vmatrix}-22\begin{vmatrix} 31 & 34 \\ 41 & 44 \end{vmatrix}+24\begin{vmatrix} 31 & 32 \\ 41 & 42 \end{vmatrix}\right]$$

$$-14\left[21\begin{vmatrix} 32 & 33 \\ 42 & 43 \end{vmatrix}-22\begin{vmatrix} 31 & 33 \\ 41 & 43 \end{vmatrix}+23\begin{vmatrix} 31 & 32 \\ 41 & 42 \end{vmatrix}\right]$$

$$=11[-220+460-240]-12[-210+690+480]$$

$$+13[-420+660-240]-14[-210+440-230]=0$$

本题也可按其它的行或列的元素展开，一个四阶行列式共有 $4+4=8$ 个等价的展开式。

对于 n 阶行列式有如下展开公式：

按第一行元素展开

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

………………………………………………

按第 i 行元素展开

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{i1}A_{i1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

按第 j 列元素展开

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

共有 $n + n = 2n$ 个等价的展开式

例4. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解：根据定义可得

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

这种除了主对角元素之外其他元素全为零的行列式称为对角形行列式。对一般的 n 阶对角形行列式用完全类似的方法可求得。

即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$