机电分析动力学

邱家俊 编著

科学出版社

机电分析动力学

邱家俊 编著

国家自然科学基金支持项目

科学出版社

1992

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是在作者为研究生编写的“机电分析动力学”讲义的基础上改编而成的.

全书共十三章，分成三篇：分析动力学基础，宏观电动力学基础，机电系统分析动力学．前两篇是本书的基础，第三篇是本书的中心内容．本书既可用于研究力学系统，也可用于研究电学系统．在研究机电耦联系统、建立系统的方程时，机电分析动力学是一个最有效的工具，它可以作为一个统一的方法，用于建立离散动力学与电路理论、连续介质力学与电磁场理论相耦联的微分方程组.

本书可作为力学、物理、机械、电机、电力、自动化等专业的研究生教材，也可作为本科生的选修课教材，并可供机电类专业的大学教师及工程技术人员参考.

机电分析动力学

郭家俊 编著

责任编辑 万 钧 刘晓融

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992 年 12 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1992 年 12 月第一次印刷 印张：18 1/2

印数：1—1 300 字数：489 000

ISBN 7-03-003010-9/TN·125

定价：21.00元

前　　言

分析动力学用统一的观点和方法研究力学问题，开辟了解决受约束的物体和更复杂的物体系统运动的新途径。一方面，它提供了现代应用力学和动力学一般理论的最基本的原理和方法；另一方面，它给出了在振动、稳定性、刚体与刚体系统、天体与宇航器的运动等领域中一系列有实用价值的成果。它不但可用于研究质点、刚体、刚体系统，还可以用于研究连续介质（固体、流体）力学，并可广泛用于航天技术、现代自动控制、非线性力学、计算力学等许多新的科学技术领域。

诸如占社会总动力能源 90% 以上的旋转电机、各种机电换能器、磁流体动力变换装置、高速磁浮列车、高速磁浮轴承等，这些机电装置都是进行机电能量转换的。机电分析动力学是研究机电耦联问题的最有效的力学工具。它从能量的观点出发，研究物体运动在电磁场中发生相互作用的规律，并作为统一的方法，用于建立力学问题与电路、电磁场问题相耦合的微分方程组，从而去研究机电耦联的相互作用规律。

本书共十三章，分成三篇进行阐述。第一至第五章为第一篇，第六至第八章为第二篇，第九至第十三章为第三篇。第三篇是本书的重点，它是在分析动力学基础上发展起来的机电的边缘问题。

第一章讲述分析动力学的基本概念。第二章主要介绍第二类拉格朗日方程的建立和应用。第三章讲述了哈密顿正则方程及在正则方程的基础上发展起来的正则变换理论与应用。第四章阐述力学的变分原理（它可分为微分变分原理与积分变分原理）并将积分变分原理分成完整的和非完整的两种情况进行论述。第五章介绍了三种基本的非完整系统动力学方程，即罗兹方程、查浦雷金方程和阿贝尔方程。

第六章介绍了电磁场理论的基本方程，此外对各向异性介质、运动导电介质中的电磁场方程和电机的气隙磁场进行了简要介绍。第七章全面介绍了电磁场能量，分别讲述了电场能量、磁场能量及时变电磁场能量。第八章讲述电磁力，介绍了用能量法求离散机电系统的电磁力，以及用电磁张量的概念和方法求连续机电系统的均布电磁力，并讲述了电机转子在气隙磁场内的电磁力。

第九章阐述了研究离散机电系统的拉格朗日-麦克斯韦方程，介绍了一些机电耦联系统的工程问题。第十章介绍了电磁系统与力学系统的变分原理，推导了时变电磁场的变分原理及准稳近似的时变电磁场的变分原理，论述了确定电磁系统参数的对偶能量法，阐述了哈密顿原理在弹性动力学中的应用。第十一章列举了非完整的机电系统的几个例子，阐述了非完整的机电系统的格波罗瓦方程，并应用格波罗瓦方程研究了几种直流电机的非完整分析动力学问题。第十二章研究了电机定、转子间的径向电磁力和三相对称与不对称运行情况下的定、转子参数共振，阐述了稳态三相不对称情况下的扭振电磁力矩，研究了发电机组轴系扭振参数共振。还讨论了同步发电机的机电耦联的动力学问题。第十三章阐述了交流电动机转子由电磁力激发的非线性振动，研究了三相对称与不对称运行情况下的振动。应用机电分析动力学的方法，研究了交流电动机起动过程的扭振与电震荡，分析了机电耦联的横振与扭振，以及它们的振动规律。

机电耦联系统的动力学问题是比较复杂的，它涉及多个学科的基础理论，是工程中待解决的问题。十几年来，我们得到了天津市科委及国家自然科学基金委员会的大力支持、鼓励与资助。

作者衷心感谢北京大学陈滨教授、天津大学霍拳忠教授、北京工业大学李骊教授，他们在百忙中审阅了本书稿，提出了宝贵的修改意见，并给予了热情的支持。

由于时间仓促和作者的水平所限，恳切希望读者指出本书的错误和不当之处。

目　　录

第一篇　分析动力学基础

第二篇　宏观电动力学基础

第三篇　机电系统分析动力学

第一篇　分析动力学基础

第一章　分析力学的基本概念

分析力学的全部定理和方程都起源于某些基本概念，如约束、虚位移和虚功等.

§1-1　约束、约束方程和约束的分类

1. 约束

在研究一质点系相对于某一惯性坐标系运动时，(如对系统中质点的位置和速度）预先加上了一些几何的或者运动学特性的限制，我们把这些限制称为约束. 例如，火车被限制在铁轨上运动，火车的轨迹是事先给定的，铁轨是火车的约束；枪弹在出枪口之前被限制在枪膛内运动，枪膛是枪弹的约束；圆球在粗糙水平面上无滑动地滚动等条件都是约束. 前两条件是几何约束，后两条件是运动学的约束. 无论作用的力及运动的初始条件如何，这些约束都必须得到满足.

受到约束的系统称为非自由系统，不受约束的系统称为自由系统. 自由系统在主动力作用下可在空间中任意运动. 在同样主动力作用下，非自由系统与自由系统的不同之处在于加在系统质点上的约束在某种程度上限制了系统的可能运动. 例如，对单摆来说，在摆索未断的情况下(即约束未受到破坏)，摆球只能沿着圆弧轨迹运动. 在这个问题中，摆的约束即为不可伸长的绳索.

必须注意，当系统运动时，不论作用力和运动的初始条件如何，约束关系都必须得到满足.

2. 约束方程

对于非自由系统来说，约束给出了系统中各个质点运动的限制条件，这些限制条件可以用数学方程把它们表示出来，用数学方程表示出来的约束关系称为约束方程，它可以用几何学和运动学的知识写出具体的数学表达式。下面举例说明如何建立系统的约束方程。

例 1-1 两个质点在半径为 R 的固定球面上运动，两点间距离 l 保持不变。

解： 我们以固定球心为原点，取一固定直角坐标系。两质点在此坐标系中的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2)，于是两点间距离为常数 l 的条件可表为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \tag{1-1}$$

而两点在半径为 R 的固定球面上的条件分别为

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0 \tag{1-2}$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0 \tag{1-3}$$

这三个约束方程就是加于该系统的位置上的几何限制。不论作用于该系统上的力和运动的初始条件如何，这些方程都必须得到满足。

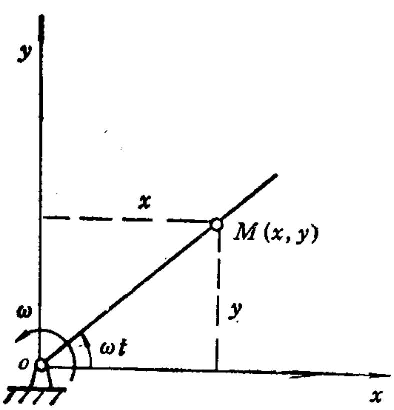

图 1-1

例 1-2 如图 1-1 所示，在 x，y 平面内，质点 M 可在直杆 oM 上滑动，而 oM 杆同时又以匀角速度 ω 绕 o 轴转动。试写出质点 M 的约束方程。

解： 由图 1-1 可见，不管质点沿杆作怎样的运动，它的坐标必须满足关系式

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tg} \omega t \\ z = 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

从上述方程可知，在某些情况下，约束方程不仅与点的坐标

有关,还与时间参数 t 有关(即约束方程中显含时间参数 t)。

例 1-3 设车轮沿水平直线做纯滚动,如图 1-2 所示。试写出车轮的约束方程。

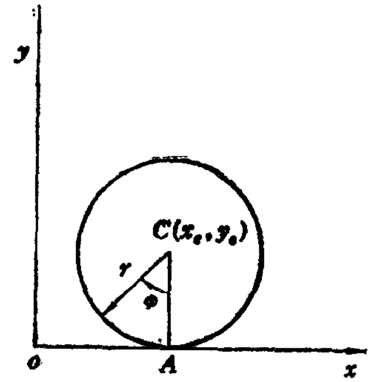

图 1-2

解: 车轮是由无穷多个质点组成的,并且满足刚体的约束条件。平面运动的刚体,确定平面图形在平面中的位置需要三个坐标,即基点 C 在平面中的坐标 x_C 和 y_C,以及图形绕基点 C 的转角 φ。现在分析沿水平直线做纯滚动车轮的约束条件。既然做平面运动的刚体需要三个坐标才能确定位置,我们就把此问题理解为一个具有三个自由度的"质点",再研究这三个自由度的"质点"受到沿直线轨道做纯滚动的约束条件,这样就可以写出约束方程。直线轨道的约束条件为

$$y_C = r \tag{1-5}$$

车轮沿轨道做纯滚动的约束条件为车轮上和轨道相接触的点"A"处的速度为零,即

$$\dot{x}_C - r\dot{\varphi} = 0 \tag{1-6}$$

式(1-5)和(1-6)就是车轮沿直线轨道做纯滚动的约束方程。

从式(1-6)可见,约束方程有时还可能含有坐标的导数。这就是说,约束不仅局限于对系统的坐标进行限制,在某种情况下,约束还可能对坐标的一阶导数(甚至高阶导数)进行限制。

例 1-4 在例 1-3 中,若圆盘沿着水平面内某一曲线做铅垂滚动,如图 1-3 所示,试写出圆盘的约束方程。

解: 作直角坐标系 $oxyz$,设 xy 平面为水平面,圆盘在运动过程中,由于盘面保持铅直,因此,圆盘中心 $C(x_C, y_C, z_C)$ 到水平面 xy 的距离保持常数,即有一个约束方程为

$$z_C = r \tag{1-7}$$

又因为圆盘做滚动,所以圆盘的瞬时转动轴恒通过圆盘和地面相

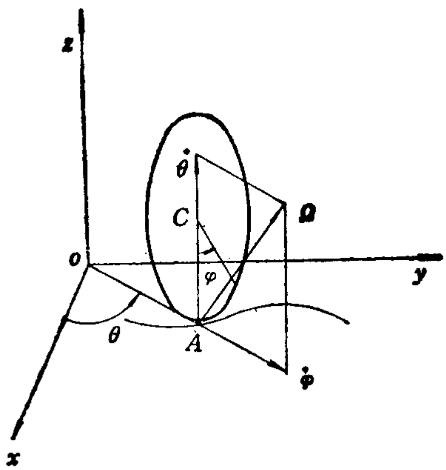

图 1-3

接触的 A 点，如图 1-3 所示。而瞬时角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 有两个分量，其中一个分量为 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$，它的方向和圆盘平面垂直，且永远处于坐标平面 oxy 内，此分量表征圆盘滚动的快慢程度；另一个分量 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$，它沿着通过 A 点的直径方向，此分量表征圆盘滚动方向随时间的变化率。因此有以下关系式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} = \Omega_x \boldsymbol{i} + \Omega_y \boldsymbol{j} + \Omega_z \boldsymbol{k} \\ &= \dot{\varphi}\cos\theta \boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\sin\theta \boldsymbol{j} + \dot{\theta}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于圆盘做纯滚动，A 点为瞬时轴必定通过的一点，根据圆盘上 A 点速度 $\boldsymbol{v}_A = 0$ 的条件，可得约束方程如下:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_{CA} = 0$$

或

$$\boldsymbol{v}_C - r\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{k} = 0 \tag{1-8}$$

上式中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为沿 x, y, z 轴正向的单位矢量，r 为圆盘的半径。

将式(1-8)写成投影形式，即

$$\begin{cases}\dot{x}_C = r\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{y}_C = -r\dot{\varphi}\cos\theta\end{cases} \tag{1-9}$$

和式(1-6)相比较，约束方程式(1-9)亦包含有坐标的导数，所不同

的只是式(1-6)可以写成可积分的形式

$$\frac{d}{dt}(x_C - r\varphi) = 0$$

或

$$x_C = r\varphi + k$$

对于式(1-9),由于 θ 角也是一个变量,对于本题来说,它不能写成可积分的形式,即式(1-9)是不可积分的。

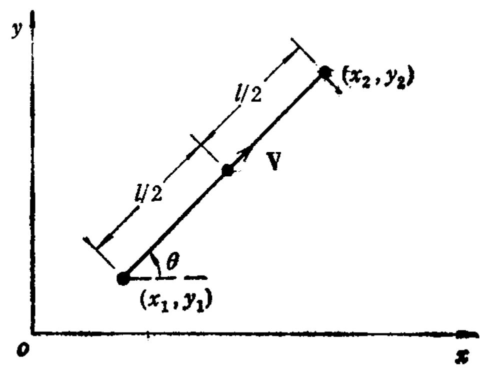

图 1-4

例 1-5 在平面上运动的两个质点用不变长 l 的杆相连结，并且杆的中点的速度沿杆方向，如图 1-4 所示。试写出其约束方程。

解：设两质点的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，则两点距离为 l 的条件可表为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \tag{1-10}$$

杆中点的速度沿杆的方向的条件可表示为

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_2 - x_1} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_2 - y_1} \tag{1-11}$$

第一个约束方程是对点的位置的几何限制，第二个约束方程是对点的速度的运动学的限制，不论系统所受的力和运动的初始条件如何，两个约束方程都必须得到满足。冰刀沿平面的运动就是受第二个约束方程的限制。

例 1-6 一质点在空间中运动时，受到速度大小保持为常值的限制，试写出其约束方程。

解：设质点的直角坐标为 x,y,z，速度分量 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$，则质点速度保持为常值的条件可表为

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=c=\text{常数}$$

或

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=c^2=\text{常数} \tag{1-12}$$

约束方程是对质点速度大小的限制，这是一个运动学的限制。

3. 约束的分类

由对上述许多例题的分析可知，约束的形式及其性质是多种多样的。

当应用基本原理推导运动微分方程时，约束本身的性质对它有极大的影响，不仅系统运动的形式，而且为研究运动所选取的方法都依赖于约束的性质。因此，必须研究各种类型的约束，并按照各种特征将约束分类，例如可分为单面与双面，完整与非完整，定常与不定常，理想与不理想等等。

(1) 定常约束和非定常约束

根据约束是否与时间参数 t 有关，可把约束分为定常约束与非定常约束。所谓定常约束，就是指约束与时间参数 t 无关。这就是说，在这种约束的约束方程中，将不显含时间参数 t。例如约束方程式(1-1)、(1-2)、(1-3)、(1-5)、(1-6)、(1-7)等所表示的约束，都属于定常约束。定常约束的约束方程一般形式为

$$f(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0 \tag{1-13}$$

所谓非定常约束，就是指约束随着时间参数 t 而变化，反映在约束方程中，则是显含时间参数 t。例如约束方程式(1-4)所表示的约束，就是非定常约束。非定常约束的约束方程一般形式为

$$f(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)=0 \tag{1-14}$$

对一个质点来说，如果该质点受到一个定常约束的作用，一般可理解为该质点是在某一固定曲面上运动。如果质点受到的约束是非定常的，则表明该质点是在某一变曲面上运动(即曲面的形状或位置随时间在改变)的。

(2) 几何约束和运动约束

根据约束方程中是否含有坐标的导数，约束可分为几何约束和运动约束。

所谓几何约束，指约束只限制系统中各个质点在空间的位置，而不限制其运动速度以及高于速度的导数等，即在约束方程中不显含质点坐标的导数。例如约束方程式(1-1)、(1-2)、(1-3)、(1-4)、(1-5)、(1-7)、(1-10)等所表示的约束，就是几何约束。几何约束的约束方程一般形式为

$$f(x, y, z; t) = 0 \tag{1-15}$$

所谓运动约束，即约束对质点的运动参数(如速度、加速度等)进行限制。这就是说，在约束方程中，将显含质点坐标的导数，例如约束方程式 (1-6)、(1-9)、(1-11)所表示的约束，都是运动约束。运动约束的约束方程一般形式为

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0 \tag{1-16}$$

在运动约束中，由于约束方程显含质点坐标的导数，因此，运动约束的约束方程是一个微分方程式(或微分方程组)，如果该微分方程式(或组)是可积分的，那么，这种约束是属于可积分的，例如方程式(1-6)；否则是不可积分的，例如方程式(1-9)。因为在方程式(1-9)中，θ 角也是一个变量，并且变量的数目超过了方程的数目，所以没有其它的附加方程，本方程就不能有解。而可积分的约束方程，通过积分可以转化为几何约束方程。

(3) 完整约束和非完整约束

几何约束和可积分为有限形式的运动约束（这两种约束的数学形式不显含质点坐标对时间的导数)，统称为完整约束。例如约

束方程式（1-1）、（1-2）、（1-3）、（1-4）、（1-5）、（1-6）、（1-7）、（1-10）所表示的约束都属于完整约束。其约束方程的一般形式为

$$f_\alpha(x, y, z; t) = 0 \qquad (1\text{-}17)$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots, l)$$

式中 l 代表完整约束的个数。一个力学系统，如果仅受到完整约束的作用，那么，这种系统称为完整系统。在某一瞬时，完整系统在空间所占据的位置，必须满足完整约束的约束方程式（1-17）。

所谓非完整约束，就是指不可积分的运动约束。这些约束的约束方程在不考虑动力学微分方程的条件下是不可积分的，通过它找不到各个质点坐标之间的代数关系式。例如方程式（1-9）、（1-11）、（1-12）所表示的约束，就是非完整约束，非完整约束的约束方程一般形式为

$$\varphi_\beta(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0 \qquad (1\text{-}18)$$
$$(\beta = 1, 2, \cdots, g)$$

式中 g 代表非完整约束的个数。一个力学系统，如果受到的约束有非完整约束，那么，这种系统称为非完整系统。以后我们可以看到，求解完整系统和非完整系统的力学问题，两者在方法上是不一样的，后者要困难得多。

（4）关于非完整约束的一点讨论

非完整约束的约束方程实际上是一个常微分方程（或组）。它是系统在运动中所必须满足的运动条件，一个非完整系统力学问题的定解，显然和这一组微分方程式的性质（或形式）直接有关。根据这一点，下面我们就微分方程结构形式的不同，来讨论几种非完整约束。

非完整约束按速度的幂次可分为线性非完整约束和非线性非完整约束。所谓线性非完整约束，就是指该非完整约束的约束方程可以展开为速度分量的线性函数。它的一般形式为