线性时变电路原理简介

肖达川　陆文娟

高等教育出版社

前　言

大学电类本科的“电路”课程基本上讲授时不变电路。时变电路是另一类电路。常微分方程理论中有关线性时变微分方程的经典理论，是研究线性时变电路的数学基础。线性微分方程理论的应用范围，并不限于时变电路或时变系统，例如研究非线性电路中周期解的稳定性时，时常遇到时变状态方程。学习时变电路，也有助于这方面的学习。

目前大学电类本科大多不开设系统介绍时变电路的课程。我们不揣浅陋编写了这本小书，目的在于简介线性时变电路的基础知识。本书第一章介绍时变元件和时变电路状态方程的建立。第二章介绍时变状态方程解的特点，解这种方程的一种数值解法：方波脉冲级数解法。第三章介绍时变电路的稳定性问题：BIBO 稳定性以及平衡点的稳定性。第四章介绍周期性时变电路一般解及稳态解的特点。开关电容电路作为一种周期性时变电路也作了简单介绍，同时介绍了周期性时变电抗元件的频率功率公式。

本书是为读者自学参考而编写的。学习过“电路”课的读者就可以阅读本书，不需要具备专业课的知识。编写时尽量注意由浅入深，多举例题。有些较繁的数学推导，用小字印刷，初次阅读时可以略去不读。本书承清华大学电机系江缉光副教授仔细审阅，在此表示我们衷心的感谢。由于编者水平有限，书中不免有不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

1988 年 1 月

目　录

第一章　时变元件和时变电路的状态方程

§1-1　时 变 元 件

线性时变电路由线性时变元件组成。因此首先要问：什么是线性时变元件？简单地讲，若电阻器的电阻 $R(t)$ 是时间 t 的函数，或电感器的电感 $L(t)$（或互感 $M(t)$）是时间 t 的函数，或电容器的电容 $C(t)$ 是时间 t 的函数，那末这些元件都是线性时变元件。以后略去“线性”字样使行文简化。下面介绍这些元件的电压电流关系（或元件约束）。

参看图 1-1，在图中所取关联正方向的情况下，各元件的元件约束如下：

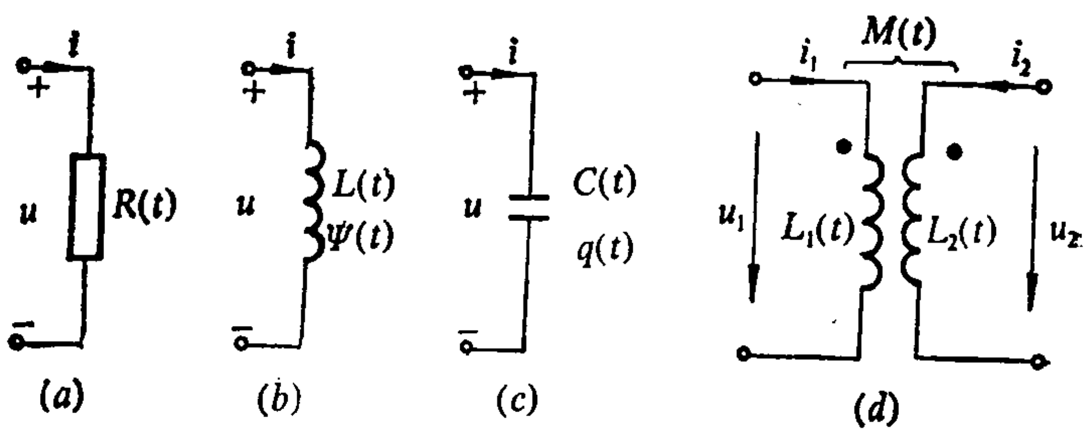

图 1-1　电压和电流的关联正方向

（1）时变电阻器

$$u = R(t)\,i$$

(2) 时变电感器

电感是联系磁链Ψ和电流 i 的物理量，但是 $u=\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$，从而元件约束是：

$$\Psi=L(t)i$$

$$u=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L(t)i) \tag{1-1}$$

积分上式，得

$$\int_0^t u(x)\mathrm{d}x=L(t)i-L(0)i(0)$$

$$\therefore \quad i=\frac{1}{L(t)}\int_0^t u(x)\mathrm{d}x+\frac{L(0)i(0)}{L(t)},\ (L(t)\neq 0) \tag{1-2}$$

注意，此时

$$u=L(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}\neq L(t)\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

设两个线圈之间有互感，用矩阵表示时，有：

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1(t) & M(t)\\ M(t) & L_2(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{i}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore \quad \boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}(t)\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{i}=(\boldsymbol{L}(t))^{-1}\left(\int_0^t \boldsymbol{u}(x)\mathrm{d}x+\boldsymbol{L}(0)\boldsymbol{i}(0)\right),\ (\boldsymbol{L}^{-1}(t)\text{存在})\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

显然，对于电感性时变 n 端口，矩阵表示式(1-3)也是适用的。注意，式中的$(\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{i}$ 不能写作$(\boldsymbol{i}\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t)$。

(3) 时变电容器

电容是联系电荷 q 和电压 u 的物理量。但是 $i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$，从而元件约束是：

$$q=C(t)u$$

$$\left.\begin{aligned} i&=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C(t)u) \\ u&=\frac{1}{C(t)}\int_0^t i(x)\mathrm{d}x+\frac{C(0)u(0)}{C(t)},\ C(t)\neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}4)$$

此时

$$i=C(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}\neq C(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

在关联正方向条件下，元件的值通常不能是负的。所以可以加上下面的限制：

$$R(t)>0, L(t)>0, C(t)>0$$

对于有互感的电感性多端口，所加的限制是电感矩阵 $\boldsymbol{L}(t)$ 是对称正定矩阵，$\boldsymbol{L}^{-1}(t)$ 存在。如果是两个线圈，$\boldsymbol{L}(t)$ 正定，相当于 $L_1>0$、$L_2>0$、$L_1L_2>M^2$。

应强调指出的是，对线性时变元件，$R(t)$（$L(t)$ 或 $C(t)$）是不依赖于电流、电压（磁链或电荷）的时间函数。

在电路理论里，对时不变元件或时变元件有一个较一般的定义。下面以二端元件为例介绍这个定义。

设二端元件的电压、电流分别记作 $u(t)$ 和 $i(t)$。将这元件接在电路中，加上某个激励，这元件就有某个特殊的电压 $u_1(t)$ 和电流 $i_1(t)$。它们必须符合元件约束，从而它们是“容许的”“一对”（偶）物理量。为了叙述方便，把 $(u_1(t),\ i_1(t))$ 叫做元件的一个“电压、电流容许偶”，简称为容许偶。改变激励，得到另一个容许偶 $(u_2(t),\ i_2(t))$。例如元件是定常电阻器，电阻值是 2 Ω。则 $(u_1,\ i_1)=(2,\ 1)$ 是容许偶，因为 $u_1=2\mathrm{V}$，$i_1=1\ \mathrm{A}$ 符合元件约束。而 $(u_2,\ i_2)=(2,\ 5)$ 就不是这个元件的容许偶。关于时变或时不变元件的一般性定义，是从

容许偶的概念作出的。

定义 1.1 设$(u_1(t),\ i_1(t))$是元件的任一容许偶，τ 是任一实常数。如果$(u_1(t-\tau), i_1(t-\tau))$也是容许偶，就把元件定义为时不变元件。只要对于某个特殊的容许偶、某个特殊的 τ，$(u_1(t-\tau),\ i_1(t-\tau))$ 不是容许偶，则元件是时变元件。

定义 1.1 中的 $u_1(t-\tau)$（或 $i_1(t-\tau)$）不过是把电压波形 $u_1(t)$（或电流波形 $i_1(t)$）在时间上作一平移，见图 1-2。这个事实是大家熟知的。

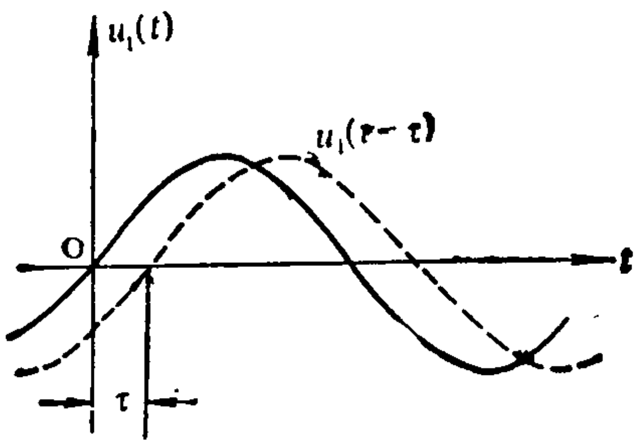

图 1-2　交流电压的平移

例 1　交流电压源

设电源电压 $u(t)=U_m \sin\omega t$。它的容许偶的一般形式是$(U_m \sin\omega t, i)$，其中 i 是任意合理的时间函数。随意给容许偶一个时间平移，平移后的电压 $u_1(t-\tau)=U_m \sin(\omega t-\omega\tau)$ 就是另外一个电源的电压了。平移后的偶一般不是容许偶。所以交流电压源是时变元件。但一般并不强调这一点，因为人们总是把它看成激励。直流电源是时不变的。

例 2　电阻器

定常电阻器的电阻 $R=\text{const}$。它的任一容许偶是 $(u_1(t),\ i_1(t))=(Ri_1(t),i_1(t))$。其中 $i_1(t)$ 可以是任意时间函数。作另一个偶(即平移偶)：$(Ri_1(t-\tau),\ i_1(t-\tau))$，它仍是容许偶。所以这元件是时不变的。

设电阻是时间函数 $R(t)$。它的任一容许偶是 $(u_1(t),\ i_1(t))=(R(t)i_1(t),\ i_1(t))$。作另一个偶，即平移偶：$(u_1(t-\tau),\ i_1(t-\tau))=(R(t-\tau)i_1(t-\tau),\ i_1(t-\tau))$，它是不是容许偶呢？电阻器的电阻是 $R(t)$，不是 $R(t-\tau)$。当电流是 $i_1(t-\tau)$ 时，电压应是 $R(t)i_1(t-\tau)$，所以 $(R(t-\tau)i_1(t-\tau),i_1(t-\tau))$ 不是容许偶，元件是时变的。

例 3　电感器

定常电感器的电感 $L=\text{const}>0$。它的任一容许偶是 $(u_1(t),\ i_1(t))=\left(L\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t},\ i_1(t)\right)$。容易验证它是时不变元件。

设电感是时间函数 $L(t)$，它的任一容许偶是 $(u_1(t),\ i_1(t))=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L(t)i_1(t)),\ i_1(t)\right)$。当电流是 $i_1(t-\tau)$ 时，容许的电感电压是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L(t)i_1(t-\tau))\neq\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L(t-\tau)i_1(t-\tau))$，作 $(u_1(t),\ i_1(t))$ 的平移偶 $(u_1(t-\tau),\ i_1(t-\tau))=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L(t-\tau)i_1(t-\tau),\ i_1(t-\tau)\right)$，这个偶的电压不是容许电压，因此平移偶不是容许偶，元件是时变的。

例 4　电容器

定常电容器是时不变元件。电容 $C(t)$ 是时间函数时，元

件是时变的。推理过程与例 3 相似。

以上回答了什么是时变元件。下一个问题是，怎样才能获得时变元件。

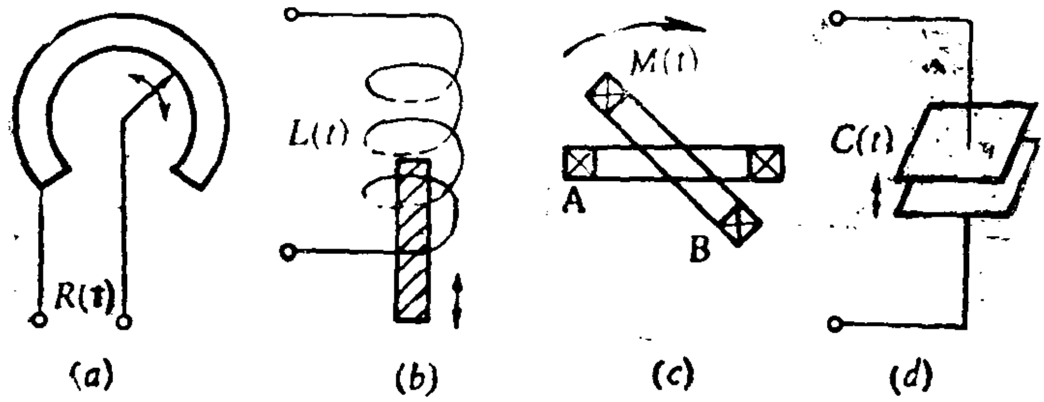

图 1-3　获得时变元件的示意图

参看图 1-3。反复转动线性电位器的旋纽，可得到线性时变电阻 $R(t)$。反复上下移动线圈的铁心(忽略铁磁材料的非线性)，可得到线性时变电感 $L(t)$。使空心线圈 B 旋转，A、B 线圈间的互感不断变化，可得到线性时变互感 $M(t)$。反复上下移动线性电容器的一块极板，可得到线性时变电容 $C(t)$。

因此，利用机械运动可以使元件成为时变的。电机就是用旋转线圈的方法使互感成为时变的，类似图 1-3(c)。

但是，还可以有另一种情况。设想一个非线性的时不变电容器。非线性电容器的电荷 q 不和电压 u 成正比，而是 u 的非线性函数，记作

$$q=f(u)$$

假设

$$u=U_0+u_1(t)+u_2(t)$$

其中 U_0 是固定的直流电压，$u_1(t)$ 是交流电压，但它的变化规律固定。把 $(U_0+u_1(t))$ 看成偏置电压。另外设电压 u_2 充分小。将 $f(u)$ 在偏置电压处作泰勒级数展开，而且只取一阶近似，得

$$
\begin{aligned}
q=f(U_0+u_1(t)+u_2(t))&\approx f(U_0+u_1(t))\\
&\quad+f'(U_0+u_1(t))\cdot u_2(t)\\
&=q_1(t)+q_2(t)=q_1(t)+C(t)\cdot u_2(t)
\end{aligned}
$$

式中

$$
C(t)=f'\,(U_0+u_1(t))=\left.\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=U_0+u_1(t)}
$$

电荷 q 由二个分量构成。第一个分量 $q_1(t)$ 是一个与 u_2 无关的时间函数。第二个分量 $q_2(t)$ 和 u_2 成正比，比例系数 $C(t)$ 也是和 u_2 无关的时间函数。对 u_2 讲，第二个分量 q_2 和 u_2 的关系就相当于一个线性时变电容器。读者有机会学习电子线路时，可能会碰到这种“时变”电容。

现以电容器的各种情况为例 列成表 1-1。本书以后只讨论线性时变元件，即表中的第三种情况。当然，它包含了第一种情况。

表 1-1

$q=Cu$	$C=\text{const}$	线　性	时不变
$q=f(u)$	$f(u)$ 是非线性函数，例如 $q=5u_1+u_1^2$	非线性	时不变
$q=C(t)u$	$C(t)$ 与 u(或 q) 无关，例如 $q=(3+\sin\omega t)u$	线　性	时　变
$q=f(u,t)$	对 u 讲是非线性函数关系，例如 $q=(3+\sin\omega t)(u+u^3)$	非线性	时　变

最后，从容许偶的角度介绍“线性”元件的定义。设

$(u_1(t), i_1(t))$、$(u_2(t), i_2(t))$是元件的任意两个容许偶，a、b是任意二个常数。如果$(au_1(t)+bu_2(t),\ ai_1(t)+bi_2(t))$也是容许偶，这元件叫作线性的，否则叫作非线性的。

例　设电容$C(t)$是时变的，它的变化与电压u或电荷q无关。

$$i_1=\frac{d}{dt}(C(t)u_1),\quad i_2=\frac{d}{dt}(C(t)u_2)$$

用常数a乘第一式、常数b乘第二式然后相加，得

$$\begin{aligned}(ai_1+bi_2)&=a\frac{d}{dt}(C(t)u_1)+b\frac{d}{dt}(C(t)u_2)\\&=\frac{d}{dt}[C(t)(au_1+bu_2)]\end{aligned}$$

上式表明，(au_1+bu_2, ai_1+bi_2)也是容许偶，所以元件是线性的。图 1-3 的时变元件模型指出，时变的原因是机械运动，和电压、电流无关，从而这种模型下的时变元件是线性的。

本书讨论的电路，是由独立电源(激励)和线性时变的电阻器、电感器、电容器、线性时变受控源组成的电路，一般称作线性时变电路。

§ 1-2　时变元件的无源性和有源性

不论是什么二端元件，它吸收的瞬时功率$p(t)$总是等于电压$u(t)$和电流$i(t)$的乘积(参看图 1-4)。$p(t)$就是外部电路输送到二端元件的功率。功率对时间的积分，就是外部

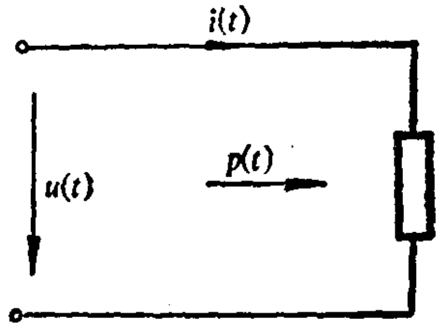

图 1-4　二端元件

电路输送给元件的能量。线性无源元件和有源元件是从能量角度定义的。

设$(u(t), i(t))$是线性二端元件的一个容许偶，元件吸收的瞬时功率：

$$p(t)=u(t)i(t)$$

对上式作积分：

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)i(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1\text{-}5)$$

式中 $W(t)$代表了从$-\infty$ 到 t 这一段时间里元件获得的总能量（或外部电路输入的总能量）。这里假定$u(-\infty)=0$，$i(-\infty)=0$。

定义 1.2 如果对于元件的任一容许偶，在任何时刻 t，恒有

$$W(t)\geqslant 0$$

元件定义为无源元件。只要对于某个特殊的容许偶、某个特殊时刻 t_a，$W(t_a)<0$，元件定义为有源元件。

定义 1.2 表达的意思是：从 $t=-\infty$ 以后，其实是从 $u=0$、$i=0$ 的时刻以后，对于任何容许偶，无源元件在任何时候吸收的总能量不能是负的。反之，如果元件在某种容许偶之下，它吸收的总能量可以是负的，或者说可以向外部提供能量，它就定义为有源元件。

下面分别考察时变的电阻器、电感器和电容器。

(1) 时变电阻器

时变电阻器吸收的瞬时功率是：

$$p(t)=u(t)i(t)=R(t)[i(t)]^2$$

设电阻值是非负的，$R(t)\geqslant 0$。对于任何容许电流 $i(t)$，$p(t)\geqslant 0$，元件总是从外部电路吸收功率而不能发出功率，$W(t)>0$。电阻器是无源元件。

(2) 时变电感器

电感的模型如图 1-5 所示。铁心的向上或向下运动使电感器成为时变的。当线圈中电流 $i\neq 0$ 时，铁心要受到磁场作用的力。当铁心在图 1-5 中所示位置时，这作用力是向上的力 F。如果铁心此时向上运动（这时电感增加，$\mathrm{d}L(t)/\mathrm{d}t>0$），运动方向与力 F 方向一致，磁场力 F 作功，有机械功输出，外界获得机械能。如果铁心向下运动（这时电感减少，$\mathrm{d}L(t)/\mathrm{d}t<0$），外力要克服磁场力 F 作功，有机械能输入。正是由于当 $\mathrm{d}L(t)/\mathrm{d}t<0$ 时，有可能输入机械能，时变电感器才可能成为有源元件。

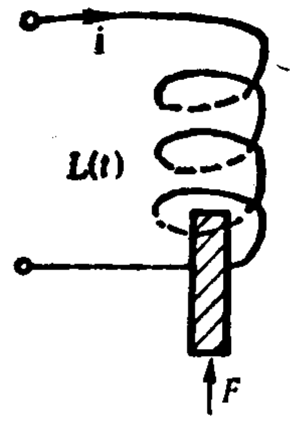

图 1-5

首先研究一下定常电感器：$L=\text{const}>0$。这时，铁心虽然受力但不运动，机械功等于零。线圈吸收的瞬时功率是

$$p(t)=u(t)i(t)=Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

大家知道，$p(t)$ 可以取正值或负值。负值对应于磁场能量减少。但是式(1-5)定义的总能量 $W(t)$ 是

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^{t} Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}Li^2(t)\Big|_{-\infty}^{t}=\frac{1}{2}Li^2(t)\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1-7}$$

不论 $i(t)$ 如何变化，元件吸收的总能量是非负的。由于没有机械功参与进来，这能量全部转化为磁场能量 $Li^2/2$。场能当然不能是负的；即使电感元件释放出磁场能量返回外部电路，这也是由于在此之前元件已从外部电路获得了更多的能量，$W(t)$ 不会小于零。所以定常电感器是无源元件。

对于时变电感器 $L(t)>0$，

$$p(t)=u(t)i(t)=i\frac{\mathrm{d}(L(t)i)}{\mathrm{d}t}$$

因为

$$i\frac{\mathrm{d}(L(t)i)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(L(t)i^2)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}i^2\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (1\text{-}8)^{注}$$

所以

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t}p(t)\mathrm{d}t=\frac{L(t)i^2}{2}\bigg|_{t=-\infty}^{t}+\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}i^2\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

已规定 $i(-\infty)=0$，则

$$W(t)=\frac{L(t)i^2}{2}+\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}i^2\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \qquad (1\text{-}9)$$

上式可解释如下。由外部电路输入的总能量 W，一部分转化为磁场能量($L(t)i^2/2$)，一部分转化为机械能(积分项)。磁场能量不会是负的($L(t)>0$)，但机械能却可正可负。

设 $\mathrm{d}L(t)/\mathrm{d}t\geqslant 0$，即电感不变小。当 $i\neq 0$、$\mathrm{d}L(t)/\mathrm{d}t>0$ 时，被积函数大于零，积分值大于零，代表有机械能输出。因此由外部输入的总能量 $W(t)>0$。根据定义 1.2，元件是无源元件。

注　读者可将 $\frac{\mathrm{d}(L(t)i)}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}(L(t)i^2)}{\mathrm{d}t}$ 展开，检验式(1-8)的正确性。

下面讨论 $dL(t)/dt \geqslant 0$ 不成立的情况。设在某个区间 $[t_1, t_2]$ 里 $dL(t)/dt < 0$ 即电感变小，那末一定可以选择某种特殊的容许电流和特殊的时刻 t_3，使 $W(t_3) < 0$，图 1-6(b)是这种容许电流波形 $i(t)$。在区间 $[t_1, t_2]$ 之外，$i(t) = 0$。t_3 在此区间外，因此 $i(t_3) = 0$，此时磁场能量也是零。

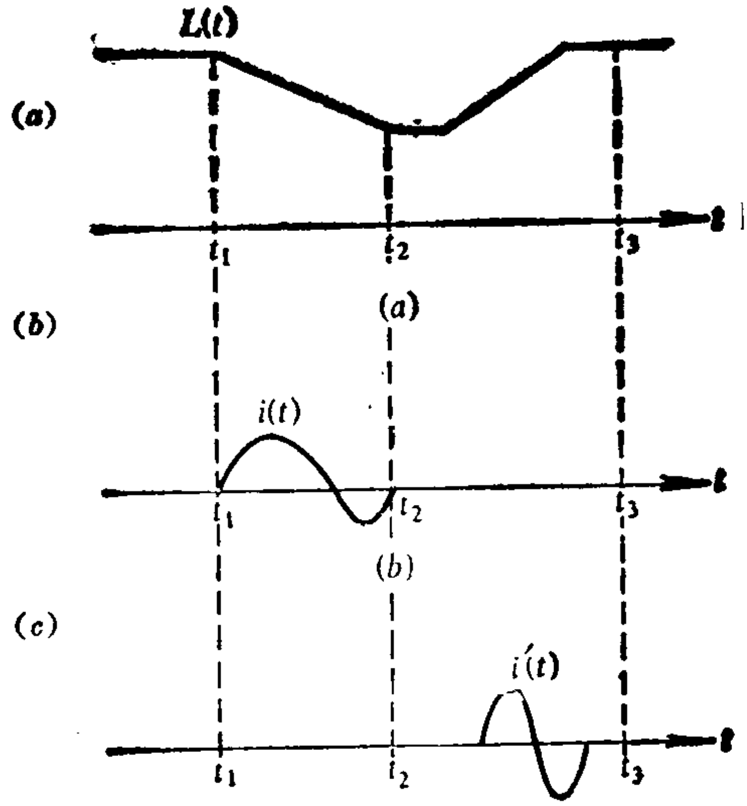

图 1-6 时变电感和容许电流波形

$$\therefore \quad W(t_3) = \int_{-\infty}^{t_3} ui\,dt$$

$$= \frac{L(t)i^2}{2}\Big|_{-\infty}^{t_3} + \int_{-\infty}^{t_3} \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(t)}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} i^2 \frac{dL(t)}{dt} dt < 0$$

由于 $dL(t)/dt < 0$，输出的机械能是负的，这代表着实际

上有机械能输入，它转化为电能送给外部电路。外部电路获得了总能量$|W(t_3)|=-W(t_3)$。根据定义1.2，元件是有源的。

读者注意，假设换一个电流波形，如图1-6(c)所示的$i'(t)$，由于在$i'(t)$不为零的区间内$dL(t)/dt>0$，$W(t)$一定大于或等于零(其中t是任意时间)。即使如此，由于在电流$i(t)$的情况下元件吸收的总能量是负的，根据定义1.2，元件仍是有源的。

由此可见，$L>0$和$dL(t)/dt\geqslant 0$是电感器为无源元件的充分必要条件。

上面的结论可以推广到线圈间有互感的场合。设两线圈的电感矩阵$\boldsymbol{L}$是对称正定的，这条件一般成立。输入到线圈的功率是：

$$p=i_1u_1+i_2u_2=\boldsymbol{i}^T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}^T\frac{d\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{i}}{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{i}^T\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{i}}{dt}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^T\frac{d\boldsymbol{L}(t)}{dt}\boldsymbol{i}$$

$$\therefore\ W(t)=\int_{-\infty}^{t}p\,dt=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^T\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{i}^T\frac{d\boldsymbol{L}(t)}{dt}\boldsymbol{i}\,dt$$

上式中等号右边第一项(磁场能量)不会是负的。如果$d\boldsymbol{L}/dt$(半)正定，积分项(机械功)也不是负的。仿照上面的推理，可得出电感线圈是无源的充分必要条件是：$\boldsymbol{L}$矩阵对称正定，对称矩阵$d\boldsymbol{L}/dt$(半)正定。例如图1-1(d)中互感$M(t)$是时变的，

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}L_1 & M(t)\\ M(t) & L_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{dM(t)}{dt}\\ \dfrac{dM(t)}{dt} & 0\end{pmatrix}\qquad(1\text{-}10)$$