实变函数与泛函分析教程

张学莲　编著

北京理工大学出版社

内容简介

本书共分七章：集合与实轴上的点集，实变函数，距离空间，赋范线性空间及有界线性算子，内积空间，谱论简介，广义函数大意。每章后面都有例题选解并配有难易适中的习题。

本书力图做到取材精练、简明扼要，注意到工科特点，使直观易懂与严密论证相结合，概念的引入自然，尽可能联系实际应用。

本书可作为高等工科院校的研究生教材及高年级学生的选修课教材，也可作为应用数学专业的教材或教学参考书，还可供数学工作者与科技人员参考。

实变函数与泛函分析教程

张学莲　编著

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 10 印张215千字

1990年3月第一版　1990年3月第一次印刷

ISBN 7-81013-309-8/O·54

印数：1—2400册　定价：2.20 元

序　言

实变函数与泛函分析是函数论学科的重要基础，又在现代科技中有广泛的应用。其中实变函数部分是数学分析课程中微积分理论的进一步深入，是学好泛函分析的基础，而且实变函数的主要内容（测度与Lebesgue积分）又在数学的其他分支及许多科技领域中有直接的应用。泛函分析是现代数学的一个较新的重要分支，它综合分析的、代数的、几何的观点和方法研究分析数学中的许多问题，泛函分析的概念和方法已渗透到现代基础数学、应用数学及其他部门的许多分支中，比如微分方程，概率论，理论物理，现代力学，现代控制论及经济数学等。

实变函数与泛函分析是一门相当抽象的数学基础课，它的基础是数学分析。考虑到我们的主要对象——工科研究生的数学基础的现有水平及学时的限制，这本教程介绍了数学分析中的有关部分，并且只讲实变函数与泛函分析中一些最基本的概念和方法。为了使读者更好地掌握这些内容，除各节文中的例题外，每章后面都有结合所讲内容的若干综合性的例题选解，并配置了相当数量难易适当的习题，希望读者通过学习与做题掌握必要的基础知识，并对数学的抽象思维方法和逻辑论证能力得到进一步的训练，为将来深入学习及应用打下良好的基础。

本人近几年为北京理工大学非数学专业讲授实变函数与

泛函分析课程，并写了一本讲义，现根据教学情况并参考国内外有关书籍将讲义扩充修改而成这本教程。在撰写过程中得到我系及教研室多位老师的大力帮助，谨向他们表示衷心的感谢。由于本人水平有限，书中难免出现这样那样的问题与谬误，希望专家与读者不吝指出，以便今后改正提高。

张学莲

一九八八年春于北京

目　录

第一章　集合与实轴上的点集

§1.1　集合及其运算 …… 1
§1.2　实数系的完备性 …… 5
§1.3　映射·可列集 …… 21
§1.4　实轴上的开集与闭集 …… 27
例题选解(一) …… 32
习题一 …… 36

第二章　实变函数

§2.1　点集的 Lebesgue 测度 …… 39
§2.2　可测函数 …… 52
§2.3　Lebesgue 积分 …… 66
§2.4　积分序列极限定理 …… 92
§2.5　不定积分 …… 97
§2.6　平面点集测度与 Fubini 定理 …… 111
例题选解(二) …… 119
习题二 …… 125

第三章　距离空间

§3.1　距离空间基本概念 …… 131
§3.2　距离空间的可分性与完备性 …… 148
§3.3　压缩映射原理及其应用 …… 155
§3.4　列紧性与紧性 …… 162

例题选解(三) ……171
习题三 ……174

第四章 赋范线性空间及有界线性算子

§4.1 赋范线性空间及 Banach 空间 ……179
§4.2 有界线性算子 ……194
§4.3 有界线性泛函的延拓，共轭空间及共轭算子 ……204
§4.4 逆算子定理，闭图象定理与共鸣定理 ……215
§4.5 强收敛·弱收敛与弱*收敛 ……224
例题选解(四) ……227
习题四 ……232

第五章 内积空间

§5.1 内积空间及 Hilbert 空间 ……236
§5.2 正交与投影定理 ……241
§5.3 内积空间中的 Fourier 分析 ……246
§5.4 共轭空间与共轭算子 ……259
例题选解(五) ……265
习题五 ……270

第六章 谱论简介

§6.1 线性算子谱的概念及性质 ……273
§6.2 自共轭算子的谱 ……279
§6.3 全连续自共轭算子及其谱论 ……281
§6.4 谱论在积分方程中的应用 ……288
习题六 ……293

第七章 广义函数大意

§7.1 基本概念 ……293

§7.2 广义函数的性质 ……………………………………………301
习题七 ……………………………………………………………309
外国人名译名对照表 ……………………………………………310
参考文献 …………………………………………………………312

第一章　集合与实轴上的点集

§1.1　集合及其运算

1．有关集合的符号

集合是现代数学中一个最基本的概念，数学的各个分支普遍地运用着集合的符号及方法。集合论的奠基者Cantor在提出这个概念的时候，将"集合"看作我们的感觉或者思维中确定的个别现象的汇总，这一个一个的现象称为该集合的"元素"。集合也叫做集，元素也叫做元。通常用大写英文字母如A、B、C等表示集合，小写英文字母如a、b、c等表示元素。

集合可用列举其中所有元素的方法来表示，如

$$A=\{2,5,10\}$$

$$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}（自然数集合）$$

也可用指出其中所有元素特征的方法来表示，即集合$A=\{a|a具有性质p\}$。如有理数集合

$$Q=\left\{a\left|a=\frac{p}{q}，p和q为整数，q>0\right.\right\}$$

对任何元素a与给定的集合A，或者a是A的一个元素，即a属于A，记作$a\in A$；或者a不是A的元素，即a不属A，记作$a\overline{\in} A$。二者必居其一。需特别指出，不含任何元素的集合称为空集，记作ϕ。

关于集合与集合之间的关系，有A包含B，记作$A\supset B$；或称B包含于A，记作$B\subset A$，它们都表示B中所有元素全

属于A。$A=B$是指$A\supset B$同时$B\supset A$，即它们的元素完全相同，是同一个集合。若$B\subset A$，称B是A的子集。又若$B\subset A$，且A中有元素不属于B，称B是A的真子集。

2. 集合的运算

集合的基本运算有三种：并、交、差。

设A、B是两个集合。由A和B的所有元素组成的集合称为A和B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{或} x\in B\}$$

由既属于A又属于B的所有元素组成的集合称为A和B的交集，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{且} x\in B\}$$

由属于A而不属于B的所有元素组成的集合称为A减B的差集，记作$A-B$，即

$$A-B=\{x|x\in A \text{但} x\bar{\in} B\}$$

若$A\cap B=\phi$，则称A与B不相交，否则称为相交。

若$B\subset A$，则差集$A-B$称为B关于A的补集(余集)，记作B^c_A。如果在同一问题中，所研究的集合都是某个集合X的子集，X叫做基本集，差$X-A$简称为A的补集，记作A^c。显然有$A-B=A\cap B^c$。

集合的并与交两种运算都满足交换律与结合律，即

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

集合的并与交的运算可以推广到任意多个集合的情况，设$\{A_\alpha|\alpha\in I\}$是一族集合，其中I是指标集（I既可为有限

集，即它只含有有限多个元素，也可为无限集，即含有无穷多个元素)。它们的并与交分别为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{存在 }\alpha\in I,\text{ 使 }x\in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{对任一个}\alpha\in I,\text{有}x\in A_\alpha\}$$

例如，$A_\alpha=(-\infty,\alpha)$，其中 $\alpha\in(0,+\infty)$，则有

$$\bigcup_{\alpha\in(0,+\infty)}A_\alpha=(-\infty,+\infty)$$

$$\bigcap_{\alpha\in(0,+\infty)}A_\alpha=(-\infty,0)$$

任意多个集合的并、交与补集之间有下列关系。

定理1.1.1（分配律） 设E是一个集合，$\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$是一族集合，则有

(1) $E\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$

(2) $E\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$

[证明] (1) 若 $x\in E\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$，则 $x\in E$，且 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，于是存在$\alpha_0\in I$，使 $x\in A_{\alpha_0}$，从而$x\in E\cap A_{\alpha_0}$。因 $\alpha_0\in I$，所以 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$。因此可得

$$E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)\qquad(1\text{-}1)$$

反之，若 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$，则存在$\alpha_0\in I$，使$x\in E\cap A_{\alpha_0}$，即$x\in E$且$x\in A_{\alpha_0}$，所以$x\in E$ 且 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，故得$x\in E\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$，因此有

$$E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\supset\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)\tag{1-2}$$

联合(1-1)与(1-2)二式，即得

$$E\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$$

（2）的证明请读者完成。▌（符号“▌”表示证毕。）

定理1.1.2（De.Morgan对偶原理） 设X是基本集，$\{A_\alpha|\alpha\in I\}$是一族集合，则有

（1）$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

（2）$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

[证明]（1）任取$x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$，即$x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，则对于每一个$\alpha\in I$，$x\overline{\in}A_\alpha$，于是对于每一个$\alpha\in I$，$x\in A_\alpha^c$，从而$x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$，因此得

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c\subset\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$$

又设$x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$，则对每一个$\alpha\in I$，有$x\in A_\alpha^c$，从而$x\overline{\in}A_\alpha$，所以$x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，故$x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$，于是

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c\subset\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$$

综上即得定理中（1）之等式。

（2）的证明可用与（1）类似的方法得到，或用下述方

法：首先在(1)中将A_α换作A_α^c即得

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha^c)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$$

再将上式两端取补集，有

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c=\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c \blacksquare$$

例1.1.1 证明$E\cap(F-G)=(E\cap F)-(E\cap G)$。

〔证明〕 利用等式$A-B=A\cap B^c$及定理1.1.1（分配律）、定理1.1.2(De-Morgan对偶原理)，则有

$$\begin{aligned}(E\cap F)-(F\cap G)&=(E\cap F)\cap(E\cap G)^c\\&=(E\cap F)\cap(E^c\cup F^c)\\&=(E\cap F\cap E^c)\cup(E\cap F\cap G^c)\\&=E\cap F\cap G^c\\&=E\cap(F-G)\end{aligned}$$

§1.2 实数系的完备性

众所周知，有理数集合是指所有分数，或者等价地说，指一切循环小数（包括有限小数）。有理数集亦称有理数系，用Q来表示。除有理数外还有无理数，即无限不循环小数，全体有理数与无理数称为实数集合，亦称为实数系，用R来表示。

在解析几何里，我们通过数轴将实数用直线上的点表示出来。问题是，如果将所有有理数对应的点放在数轴上以后还会有“空隙”，即直线上有的点不对应有理数，这种“空隙”会不会“连成一片”？即是否会在某一小段直线上都不对应有理数？答案是否定的。这就是我们即将介绍的有理数系的

一个重要性质——在实数系中的稠密性。如果将所有实数对应的点放在数轴上，整个直线就会被填满，而不再有“空隙”。当点在数轴上从原点出发向右或向左运动时，所经过的每一个位置都对应着一个实数。由此借助于直观上关于运动的不间断性可联想到实数系的连续性，连续性亦称完备性。第二个问题是，如何用数学的精确语言来叙述实数系的完备性。关于这一点数学上有多种方式来描述，它们构成了数学分析中有名的实数系几个等价定理。

1. 有理数系

有理数系Q在实数系R中的稠密性是指，任意给定一个实数x，总存在有理数数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$。

这是因为，若$x\in Q$，只要取$x_n=x(n=1,2,3,\cdots)$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$。

若$x\in Q$，即x是无理数，用小数表示$x=a.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$，取$x_1=a.a_1$，$x_2=a.a_1a_2$，$\cdots$，$x_n=a.a_1a_2\cdots a_n$，$\cdots$，于是$x_n\in Q$ $(n=1,2,3,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$。

我们知道，有理数之间经加、减、乘、除四则运算后仍为有理数。但有理数系的稠密性说明，有理数经极限运算后可能不再是有理数。有理数系的稠密性还告诉我们，任何实数都可用有理数来任意逼近，或者说，一个实数的任何邻域内都有有理数存在。即在数轴上任何一小段内都不可能只有无理数。

下面我们研究实数系的完备性定理。

2. 数集的上、下确界

今后我们将实数的集合简称为数集，而将实数简称为

数。

设有数集A及数a，即$A\subset R$（全体实数之集合），$a\in R$。如果对任何的$x\in A$，都有$x\leqslant a$ （$x\geqslant a$），则称a是集A的上界（下界）。若数集A同时有上界与下界，则称A有界。

显然，若A有上界，则必有无穷多个上界。那么是否一定有一个最小上界呢？这个问题在数学上是很有意义的。设集合

$$E=\{1.01,1.01001,1.010010001,\cdots\}$$

这里E是一个有理数集，它有上界比如 2，但在有理数系中无最小上界。将E作为实数集合，它有上界且有最小上界 1.010010001…（无限不循环小数）。

数集A的最小上界叫做A的上确界，记作$\mathrm{Sup}A$。关于数集A的上确界，常用下述等价定义。

定义 1.2.1 设$A\subset R$，$a\in R$，若实数a与数集A之间满足以下两个条件：

（1）对任何的$x\in A$，都有$x\leqslant a$；

（2）对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$x_0\in A$，使得$x_0>a-\varepsilon$。

则称a是数集A的上确界。

注意，这里条件（1）表明a是数集A的一个上界，条件（2）表明任何比a小的实数$a-\varepsilon$都不是数集A的上界。

数集A的最大下界叫做下确界，记作$\inf A$。请读者仿照数集A上确界的定义 1.2.1，给出下确界的等价定义。

例1.2.1 设集合$A=\{(0,1]$中的有理数$\}$，$B=\{1/n|n\in N\}$（其中N表示自然数集合），$C=\{\mathrm{tg}x|x\in(-\pi/2,\pi/2)\}$。它们的上、下确界分别如下：

$$\sup A=1,\ \inf A=0$$

注意这时数集A有最大值1，其上确界为最大值，A无最小值，但它仍有下确界。

$$\sup B=1,\ \inf B=0$$

C无上界，记作$\sup C=+\infty$，C无下界，记作$\inf C=-\infty$。

定理1.2.1（确界定理） 有上（下）界的非空实数集合必有上（下）确界。

此定理也称为实数完备性公理，我们不作证明。若仅在有理数系中考虑有理数集，可能会出现有上（下）界但无上（下）确界的情况。定理1.2.1是从数集确界的角度描述实数系的完备性（连续性）。下面由它出发，给出另外几个与此等价的定理。

3. 单调有界数列，区间套定理

定理1.2.2 单调有界数列必有极限。

［证明］ 不妨设数列$\{x_n\}$单调增加（即$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots$）且有上界（$x_n\leqslant M, n=1,2,3,\cdots$），于是数集$\{x_n\}$有上界，由定理1.2.1，$\{x_n\}$有上确界，记作$a$，又由上确界定义，对一切自然数$n$都有$x_n\leqslant a$，且对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在着自然数$N$，使得$x_N>a-\varepsilon$，所以当$n>N$时，有

$$a-\varepsilon<x_N\leqslant x_n\leqslant a<a+\varepsilon$$

即$|x_n-a|<\varepsilon$，此表明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。∎

注意，从定理的证明中看出，单调增加（减少）数列$\{x_n\}$的极限a即为数集$\{x_n\}$的上（下）确界。

定理1.2.3（区间套定理） 设闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足

（1）$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ （$n=1,2,3,\cdots$）

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

那么必存在唯一的实数 $a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，同时

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$$

［证明］ 由定理中的条件(1)，数列$\{a_n\}$单调增加且有上界（比如 b_1），故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，设为 a，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，得

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]=a$$

因为对所有的n有 $a_n\leqslant a$ 及 $a\leqslant b_n$，故 $a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$。

最后证 a 唯一：设另有实数 $\beta\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，则 $a_n\leqslant a$，$\beta\leqslant b_n$，故 $|\beta-a|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，于是 $\beta=a$，即 a 唯一。∎

4. 列紧性定理

我们先叙述数列的子列概念：在数列$\{x_n\}$即$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$中，按原来顺序任意选出无穷多项所组成的新数列$x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},\cdots,x_{n_k},\cdots$叫做$\{x_n\}$的一个子列，简记作$\{x_{n_k}\}$。其中$x_{n_k}$是原数列中的第 n_k 项，子列中的第 k 项。

我们知道，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对于$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{n_k}\}$，都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。另外，收敛数列必有界，但反之不成立，而有下述定理。

定理 1.2.4(Bolzano-Weierstrass **列紧性定理**) 有界数列必有收敛子列。

［证明］ 因数列$\{x_n\}$有界，设$a_1 \leqslant x_n \leqslant b_1 (n=1,2,3,\cdots)$。将区间$[a_1,b_1]$平分成两个子区间$[a_1,(a_1+b_1)/2]$与$[(a_1+b_1)/2,b_1]$，其中至少有一个含有$\{x_n\}$中的无穷多项，取含有无穷多项的区间记作$[a_2,b_2]$。再将$[a_2,b_2]$平分成两个子区间$[a_2,(a_2+b_2)/2]$与$[(a_2+b_2)/2,b_2]$，其中至少有一个含有$\{x_n\}$中的无穷多项，取这个区间记作$[a_3,b_3]$，…，如此得到一个闭区间列$\{[a_k,b_k]\}$，满足

（1）$[a_{k+1},b_{k+1}] \subset [a_k,b_k]$ $(k=1,2,3,\cdots)$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{b_1-a_1}{2^{k-1}}=0$

应用区间套定理，存在唯一的实数$a \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$，且$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=a$。

由于每一个$[a_k,b_k]$中都含有数列$\{x_n\}$的无穷多项，任取$\{x_n\}$在$[a_1,b_1]$中的一项记作x_{n_1}；任取$\{x_n\}$在$[a_2,b_2]$中的一项x_{n_2}，且使$n_2>n_1$；…；任取$\{x_n\}$在$[a_k,b_k]$中的一项x_{n_k}，且使$n_k>n_{k-1}$；…。如此得$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$。因为$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$及$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=a$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$，即数列$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$收敛。▮

5. 实数完备性定理(Cauchy收敛准则)

定义1.2.2 设数列$\{x_n\}$，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，必存在自然数N，使得当$m、n>N$时总有$|x_m-x_n|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是基本列或Cauchy列。

定义1.2.2又可叙述为：任意给定$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时对于一切自然数p，总有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$。或者，$\{x_n\}$是基本列的更简单说法是，当$m、n\to\infty$时，有$x_m-x_n\to 0$。