考研数学

应试指导　题型分析　强化训练

主编　王子亭　亓　健　费祥历

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学应试指导题型分析强化训练/王子亭主编；亓健，费祥历编. -东营：石油大学出版社，1999.3

ISBN 7-5636-1213-0

Ⅰ.考… Ⅱ.①王… ②亓… ③费… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 03209 号

考研数学

应试指导 题型分析 强化训练

王子亭 亓 健 费祥历 主编

出版者：石油大学出版社(山东 东营，邮编 257062)

印刷者：石油大学印刷厂印刷

发行者：石油大学出版社(电话 0546—8392563)

开　本：787×1 092 1/16 印张：24.125 字数：618 千字

版　次：1999 年 4 月第 1 版 1999 年 4 月第 1 次印刷

印　数：1 4 000 册

定　价：28.00 元

前　言

一、编写目的

1. 为准备报考工学类及经济类硕士研究生的有志之士提供一本实用的复习指南. 本书是在分析 1988～1998 年硕士研究生入学考试数学试题的基础上总结出来的,因而对于同学们在较短的时间内掌握考试技巧有独特功效.

2. 为正在学习高等数学、线性代数及概率论与数理统计(以下简称数学)的同学提供一本与教学过程相适应的学习参考书. 数学既是学好其它课程必须掌握好的基础工具,又是进一步深造考研的必考科目. 同学们在学习过程中参考本书,不仅有利于提高解题能力,而且有利于比较系统而有重点地把握所学知识,加深对课程知识的理解.

3. 为教师提供一本使用方便的教学参考资料. 教学中如何选择恰当的例题,使之既符合教学基本要求,又对学生今后学习有大的帮助,是一件费时费力的事. 本书含有大量的例题可满足这方面的需要,而且题型多样,深浅适度,有一定代表性.

二、基本内容

全书根据最新硕士研究生入学数学考试大纲的要求,分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计、模拟试题与参考答案四部分. 其中前三部分分别按章归类,包括**【考试要求与应试指南】**、**【题型分析与解题指导】**、**【单元练习与提示答案】**等内容. 其中**【题型分析与解题指导】**是每章的重点,它精选了 1988～1998 年硕士研究生入学考试数学试题中的典型题目,通过分析、求解,总结出各类题型的解题方法和解题技巧,为同学们提高解题能力,拓宽解题思路提供技术指导.

三、编写格式与记号说明

本书例题按章编号,“例 2.10”表示第二章第 10 个例题. 题号后数字,例如(98108)表示 1998 年数学一的 8 分题. 由于 1996 年前的数学一、二或数学四、五的客观题基本相同,因此(96103)也代表(96203),(96403)也代表(96503). 考生特别应注意 1996 年前(包括 1996 年)后大纲的调整及题号的变化.

本书第一部分的第 1～3 章和第 8 章由亓健编写,第 4～7 章及第四部分由费祥历编写,第二、三部分由王子亭编写. 全书由王子亭统一定稿. 由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者及同行指教,以利改进.

编　者

1998 年 10 月

目　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续…………………………………………………………（3）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（3）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（4）
单元练习与提示答案　………………………………………………………（25）
第二章　一元函数微分学　……………………………………………………（30）
考试要求与应试指南　………………………………………………………（30）
题型分析与解题指导　………………………………………………………（31）
单元练习与提示答案　………………………………………………………（62）
第三章　一元函数积分学　……………………………………………………（66）
考试要求与应试指南　………………………………………………………（66）
题型分析与解题指导　………………………………………………………（67）
单元练习与提示答案　………………………………………………………（94）
第四章　向量代数与空间解析几何　…………………………………………（97）
考试要求与应试指南　………………………………………………………（97）
题型分析与解题指导　………………………………………………………（97）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（109）
第五章　多元函数微分学………………………………………………………（111）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（111）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（111）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（138）
第六章　多元函数积分学………………………………………………………（141）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（141）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（141）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（182）
第七章　无穷级数………………………………………………………………（186）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（186）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（187）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（210）
第八章　常微分方程……………………………………………………………（215）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（215）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（216）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（229）

第二部分　线性代数

第九章　行列式及其计算…………………………………………………………（235）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（235）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（235）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（244）
第十章　矩阵及其计算…………………………………………………………（245）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（245）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（245）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（254）
第十一章　n 维向量的线性相关性 ……………………………………………（256）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（256）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（256）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（264）
第十二章　线性方程组…………………………………………………………（266）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（266）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（266）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（274）
第十三章　矩阵的特征值与特征向量…………………………………………（276）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（276）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（276）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（285）
第十四章　二次型………………………………………………………………（286）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（286）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（286）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（294）

第三部分　概率论与数理统计

第十五章　随机事件及其概率…………………………………………………（297）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（297）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（297）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（305）
第十六章　随机变量及其概率分布……………………………………………（307）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（307）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（307）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（326）
第十七章　随机变量的数字特征………………………………………………（328）
考试要求与应试指南…………………………………………………………（328）
题型分析与解题指导…………………………………………………………（328）
单元练习与提示答案…………………………………………………………（336）

第十八章　大数定律和中心极限定理………………………………………………………（337）
考试要求与应试指南…………………………………………………………………（337）
题型分析与解题指导…………………………………………………………………（337）
单元练习与提示答案…………………………………………………………………（341）
第十九章　数理统计初步………………………………………………………………（342）
考试要求与应试指南…………………………………………………………………（342）
题型分析与解题指导…………………………………………………………………（342）
单元练习与提示答案…………………………………………………………………（351）

第四部分　模拟试题与参考答案

模拟试题

数学一（第 1 套）……………………………………………………………………………（355）
数学一（第 2 套）……………………………………………………………………………（357）
数学一（第 3 套）——1999 年硕士研究生入学考试数学试题（试卷一）　…………………（359）
数学二（第 1 套）……………………………………………………………………………（361）
数学二（第 2 套）……………………………………………………………………………（363）
数学二（第 3 套）——1999 年硕士研究生入学考试数学试题（试卷二）　…………………（364）

参考答案

数学一（第 1 套）……………………………………………………………………………（367）
数学一（第 2 套）……………………………………………………………………………（368）
数学一（第 3 套）……………………………………………………………………………（369）
数学二（第 1 套）……………………………………………………………………………（374）
数学二（第 2 套）……………………………………………………………………………（374）
数学二（第 3 套）……………………………………………………………………………（375）

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

【考试要求与应试指南】

考试要求　函数是高等数学的主要研究对象，极限理论是微分学与积分学的基础，因此，这一章的内容相当重要. 在历年的硕士研究生入学数学考试中，本章都占有一定的题数和分数，特别是在1997年《全国研究生入学数学考试大纲》作了重大变化以来，本章内容在数学考试中的地位可谓举足轻重. 不论是工学类还是经济类的考生，都应对本章给予足够重视.

按最新考试大纲要求，本章着重点如下：

1. 理解函数的概念.
2. 理解复合函数的概念.
3. 理解极限的概念，函数左右极限的概念，以及极限存在与左右极限之间的关系.
4. 理解无穷小、无穷大及无穷小的阶的概念.
5. 理解函数连续性的概念.
6. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
7. 了解反函数及隐函数的概念.
8. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）.
9. 掌握函数的表示方法.
10. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
11. 掌握极限的性质及四则运算法则.
12. 掌握极限存在的两个准则，利用两个重要极限求极限的方法.
13. 会建立简单应用问题中的函数关系式.（注：数学二的考生不要求会这一条）
14. 会利用极限存在的两个准则求极限.
15. 会用等价无穷小求极限.（注：数学三、数学四的考试大纲上虽没有“用等价无穷小求极限”这一条，但我们要求考数学三、数学四的读者也应该掌握这一知识点）
16. 会判别函数间断点的类型.（注：数学三、数学四的考生不要求会这一条）
17. 会应用闭区间上连续函数的性质.

应试指南　以上考试要求范围较广，有些知识点虽作了要求，但在考试中不可能全部考到. 在本章内容中，极限是重点. 求函数极限是每年必考题，且在某些年份的考题中，直接考求函数极限的题目有好几个，所占分数有十几分之多. 在判断函数的连续、讨论函数的间断点及其类型时，其实质仍是求函数的极限. 而在函数这部分内容中，大多是基础知识，为大家所熟悉. 所以本章内容重中之重是求极限.

【题型分析与解题指导】

1. 有关函数的常见题型

题型一、求函数在某一点的函数值，求复合函数的表达式，求 $f(x)$ 的表达式

例 1.1 填空题

(1)（90103）设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______.

(2)（88304）若 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$，则 $f(7)=$______.

解 (1) 此题就是求复合函数表达式的问题，按 $f(x)$ 的定义，$f(x)\leqslant 1$，得 $f[f(x)]=1$.

(2) 本题虽是求函数值，但实质上牵涉到变限函数，应掌握变限函数的性质及其求导等.

对 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$ 两边求导得

$$3x^2 f(x^3-1)=1$$

令 $x=2$ 得，$12f(7)=1$，即 $f(7)=\frac{1}{12}$.

例 1.2 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\overbrace{f[(\cdots f(x))]}^{n\text{次}}$.

解 用归纳法证明.

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+x^2)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

设 $f_{n-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$，则

$$f_n(x)=f[f \text{[illegible]} \frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+f_{n-1}^2(x)}}=\frac{x/\sqrt{1+(n-1)x^2}}{\sqrt{1+x^2/[1+(n-1)x^2]}}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

注：在高等数学的证明[illegible]归纳法是常用方法之一.

例 1.3 （90309）已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t, x>0$，求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

解 $$f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t \xlongequal{令\, t=\frac{1}{u}} \int_1^x \frac{\ln(1+\frac{1}{u})}{\frac{1}{u}}(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2})$$

$$=-\int_1^x \frac{\ln(1+u)-\ln u}{u}\mathrm{d}u=-\int_1^x\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u+\int_1^x\frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=-f(x)+\frac{1}{2}\ln^2 u\Big|_1^x=-f(x)+\frac{1}{2}\ln^2 x$$

故 $$f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

注：本题的证明使用了定积分的换元法，但要注意所做换元一定要满足换元公式的条件.

例 1.4 设 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

解 因为 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2-2\sin^2\frac{x}{2}$，所以

$$f(u)=2-2u^2$$

故 $$f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x$$

例 1.5 已知 $f(\ln x)=x^2(1+\ln x)$，求 $f(x)$.

解 令 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$，于是

$$f(t)=\mathrm{e}^{2t}(1+t)$$

所以

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}(1+x)$$

例 1.6 已知 $f\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}+3$，求 $f(x)$.

解 因为

$$\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}=\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^2-2$$

故

$$f\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^2-2+3$$

即

$$f(x)=x^2+1$$

注：例 1.4，1.5，1.6 可归纳为已知 $f[\varphi(x)]$的表达式，求 $f(x)$的表达式的一类问题. 该题型的基本解法是令 $\varphi(x)=t$，解出 $x=\varphi^{-1}(t)$，再将 t 换成 x，即得 $f(x)$的表达式.

例 1.7 设 $f(x)$是连续函数，且 $\int_0^{\mathrm{e}^x} f(t)\mathrm{d}t=\ln(1+x^2)$，求 $f(1)$.

解 这里的函数 $f(x)$为变上限积分的被积函数. 为求 $f(1)$，应先求 $f(x)$，将等式两边对 x 求导得 $f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x=\dfrac{2x}{1+x^2}$，令 $x=0$ 得 $f(1)\cdot 1=0$，所以 $f(1)=0$.

例 1.8 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+1}}$，求 $f(3)$.

解 这里的函数是由极限定义的. 为求 $f(3)$，需先求出 $f(x)$的具体表达式.

由题可知，$x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{\pi}{2}$；$x<0$ 时，$f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$；$x=0$ 时，$f(x)=0$. 即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & x>0\\ 0 & x=0\\ -\dfrac{\pi}{2} & x<0\end{cases}$$

所以

$$f(3)=\frac{\pi}{2}$$

题型二、求函数的定义域

求函数定义域的方法为：(1) 对于基本初等函数，其定义域可直接给出. (2) 对于分段函数，其定义域是各段定义域的并集. (3) 对于初等函数，其定义域是由其组成的简单初等函数定义域所构成的不等式组的解集.

例 1.9 求 $f(x)=\int_{x^2}^{\pi/2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的定义域.

解 此函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 但初学者易将其写为 $x\neq 0$，其原因是对可积函数类型不甚了解. 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，若补充定义 $x=0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$的函数值为 1，则$\dfrac{\sin x}{x}$在$(-\infty,+\infty)$上是连续的，而连续函数可积.

例 1.10 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$，求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域$(a>0)$.

解 $f(x)$的定义域为 $2<x<3$，所以

$$\begin{cases}2<x+a<3\\ 2<x-a<3\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}2-a<x<3-a\\ 2+a<x<3+a\end{cases}$$

当 $a=\dfrac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为空集.

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $2-a<x<3-a$.

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为空集.

故 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $2+a<x<3+a \quad (0<a<\frac{1}{2})$.

题型三、有关函数的特性(周期性、单调性、有界性及奇偶性)

判别给定函数奇偶性的方法有：(1) 主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质，即奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶数个奇(或偶)函数的乘积为偶函数；一个偶函数和一个奇函数之积仍为奇函数. (2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

求或判别给定函数的周期性的方法主要是根据周期函数的定义，有时也用其运算性质，即：(1) 若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$. (2) 若 $f(x)$、$g(x)$ 的周期分别为 T_1、$T_2(T_1\neq T_2)$，则 $f(x)\pm g(x)$ 的周期为 T_1、T_2 的最小公倍数.

判别或证明 $f(x)$ 在区间 I 上的增减性的方法有利用定义和利用 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 两种.

例 1.11 选择题

(1) $f(x)=x\sin x e^{\cos x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 偶函数

(2) 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=0$，且 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 是(　　).

(A) 以 π 为周期的函数　　(B) 以 2π 为周期的函数

(C) 以 3π 为周期的函数　　(D) 不是周期函数

(3) 函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在其定义域内为(　　).

(A) 有上界无下界　　(B) 有下界无上界

(C) 有界，且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$　　(D) 有界，且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$

解 (1) 答案是(D). 因为取一数列 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，当 $n\to\infty$ 时，$f(x_n)\to\infty$，故 $f(x)$ 不是有界函数；其次 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，$f(\pi)=0$，可见(B)不成立，显然 $f(x)$ 不是周期函数；而(D)是对的. 事实上，$x\sin x$ 是偶函数，$e^{\cos x}$ 也是偶函数，故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 由题设知，$f(x+\pi)\neq f(x)$，故(A)不对. 又因 $f(x+2\pi)=f[(x+\pi)+\pi]=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=[f(x)+\sin x]-\sin x=f(x)$，故答案是(B).

(3) 由 $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$ (注意 $1+x^2\geqslant 2|x|$) 得 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$，故答案选(C).

例 1.12 判别下列函数之奇偶性

(1) 设 $a>0$，$f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$.

(2) $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 是连续函数.

解 (1) 设 $x\in(-1,1)$，则

$$f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$$

故 $f(x)$ 为 $(-1,1)$ 内的奇函数.

(2) 令 $F_1(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$F_2(x)=\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$，则

$$F_1(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$
$$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-F_1(x)$$

故 $F_1(x)$ 为奇函数.

又 $$F_2(-x)=\int_0^{-x}f(t^2)\mathrm{d}t\xlongequal{令 u=-t}-\int_0^x f(u^2)\mathrm{d}u=-F_2(x)$$

故 $F_2(x)$ 也为奇函数，所以 $F(x)$ 为奇函数.

例 1.13 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $x_1>0,x_2>0$，求证：若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，则不等式 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$ 成立.

证 设 $x_1<x_2$，于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\Rightarrow x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$$

由 $$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$$
$$\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$$

故 $$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$$

注：在考虑函数单调性的有关命题时，若 $f(x)$ 可导，则利用导数判别单调性较方便，否则只能根据定义来判断.

2. 有关极限的常见题型

求极限的方法很多，且非常灵活，是考试中必考内容. 求极限的方法主要归结为：(1) 利用两个重要极限. (2) 利用洛比塔法则. 洛比塔法则是求极限时最典型最常用的方法. (3) 求递归定义数列的极限时，其方法是利用单调有界原理. (4) 求 n 项和类型数列的极限时，由于不符合极限运算法则的条件，故不能直接运用极限运算法则来求，具体方法为：① 利用等差、等比数列求和法；② 利用定积分定义；③ 利用夹逼定理；④ 利用无穷级数求和法.

题型一、关于未定式的极限

例 1.14 填空题

(1) (88304) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$______.

(2) (94103,94203) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=$______.

解 (1) 在解本题时，需先求出 $f(x)$ 的表达式，而 $f(x)$ 的表达式是一极限，即

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}t\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{2tx}{x}}=te^{2t}$$

所以 $$f'(t)=(1+2t)e^{2t}$$

(2) $$原式=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\cos x=\frac{1}{6}$$

例 1.15 (91403,91503) 下列各式正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

解 $$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\exp\left[\lim_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$=\mathrm{e}^0=1$$

故(A)对.

例 1.16 (89405)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解 设 $u=\frac{1}{x}$,当 $x\to\infty$时,$u\to0$. 则

$$原式=\lim_{u\to0}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}}$$

$$=\lim_{u\to0}\left\{\left[1+(\sin u+\cos u-1)\right]^{\frac{1}{\sin u+\cos u-1}}\right\}^{\frac{\sin u+\cos u-1}{u}}$$

而 $$\lim_{u\to0}\frac{\sin u+\cos u-1}{u}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}+\lim_{u\to0}\frac{\cos u-1}{u}=1+\lim_{u\to0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{u}=1+0=1$$

所以,原式=e.

注:上述方法是利用两个重要极限求极限. 本题在做过 $u=\frac{1}{x}$ 变换后,也可用洛比塔法则,其解答过程为:

$$原式=\exp\left[\lim_{u\to0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}\right]=\exp\left[\lim_{u\to0}\frac{\cos u-\sin u}{\sin u+\cos u}\right]=\mathrm{e}$$

例 1.17 (90103,90203)设 a 为非零常数,求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

解 $$原式=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{2a}$$

注:本题也可用洛比塔法则求解.

例 1.18 (88304)求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

解 $$原式=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\tan x\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln\sqrt{x}}{\cot x}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\csc^2 x}\right]$$

$$=\mathrm{e}^0=1$$

例 1.19 (91105,91205)求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

解 $$原式=\lim_{x\to0^+}\left\{\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right\}^{\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}$$

注意到 $$(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x\quad(x\to0^+\text{时})$$

所以 $$\text{原式}=e^{-\pi/2}$$

注：本题也可用洛比塔法则求解，解法如下：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0^+}\exp\left[\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}\right]\\&=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{\pi\ln\cos\sqrt{x}}{x}\right]\\&=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\pi\frac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\\&=e^{-\pi/2}\end{aligned}$$

例 1.20 (91305)求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x(e^x-1)+x^2e^x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2(e^x-1)+4xe^x+x^2e^x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6e^x+6xe^x+x^2e^x}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

注：若是将等价无穷小与洛比塔法则结合使用，解答更简单些. 解答如下：

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\quad(\text{使用了 } x\to0 \text{ 时 } e^x-1\sim x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

例 1.21 (91405)求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\right]\\&=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}\right]\end{aligned}$$

其中大括号内的极限是$\dfrac{0}{0}$型，因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}\\&=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

于是 $$\text{原式}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

例 1.22 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\exp\left[\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]\\&=\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right]\\&=\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1/\sqrt{1+x^2}}{1}\right]=e^0=1\end{aligned}$$

例 1.23 (93105,93205)求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解
$$\text{原式}=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$\xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{t}}\exp\left[\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}\right]$$
$$=\exp\left[\lim_{t\to0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}\right]=e^2$$

例 1.24 (93303)求 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

例 1.25 (93305)求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}=-50$$

1

例 1.26 (93503)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$.

解
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 1.27 (94105)设 $f(x)$可导,且 $f(0)=0$,$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.

解 令 $u=x^n-t^n$,则 $F(x)=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u$,$F'(x)=x^{n-1}f(x^n)$,所以
$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)}{x^n}$$
$$\xlongequal{\text{令 } y=x^n}\frac{1}{2n}\lim_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=\frac{1}{2n}f'(0)$$

例 1.28 (94405,94507)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 令 $t=\frac{1}{x}$,则
$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)^2}=\frac{1}{2}$$

例 1.29 (95305)求 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x)}{x}=\frac{1}{2}$$

例 1.30 (98103,98203)求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{2x(\sqrt{1+x}\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=-\frac{1}{2}$$

例 1.31 (98406)求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$($n$ 为自然数).

解 考虑极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$,令 $t=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$$

$$=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\tan t-\ln t}{t^2}\right]=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\sec^2 t}{\tan t}-\frac{1}{t}}{2t}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{2}{\sin 2t}-\frac{1}{t}}{2t}\right]=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{2t-\sin 2t}{2t^2\sin 2t}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{2t-\sin 2t}{2t^2\cdot 2t}\right]=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{2-2\cos 2t}{12t^2}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos 2t}{6t}\right]=e^{\frac{1}{3}}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$$

题型二、极限中常数值的确定

求极限中的常数值主要是根据极限存在这一前提,利用等价无穷小、洛比塔法则、泰勒公式及如下公式求解:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & \text{当 } m=n \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } m>n \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } m<n \text{ 时}\end{cases}$$

例 1.32 选择题

(1) (94303)设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则( ).

(A) $a=1,b=-\frac{5}{2}$ (B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\frac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-2$

(2) (96303)设当 $x\to0$ 时,$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小,则( ).