

奥林匹克数学

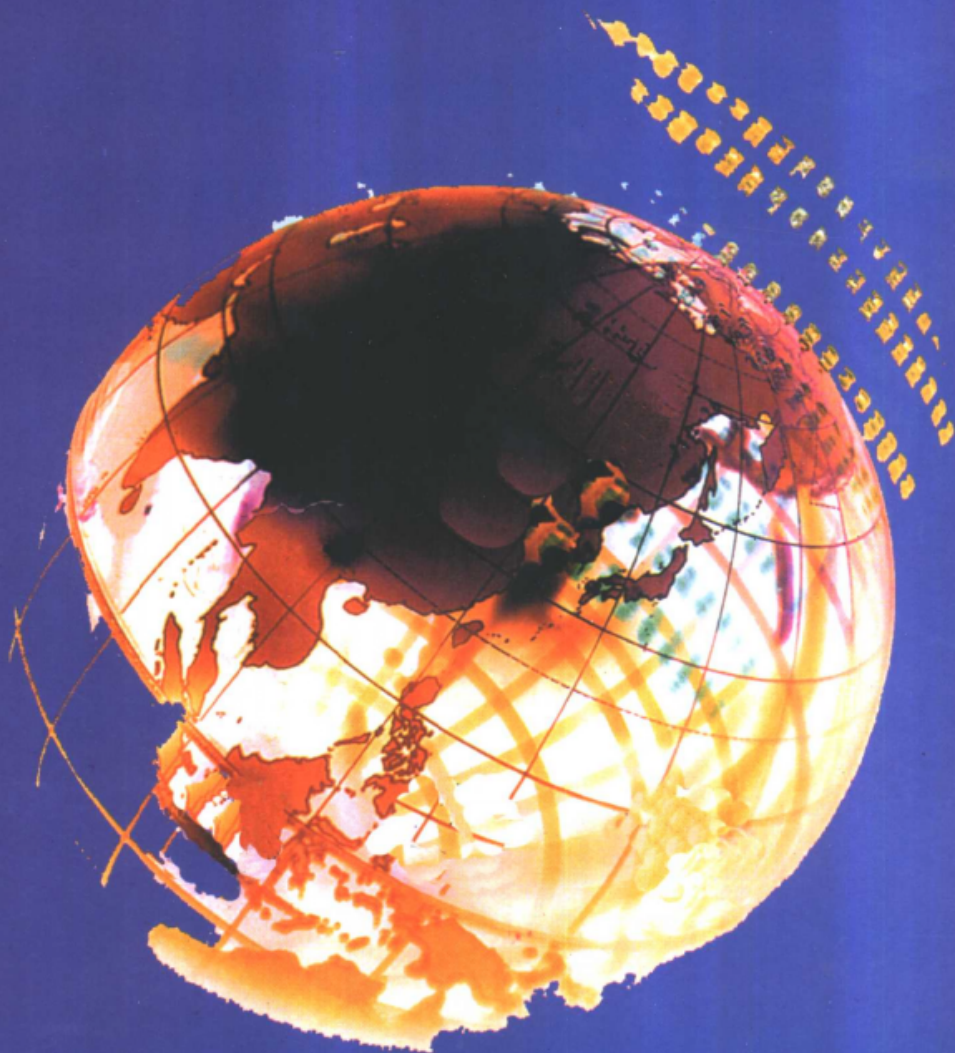
奥数

总主编
单 樽 熊 斌

测试

· 初三年级 ·

余红兵 葛 军 编



总主编
单 樽 熊 斌

奥数教程

三年级
四年级
五年级
六年级
初一年级
初二年级
初三年级
高一年级
高二年级
高三年级

奥数测试

三年级
四年级
五年级
六年级
初一年级
初二年级
初三年级
初中数学联赛考前训练
高中数学联赛考前训练

ISBN 7-5617-2981-2



9 787561 729816 >
G·1503 定价: 13.00元

奥数 测试

初三年级

总主编
单
增
熊
斌

余红兵 葛 军 编

华 东 师 范 大 学 · 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

奥数测试. 初三年级/余红兵, 葛军编. —上海: 华东师范大学出版社, 2002. 8
ISBN 7-5617-2981-2

I. 奥... II. ①余... ②葛... III. 数学课—初中—习题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 052709 号

奥 数 测 试 初 三 年 级

总 主 编 单 增 熊 斌

编 者 余红兵 葛 军

特约编辑 肖启华

封面设计 高 山

版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社

市场部 电话 021-62865537

传真 021-62860410

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

印 刷 者 苏州永新印刷包装有限责任公司

开 本 787×1092 16 开

印 张 10.25

字 数 221 千字

版 次 2002 年 8 月第一版

印 次 2002 年 8 月第一次

印 数 001-30 000

书 号 ISBN 7-5617-2981-2/G·1503

定 价 13.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

目 录

测试 1	一元二次方程	(1)
测试 2	可化为一元二次方程的方程(一)	(3)
测试 3	可化为一元二次方程的方程(二)	(5)
测试 4	一元二次方程的判别式	(7)
测试 5	根与系数的关系及其应用(一)	(9)
测试 6	根与系数的关系及其应用(二)	(11)
测试 7	二元二次方程组	(13)
测试 8	函数的基本概念与性质	(15)
测试 9	一次函数与反比例函数	(18)
测试 10	二次函数(一)	(20)
测试 11	二次函数(二)	(22)
测试 12	函数的最大值与最小值(一)	(24)
测试 13	函数的最大值与最小值(二)	(26)
测试 14	一元二次不等式	(28)
测试 15	锐角三角函数	(30)
测试 16	解直角三角形	(32)
测试 17	圆的基本性质	(34)
测试 18	直线与圆(一)	(36)
测试 19	直线与圆(二)	(38)
测试 20	两圆的位置关系	(40)
测试 21	圆中的比例线段	(42)
测试 22	四点共圆(一)	(44)
测试 23	四点共圆(二)	(45)
测试 24	一元二次方程的整数根(一)	(46)
测试 25	一元二次方程的整数根(二)	(47)
测试 26	不定方程(一)	(48)
测试 27	不定方程(二)	(49)
测试 28	$[x]$ 与 $\{x\}$	(50)
测试 29	几何定值问题	(51)
测试 30	三角形的“五心”	(52)
测试 31	几何不等式(一)	(53)
测试 32	几何不等式(二)	(54)
测试 33	极端原理	(55)

测试 34 数学建模	(56)
综合练习(一)	(58)
综合练习(二)	(59)
综合练习(三)	(60)
综合练习(四)	(61)
综合练习(五)	(63)
综合练习(六)	(65)
 参考答案与提示	 (67)

测试 1

一元二次方程

一、填空题(每小题 5 分,共 50 分)

- 1 已知 $x_1 = -2$ 是方程 $x^2 + kx + 2 = 0$ 的一个根,则该方程的另一根为 $x_2 =$ _____,且 $k =$ _____.
- 2 若 m, n 是方程 $x^2 + 2001x + 1 = 0$ 的两个根,则 $(m^2 + n^2) + 2001 \times (m + n) + 2001 =$ _____.
- 3 如果 a 是一元二次方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 的一个根, $-a$ 是一元二次方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 的一个根,那么 a 的值等于 _____.
- 4 若 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 $x^4 + x^2 + 2x - 1 =$ _____.
- 5 若 $x^2 - \frac{\sqrt{19}}{2}x + 1 = 0$, 则 $x^4 + \frac{1}{x^4} =$ _____.
- 6 若方程 $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ 与 $x^2 + 2cx - b^2 = 0$ 有一个相同的根,且 a, b, c 为一个三角形的三边,则此三角形的形状是 _____.
- 7 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 直角边 $AC = 3, BC = 4$, 直线 l 与 AC, BC 分别交于 S, T , 且 S, T 在边 AC, BC 的内部, 并且 l 平分 $\triangle ABC$ 的周长和面积, 则这样的直线 l 的条数是 _____.
- 8 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2 + 2x - a - 1 = 0$ 的根都是整数, 那么符合条件的整数 a 有 _____ 个. (2000 年全国初中数学竞赛题)
- 9 已知 $x^2 + x - 6$ 是多项式 $2x^4 + x^3 - ax^2 + bx + a + b - 1$ 的因式, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

二、解答题(第 10 题 15 分,第 11~13 题 20 分,共 75 分)

- 10 实数 p, q 分别满足 $p^2 - 2p - 5 = 0$ 和 $5q^2 + 2q - 1 = 0$, 求 $p^2 + \frac{1}{q^2}$ 的值.

 设方程 $x^2 - |2x - 1| - 4 = 0$, 求满足该方程的所有根之和.

 如图 1-1, 有矩形地 $ABCD$ 一块, 要在中央修一矩形花圃 $EFGH$, 使其面积为这块地面积的一半, 且花圃四周道路的宽相等. 现除有一条无刻度且足够长的绳子外, 无任何测量工具, 请问如何量出道路的宽度?

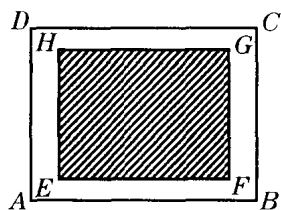


图 1-1

 设关于 x 的二次方程 $(k^2 - 6k + 8)x^2 + (2k^2 - 6k - 4)x + k^2 - 4 = 0$ 的两根都是整数, 求满足条件的所有整数 k 的值.

测试 2

可化为一元二次方程的方程(一)

一、填空题(每小题 5 分,共 45 分)

1 方程 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ 的所有根的积是_____. (2001 年美国犹他州初中竞赛题)

2 若自然数 n 满足 $(n^2 - 2n - 2)^{n^2 + 47} = (n^2 - 2n - 2)^{16n - 16}$, 则这样的 n 有_____个. (第 15 届(2000 年)江苏省初中数学竞赛题)

3 已知 $\frac{a}{x+2}$ 与 $\frac{b}{x-2}$ 的和等于 $\frac{4x}{x^2-4}$, 则 a _____, $b =$ _____.

4 方程 $\frac{2}{x} - \frac{2}{x(x+1)} = 1$ 的解是_____.

5 方程 $\frac{2x+4}{x^2-x} = \frac{x+5}{x-1}$ 的解是_____.

6 方程 $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = 1$ 的解的个数是_____. (2001 年美国犹他州初中竞赛题)

7 方程 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{4}{21}$ 的解是_____.

(第十届祖冲之杯初中数学竞赛)

8 如果 $x^3 + ax^2 + bx + 8$ 有两个因式 $x+1$ 和 $x+2$, 那以 $a+b =$ _____.

9 方程 $x^2 + 3x - \frac{3}{x^2+3x-7} = 9$ 的全体实数根的积是_____ (2000 年湖北省初中数学竞赛选拔赛题).

二、解答题(第 10 题 15 分,第 11~13 题 20 分,共 75 分)

10 解关于 x 的分式方程

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{m+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x}.$$

 A、B 两港在大湖南岸，C 港在大湖北岸，A、B、C 三港恰成一等边三角形的三个顶点。A 港甲船与 B 港乙船同时出发都沿直线向 C 港匀速行驶，当乙船行驶出 40 千米时，甲、乙两船与 C 港位置恰是一个直角三角形的三个顶点；而当甲船行驶达 C 港时，乙船尚距 C 港 20 千米。问 A、B 两港之间的距离是多少千米？

 若方程 $(x^2-1)(x^2-4)=k$ 有 4 个非零实数根，且它们在数轴上对应的 4 个点等距排列，求 k 的值。（1993 年全国初中数学竞赛题）

 若关于 x 的方程 $\frac{2k}{x-1} - \frac{x}{x^2-x} = \frac{kx+1}{x}$ 只有一个解，试求 k 的值与方程的解。

测试 3

可化为一元二次方程的方程(二)

一、填空题(每题 5 分,共 45 分)

- 1 已知关于 x 的方程 $\sqrt{3x-a}=x$ 有一个根为 1,那么另一个根为_____.
- 2 若 $\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}-1)=2$,则 $x+y$ 等于_____.
- 3 已知 $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$,则 $\sqrt{4x+x^2}$ 的值等于_____.
- 4 已知 x 是方程 $x-4\sqrt{x}+1=0$ 的根,则 $(\frac{x^2-5}{x-1}+1) \cdot \frac{x^3-1}{x^2-2x} \div (x+3)$ 的值等于_____.
- 5 方程 $\sqrt{2x+3}=-x$ 的解是_____.
- 6 方程 $\frac{1}{\sqrt{2x}+1}=\frac{3}{2}-\sqrt{2x}$ 的解是_____.
- 7 已知 a 为非负整数,若关于 x 的方程 $2x-a\sqrt{1-x}-a+4=0$ 至少有一个整数根,则 a 的可能取值的个数是_____.
- 8 方程 $x^3-6x^2+x+6=0$ 的所有根的积是_____.
- 9 已知方程 $x^4-6x^3+8x^2+8x-16=0$ 有一个根是 $1+\sqrt{5}$,那么此方程的其他三个根分别为_____.

二、解答题(第 10 题 15 分,第 11~13 题 20 分,共 75 分)

- 10 若方程 $\sqrt{x-p}=x$ 有两个不相等的实数根,求实数 p 的取值范围.
- 11 已知 a, b 满足 $a^3-3a^2+5a=1, b^3-3b^2+5b=5$. 求 $(a+b)$ 的值.

12 已知方程 $\sqrt{a-x^2} = \sqrt{2} - |x|$ ($a > 0$) 有不相等的实数根, 求 a 的取值范围.

13 求方程 $\sqrt{x+19} + \sqrt[3]{x+95} = 12$ 的实数解的个数.

测试 4

一元二次方程的判别式

一、填空题(每题 5 分,共 45 分)

- 1** 关于 x 的方程 $x^2 - mx + m - 2 = 0$ 的根的情况有下列四种叙述:①方程没有实数根;②方程有两个相等的实数根;③方程是否有实根与 m 的值有关;④方程有两个不相等的实数根,其中正确的叙述是_____ (填序号).
- 2** 关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 3 = 0$ 有实数根,则 k 的非负整数值是_____.
- 3** 已知关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 4 = 0$ 有两个不相等的实数根,那么 m 的取值范围是_____.
- 4** 若关于 x 的方程 $2x^2 - (2m+1)x + m = 0$ 的根的判别式 $\Delta = 9$,则 $m =$ _____.
- 5** 若方程 $2x(kx-4) - x^2 + 6 = 0$ 没有实数根,则整数 k 的最小值等于_____.
- 6** 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2 + x - 1 = 0$ 有实数根,则 a 的取值范围是_____.
- 7** 设 a, b 为两个不等圆的半径, c 为圆心距,且方程 $x^2 - 2ax + b^2 = c(b-a)$ 有相等的实数根,则这两圆的位置关系是_____.
- 8** 若 $n > 0$, 关于 x 的方程 $x^2 - (m-2n)x + \frac{1}{4}mn = 0$ 有两个相等的正实数根,则 $\frac{m}{n}$ 的值等于_____.
- 9** 已知关于 x 的方程 $x^3 - ax^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 有且只有一个实数根,则 a 的取值范围是_____.

二、解答题(第 10 题 15 分,第 11~13 题 20 分,共 75 分)

- 10** (1) 已知方程 $x^2 + 2px - q = 0$ (p, q 是实数)没有实数根,求证: $p+q < \frac{1}{4}$;

(2) 判断上述命题的逆命题是否正确,若正确,请加以证明;若不正确,请举一反例.

例1 已知关于 x 的方程 $4x^2 + 4bx + 7b = 0$ 有两个相等的实数根, y_1, y_2 是关于 y 的方程 $y^2 + (2-b)y + 4 = 0$ 的两个根, 求以 $\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程.

例2 已知方程甲: $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, 方程乙: $x^2 + p_2x + q_2 = 0$, 其中 p_1, p_2, q_1, q_2 均为实数, 且满足 $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, 问甲、乙两个方程是否至少有一个有实数根, 并说明理由.

例3 已知关于 x 的方程 $(a^2 - 1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - (2a + 7)\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1 = 0$ 有实数根.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若原方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $\frac{x_1}{x_1-1} + \frac{x_2}{x_2-1} = \frac{3}{11}$, 求 a 的值.

测试 5

根与系数的关系及其应用(一)

一、填空题(每题 5 分,共 45 分)

1 二次方程 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 的根的和是_____.

2 以一元二次方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的两根之和与两根之积为根的一元二次方程是_____.

3 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ 的两个实数根 x_1, x_2 满足 $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 12 = 0$, 则 m 的值为_____.

4 若一元二次方程 $x^2 - ax - 4a = 0$ 的两个实数根之和为 $4a^2 - 3$, 则两根之积等于_____.

5 已知 $(2\,002 - a) \cdot (2\,000 - a) = 2\,001$, 那么 $(2\,002 - a)^2 + (2\,000 - a)^2 =$ _____.

6 已知 $ab \neq 1$, a, b 满足 $a^2 + 4a + 2 = 0, 2b^2 + 4b + 1 = 0$, 则 $a^3 + \frac{1}{b^3} =$ _____.

(2000 年太原市初中数学竞赛题)

7 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2px - p^2 - 1 = 0$ 的两个实数根为 x_1 和 x_2 , 若此方程的两根之和不大于两根之积, 则 p 的值为_____.

8 若方程 $x^2 - 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ 的两个根为 α, β , 它们也是方程 $x^4 + px^2 + q = 0$ 的两个根, 则 $p =$ _____.

9 已知 $a - b = 4, ab + c^2 + 4 = 0$, 则 $a + b =$ _____.

二、解答题(第 10 题 15 分,第 11~13 题 20 分,共 75 分)

10 已知一元二次方程 $2x^2 - 2x + 3m - 1 = 0$ 有实数根 x_1, x_2 , 且它们满足不等式 $\frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 - 4} < 1$, 求 m 的取值范围.

11 设方程 $x^2 - px + q = 0$ 的二实根为 α, β , 以 α^2, β^2 为根的二次方程仍是 $x^2 - px + q = 0$, 求所有的实数对 (p, q) .

12 已知 a, b 是整数, $x^2 - x - 1$ 是 $ax^9 + bx^8 + 1$ 的因式, 求 a 的值.

13 已知方程 $x^2 + a_1x + a_2a_3 = 0$ 与方程 $x^2 + a_2x + a_1a_3 = 0$ 有且只有一个公共根. 求证: 这两个方程的另两个根(公共根除外)是方程 $x^2 + a_3x + a_1a_2 = 0$ 的根.

测试 6

根与系数的关系及其应用(二)

一、填空题(每题 5 分,共 45 分)

1 方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 > x_2$, 则 $x_1 - 2x_2 =$ _____.

2 方程 $x^2 - (1+m)x + m = 0$ 的两个实根都是正数, 则 m 的取值范围是 _____.

3 已知关于 x 的方程 $x^2 - 1999x + a = 0$ 有两个质数根, 则常数 $a =$ _____.

4 已知 $3m^2 - 2m - 5 = 0, 5n^2 + 2n - 3 = 0$, 其中 m, n 为实数, 且 $m > 0$, 则 $m - \frac{1}{n} =$ _____.

5 已知关于 x 的二次方程 $2x^2 - 5x - a = 0$. 若两根之比 $x_1 : x_2 = 2 : 3$, 则 a _____.

6 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0$ 的两个实根中, 只有一个根大于 5, 则 a 的取值范围是 _____.

7 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 4x + 4 = 0$ 与 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 的解都是整数, 则整数 m 的值等于 _____.

8 已知关于 x 的方程 $x^2 + (a^2 + 2a - \sqrt{a^2 + 2a + 6})x + a = 0$ 有两实数根, 且互为相反数, 则 a 的值为 _____.

9 若方程 $x^2 - 13x + 13k - 1 = 0$ 至少有一个整数根, 则所有正整数 k 的和等于 _____.

二、解答题(第 10 题 15 分, 第 11~13 题 20 分, 共 75 分)

10 已知关于 x 的方程 $k^2x^2 + (2k-1)x + 1 = 0$ 有两个实数根. 是否存在实数 k , 使方程的两实数互为相反数? 如果存在, 求出 k 的值; 如果不存在, 请说明理由.