组合数学

习题解答

曹汝成 编著

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是根据作者编著的《组合数学》而编写的习题解答书，除详尽解答原书中233道习题外，还增补了85道习题及三份自测题。习题内容涉及组合数学的基础知识，包括排列和组合、容斥原理、递推关系、生成函数、整数的分拆、鸽笼原理和Ramsey定理、Pólya计数定理等。习题的解答注重方法、技巧和解法的正确表述，条理清楚，对读者学习和掌握组合数学的思想、方法和理论有较大的帮助。

本书可作为大专院校数学系及相关专业师生、中学数学教师的参考书，亦可供有关专业科技工作者学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

组合数学习题解答 / 曹汝成编著.—广州：华南理工大学出版社，2000.11（2002.3 重印）
ISBN 7-5623-1604-X

Ⅰ.组… Ⅱ.曹… Ⅲ.组合数学-题解 Ⅳ.O157-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第48430号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学17号楼，邮编 510640）
发行电话：020-87113487 87111048（传真）
E-mail: scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：潘宜玲
印 刷 者：广州市新明光印刷有限公司
开 本：850×1168 1/32 印张：8.375 字数：210千
版 次：2002年3月第1版第2次印刷
印 数：4 001—7 000册
定 价：15.00元

前　言

组合数学是一个既历史悠久又充满活力的、新兴的数学分支。近几十年来，组合数学在诸如计算机科学、规划论、运筹学等新兴学科的推动和刺激下，取得了异常迅速的发展，而组合数学的发展进步又促进了这些学科的发展进步。今天，组合数学已焕发出青春，成为了最活跃、发展最为迅速的数学分支之一。

在我国，组合数学越来越受到人们的重视，开设组合数学课程的大专院校已越来越多。华南师范大学从 1981 年起就开始给数学系本科生开设组合数学选修课，至今已 20 年了。组合数学内容丰富、应用广泛，讲究方法和技巧，充满着迷人的魅力，因而受到学生们的普遍欢迎。但正是由于组合数学讲究思想方法，讲究解题技巧，学生们在学习过程中普遍感到组合数学的思想方法难以掌握，特别是习题难做。面对一道稍难一点的组合数学习题，不少学生往往束手无策，不知从何处着手，不知应该怎样去思考。由于思路不正确或不清晰，往往导致解法错误或解法笨拙，即使想出正确的解法也往往不能简明清楚地表述出来。有鉴于此，在多年来授课讲稿的基础上，本人撰写了《组合数学》(华南理工大学出版社 2000 年 2 月出版）和这本《组合数学习题解答》，目的是帮助读者克服上述困难，更好地掌握组合数学的思想、方法和理论。

本书共包含 318 道习题，其中一部分习题选自书后所列举的参考书，一部分习题经作者改编，有小量习题选自数学竞赛试题，有相当一部分习题则是作者自编的。为了帮助学生做好学期

末考试前的复习工作，还编拟了自测题一和自测题二。另外，编拟了自测题三，为的是让参加广东省高等教育师范类数学专业（本科）自学考试的读者了解组合数学试题的题型和模式。书中给出全部习题和自测题的解答。习题的解答力求做到详尽、条理清楚，注重方法和技巧，注意解法的文字表述，以助于读者提高分析和解决组合数学问题的能力。

限于水平，本书难免有缺点和错误，敬请读者批评指正。

曹汝成

2000 年 8 月于华南师范大学

目　　录

第一章　排列和组合 …………………………………………（1）
§1.1　内容提要…………………………………………（1）
§1.2　习题与解答………………………………………（8）
第二章　容斥原理及其应用 ……………………………（50）
§2.1　内容提要…………………………………………（50）
§2.2　习题与解答………………………………………（54）
第三章　递推关系 ………………………………………（74）
§3.1　内容提要…………………………………………（74）
§3.2　习题与解答………………………………………（79）
第四章　生成函数…………………………………………（121）
§4.1　内容提要 ………………………………………（121）
§4.2　习题与解答 ……………………………………（124）
第五章　整数的分拆………………………………………（155）
§5.1　内容提要 ………………………………………（155）
§5.2　习题与解答 ……………………………………（158）
第六章　鸽笼原理和 Ramsey 定理 ……………………（172）
§6.1　内容提要 ………………………………………（172）
§6.2　习题与解答 ……………………………………（175）
第七章　Pólya 计数定理 ………………………………（192）
§7.1　内容提要 ………………………………………（192）
§7.2　习题与解答 ……………………………………（203）
附录一　自测题……………………………………………（228）
附录二　自测题解答………………………………………（236）

附录三……………………………………………………（256）

附表 1　二项式系数$\binom{n}{k}$……………………………（256）

附表 2　第一类 Stirling 数$S_1(n, k)$　…………………（257）

附表 3　第二类 Stirling 数$S_2(n, k)$　…………………（257）

附表 4　部分数为 k 的 n-分拆数$P_k(n)$　………………（258）

附表 5　n-分拆数$P(n)$　……………………………………（259）

参考文献……………………………………………………（260）

第一章　排列和组合

§1.1　内容提要

相等原则：设 A，B 是两个有限集，如果存在由 A 到 B 上的一个一一对应映射（即双射），则 $|A|=|B|$.

加法原则：设 A 是有限集，$A_i \subseteq A$（$i=1, 2, \cdots, k$），如果 $A=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ 且 $A_i \cap A_j=\varnothing (1 \leqslant i<j \leqslant k)$，则

$$|A|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|.$$

加法原则可用文字表述为：如果有限集 A 的全部元素被分成互不相容的（即没有公共元素的）k 类，其中属于第 i（$1 \leqslant i \leqslant k$）类的元素有 n_i 个，则

$$|A|=\sum_{i=1}^{k} n_i.$$

加法原则亦可用文字表述成：如果做一件事情的全部方法可分成互不相容的 k 类，其中属于第 i（$1 \leqslant i \leqslant k$）类的方法有 n_i 种，则做这件事情的方法共有 $\sum_{i=1}^{k} n_i$ 种.

定理 1.1　已知做一件事要经过两个步骤，完成第一个步骤的方法有 m 种，完成第一个步骤之后，完成第二个步骤的方法有 n 种，则做这件事的方法共有 mn 种.

定理 1.2（乘法原则）　已知做一件事要依次经过 k 个步骤，且在已完成前面 $i-1$（$1 \leqslant i \leqslant k$）个步骤的情况下，完成第

i 个步骤有 n_i 种方法，则做这件事的方法共有 $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$ 种．

定义 1.1 设 A 是 n 元集，如果序列 $a_1a_2\cdots a_r$ 中的 r 个元 a_1，a_2，…，a_r 都属于 A 且彼此相异，则称序列 $a_1a_2\cdots a_r$ 是 n 元集 A 的一个 r-排列，并称 a_k（$1\leqslant k\leqslant r$）是该 r-排列的第 k 个元，或称 a_k 在该 r-排列中排在第 k 位．

定义 1.2 n 元集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 n-排列称为 n 元集 A 的一个全排列，亦称为由 a_1，a_2，…，a_n 作成的一个全排列．

定理 1.3 设 n，$r(n\geqslant r)$ 是正整数，以 $P(n, r)$ 表示 n 元集的 r-排列的个数，则

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

推论 1.1 n 元集的全排列的个数为 $n!$．

定义 1.3 设 A 为 n 元集，如果序列 $a_1a_2\cdots a_r$ 的元素都属于 A，则称序列 $a_1a_2\cdots a_r$ 是 n 元集 A 的一个 r-可重复排列．

由定义 1.3 可知，在 n 元集 A 的一个 r-可重复排列中，A 中的同一个元素可以出现多次．

定理 1.4 n 元集的 r-可重复排列的个数为 n^r．

定义 1.4 由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_k 个 a_k 组成的集合 M 记为 $M=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$，$M$ 称为多重集，也称 M 是一个 n-多重集，其中 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$．

定义 1.5 设 $M=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$，$\pi$ 是集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 的一个 n-可重复排列且 π 中有 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_k 个 a_k，则称 π 是多重集 M 的一个全排列，此时也称 π 是由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_k 个 a_k 作成的全排列．

定理 1.5 多重集 $M=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$ 的全

排列的个数为$\dfrac{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

定义 1.6 设$M=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$和$A=\{s_1\cdot a_1, s_2\cdot a_2, \cdots, s_k\cdot a_k\}$都是多重集，且$0\leqslant s_i\leqslant n_i$ $(i=1, 2, \cdots, k)$，则称A是M的一个子集. 如果$s_1+s_2+\cdots+s_k=r$，则称A是M的一个r-子集.

定义 1.7 设$M=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$是多重集，$\pi$是$M$的某个$r$-子集的全排列，则称$\pi$是$M$的一个$r$-排列.

定义 1.8 由$p\times q$个单位正方形拼成的长为p、宽为q的长方形叫做一个$p\times q$棋盘.

定理 1.6 沿$p\times q$棋盘上的线段，由一个顶点到其对顶点的最短路的条数为$\dfrac{(p+q)!}{p!\cdot q!}$.

定义 1.9 在Oxy坐标平面上，横坐标与纵坐标都是整数的点叫做整点. 由任一个整点(x, y)到整点$(x+1, y+1)$或$(x+1, y-1)$的有向线段叫做一个T步.

定义 1.10 由整点A到整点B的一条T路是指由若干个T步组成的起点为A、终点为B的有向折线.

定理 1.7 如果存在由整点$A(a, \alpha)$到整点$B(b, \beta)$的T路，则

(1) $b>a$.

(2) $b-a\geqslant|\beta-\alpha|$.

(3) $a+\alpha$与$b+\beta$的奇偶性相同.

上述三个条件合称为T条件.

定理 1.8 设整点$A(a, \alpha)$与整点$B(b, \beta)$满足T条件，则由A到B的T路的条数为

$$\frac{(b-a)!}{\left(\dfrac{b-a}{2}+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)!\left(\dfrac{b-a}{2}-\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)!}.$$

定理 1.9（反射原理） 设整点$A(a, \alpha)$与整点$B(b, \beta)$满足T条件，且$\alpha>0$，$\beta>0$，$b-a\geqslant\alpha+\beta$，则由A到B且经过x轴（即与x轴有交点）的T路的条数等于由$A'(a, -\alpha)$到B的T路的条数，为

$$\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!}.$$

定理 1.10 设整点$A(a, \alpha)$与整点$B(b, \beta)$满足T条件且$\alpha>0$，$\beta>0$，$b-a\geqslant\alpha+\beta$，则由A到B且不经过x轴的T路的条数为

$$\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)!\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)!}-\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!}.$$

定理 1.11 （1）由点$O(0, 0)$到点$V(2n, 0)$，中途不经过x轴且位于上半平面的T路的条数为$\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

（2）由点$O(0, 0)$到点$V(2n, 0)$且位于上半平面的T路的条数为$\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}$.

定理 1.12 以S_{2n}表示满足条件

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=n \\ x_1+x_2+\cdots+x_j<\frac{1}{2}j \quad (j=1, 2, \cdots, 2n-1) \\ x_j=0 \text{ 或 } 1 \quad (j=1, 2, \cdots, 2n) \end{cases}$$

的解$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$的集合，则

$$|S_{2n}|=\frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}.$$

定理 1.13 以 T_{2n}表示满足条件

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=n \\ x_1+x_2+\cdots+x_j\leqslant\dfrac{1}{2}j \quad (j=1,2,\cdots,2n-1) \\ x_j=0 \text{ 或 } 1 \quad (j=1,2,\cdots,2n) \end{cases}$$

的解（x_1，x_2，…，x_{2n}）的集合，则

$$|T_{2n}|=C_{n+1}=\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}.$$

定义 1.11 集合 A 的含有 r 个元素的子集称为 A 的一个 r-组合.

定理 1.14 设 n 是正整数，r 是非负整数，则

$$\binom{n}{r}=\begin{cases} 0, \text{当 } r>n \text{ 时}; \\ \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, \text{当 } 0\leqslant r\leqslant n \text{ 时}. \end{cases}$$

定理 1.1′ 从一个 n 元排列中选取 k 个元作组合，使得该组合中任何两个元在原排列中至少相隔 r 个元. 以$f_r(n, k)$ 表示作成的不同组合的个数，则

$$f_r(n,k)=\binom{n-kr+r}{k}.$$

定义 1.12 从集合 A 中可重复地选取 r 个元作成的多重集称为集合 A 的一个 r-可重复组合.

定理 1.15 n 元集的 r-可重复组合的个数为$\dbinom{n+r-1}{r}$.

推论 1.2 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的非负整数解的个数为$\dbinom{n+r-1}{r}$.

推论 1.3 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$（$r\geqslant n$）的正整数解的个数为$\dbinom{r-1}{r-n}$.

定理 1.16 (1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \quad (n\geqslant k\geqslant 0)$.

(2) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \quad (n>k\geqslant 1)$.

(3) $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad (n\geqslant k\geqslant 1)$.

(4) $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} \quad (n\geqslant k\geqslant 1)$.

(5) $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k} \quad (n>k\geqslant 0)$.

定理 1.17 $\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \quad (n\geqslant m\geqslant k)$.

定理 1.18（多项式定理） 设 n 是正整数，x_1，x_2，…，x_k 是任意k 个实变数，则

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n \\ n_i(i=1,2,\cdots,k) \\ \text{是非负整数}}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}.$$

推论 1.4（二项式定理） 设 n 是正整数，x 和 y 是任意实数，则

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

推论 1.5 设 n 是正整数，x 是任一实数，则

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

推论 1.6 设 n 是正整数，则

(1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

(2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}=0.$

定理 1.2′ (1) $\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\begin{cases}1, 若\ n=m;\\0, 若\ n>m.\end{cases}$

(2) $\sum_{s=m}^{n}\binom{s}{m}=\binom{n+1}{m+1}\quad(n\geqslant m).$

(3) $\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}\quad(n+m\geqslant r).$

(4) $\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}^{2}=\binom{2n}{n}$(范德蒙恒等式).

引理 1.1 设 n,s 是非负整数且 $n\geqslant s$,对于每个非负整数 $k(s\leqslant k\leqslant n)$,$a_{k,i}(i=s,s+1,\cdots,k)$ 是复数,则

$$\sum_{k=s}^{n}\sum_{i=s}^{k}a_{k,i}=\sum_{i=s}^{n}\sum_{k=i}^{n}a_{k,i}.$$

定理 1.19 (二项式反演公式) 设 $\{a_n\}_{n\geqslant0}$和 $\{b_n\}_{n\geqslant0}$是两个数列,s 是非负整数,如果对任意的不小于 s 的整数 n,都有

$$a_n=\sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}b_k,$$

则对任意的不小于 s 的整数 n,都有

$$b_n=\sum_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k.$$

定理 1.3′ 以 $g(m,n)$ 表示由 m 元集 A 到 n 元集 B 的满射的个数,则

$$g(m,n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{m}.$$

定理 1.20 (多元二项式反演公式) 设 s_1,s_2,…,s_r 是 r 个给定的非负整数,又设对任意的 r 个非负整数 n_1,n_2,…,

n_r ($n_i \geqslant s_i$, $i=1, 2, \cdots, r$), $f(n_1, n_2, \cdots, n_r)$及 $g(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 都是实数，且

$$f(n_1,n_2,\cdots,n_r) = \sum_{\substack{s_i \leqslant k_i \leqslant n_i \\ i=1,2,\cdots,r}} \prod_{i=1}^{r} \binom{n_i}{k_i} g(k_1,k_2,\cdots,k_r),$$

则对任意 r 个非负整数n_1, n_2, $\cdots$, n_r ($n_i \geqslant s_i$, $i=1, 2, \cdots, r$)，有

$$g(n_1,n_2,\cdots,n_r) = \sum_{\substack{s_i \leqslant k_i \leqslant n_i \\ i=1,2,\cdots,r}} \prod_{i=1}^{r} (-1)^{n_i-k_i} \binom{n_i}{k_i} f(k_1,k_2,\cdots,k_r).$$

§1.2 习题与解答

1. 从 1 至 100 的整数中不重复地选取两个数组成有序对 (x, y)，使得 x 与 y 的乘积 xy 不能被 3 整除，共可组成多少对?

解：对任一个有序正整数对 (x, y)，要使 $x \neq y$ 且 $3 \nmid xy$ 当且仅当 $x \neq y$，$3 \nmid x$ 且 $3 \nmid y$. 因为从 1 至 100 的整数中，不能被 3 整除的整数有 $100 - \left[\frac{100}{3}\right] = 67$ 个，故所求的有序对的个数为 $67 \times 66 = 4\ 422$.

2. 把 $2n$ 个人分成 n 组，每组 2 人，有多少种不同的分组方法?

解：以 a_n 表示把 $2n$ 个人分成 n 组，每组 2 人的不同的分组方法数. 设甲是其中一人. 显见 $a_1 = 1$，当 $n \geqslant 2$ 时可依如下两个步骤去完成分组：先确定与甲同组的人，有 $2n-1$ 种方法；再把其余的 $2n-2$ 个人分成 $n-1$ 组，每组 2 人，有 a_{n-1}种方法. 由乘法原则，有

$$a_n = (2n-1) \cdot a_{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot a_{n-2}\\
&= \cdots\\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot a_1\\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1\\
&= \frac{(2n)!}{2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2},
\end{aligned}
$$

所以
$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}.$$

3. 整除 88200 的正整数有多少个？

解：因 $88200 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2$，所以，整除 88200 的正整数的个数为

$$(3+1)\times(2+1)^3 = 4\times 3^3 = 108.$$

4. 整除 510510 的正奇数有多少个？

解：因 $510510 = 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 17$，所以，整除 510510 的正奇数的个数等于 $3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 17$ 的正约数的个数，为

$$(1+1)^6 = 2^6 = 64.$$

5. 在 $m\times n$ 棋盘中选取两个相邻的方格（即有一条公共边的两个方格），有多少种不同的选取方法？

解：设从一个 $m\times n$ 棋盘 $A_{m\times n}$ 中选取两个相邻的方格的方法共有 N 种，则在这 N 种选取方法中，两个方格都取自 $A_{m\times n}$ 的第 i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 行的选取方法有 $n-1$ 种，两个方格都取自 $A_{m\times n}$ 的第 j $(j=1, 2, \cdots, n)$ 列的选取方法有 $m-1$ 种．由乘法原则和加法原则，有

$$N = (n-1)\times m + (m-1)\times n = 2mn - m - n.$$

6. 有多少个能被 3 整除而又不含数字 6 的三位数？

解：注意到一个正整数能被 3 整除当且仅当它的各位数字之和能被 3 整除，于是可通过如下方法依次写出百位、十位和个位数字去作出满足题意的三位数：

百位数字可选 1，2，3，4，5，7，8，9 之一，有 8 种选法；十位数字可选 0，1，2，3，4，5，7，8，9 之一，有 9 种选法. 设已选的百位数字与十位数字之和除以 3 的余数为 d，若 $d=0$，则个位数字可选 0，3，9；若 $d=1$，则个位数字可选 2，5，8；若 $d=2$，则个位数字可选 1，4，7，因此个位数字的选取方法有 3 种. 由乘法原则，能被 3 整除但又不含数字 6 的三位数有 $8\times9\times3=216$ 个.

7. 以 A 表示集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全部非空子集所成之集. 设 $a\in A$，以 $\delta(a)$ 表示 a 中诸元素之和，求 $\sum\limits_{a\in A}\delta(a)$.

解：设 k 是任一个不大于 n 的正整数，则在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 2^n-1 个非空子集中，包含 k 的子集有 2^{n-1}个，故

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A}\delta(a) &= \sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}k \\ &= 2^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\cdot 2^{n-2}.\end{aligned}$$

8. 求万位数字不是 5，个位数字不是 2 且各位数字相异的五位数的个数.

解：万位数字不是 5 且各位数字相异的五位数有 $8\cdot P(9,4)=24192$ 个，其中个位数字是 2 的五位数有 $7\cdot P(8,3)=2352$ 个，故满足题意的五位数的个数为 $24192-2352=21840$.

9. 求不含数字 2 和数字 7，各位数字相异且大于 5400 的四位数的个数.

解：设所求的满足题意的四位数共有 N 个，它们可分成如下两类：

①千位数字为 5 的四位数.

因为百位数字可以是 4，6，8，9 这四个数之一，故属于此类的四位数有 $4\cdot P(6,2)=120$ 个.

②千位数字大于 5 的四位数.

因为千位数字可以是 6，8，9 这 3 个数之一，故属于此类的四位数有 $3\cdot P(7,\ 3)=630$ 个.

由加法原则得

$$N=120+630=750.$$

10. 从 1，2，…，30 中选取 3 个相异的正整数，使得它们的和能被 3 整除，有多少种选取方法？

解：设所求为 N. 以 A_i（$i=0,\ 1,\ 2$）表示由集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 30\}$ 中的除以 3 所得余数为 i 的整数所成之集，则 $|A_0|=|A_1|=|A_2|=10$. 满足题意的 N 种选取方法可分成如下两类：

①使得所选 3 个整数都属于同一个 A_i（$i=0,\ 1,\ 2$）的选取方法.

属于此类的选取方法共有 $3\cdot\binom{10}{3}=360$ 种.

②使得所选 3 个整数分别属于 A_0，A_1，A_2 的选取方法.

属于此类的选取方法共有 $10\times10\times10=1000$ 种.

由加法原则得

$$N=360+1000=1360.$$

11. 以 $g(n,\ k)$ 表示把 n 件相异的物件分给 k 个人，使得每人至少分得一件物件的不同方法数，求证：

$$g(n+1,k)=k\cdot g(n,k-1)+k\cdot g(n,\ k)\quad (n\geqslant k\geqslant 2).$$

证明：把 $n+1$ 件相异的物件 a_1，a_2，…，a_{n+1} 分给 k 个人，使得每人至少分得一件物件的不同分配方法共有 $g(n+1,\ k)$ 种，这些方法可分成如下两类：

①使得获得 a_{n+1} 的人只分得一件物件的分配方法.

可依如下两个步骤去作出属于此类的分配方法：先把 a_{n+1} 分给其中一个人，有 k 种方法；然后把余下的 n 件物件分给其余的 $k-1$ 个人，使得每人至少分得一件物件，有 $g(n,\ k-1)$ 种方法. 由乘法原则，属于此类的分配方法有 $k\cdot g(n,\ k-1)$ 种.