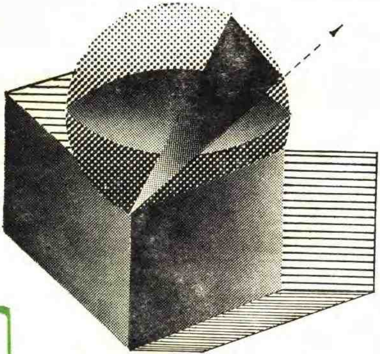
工程数学方法

学习指导书

廖祖纬 张旭红 编



央广播电视大学出版社

工程数学方法学习指导

廖祖纬　张旭红　编

*

中央广播电视大学出版社出版发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本787×1092　1/32　印张 5.375　千字 121

1988 年 9 月第 1 版　1988 年10月第 1 次印刷

印数　1— 11,000

定价1.35元

ISBN 7—304—00275—1/O·30

前　言

这本辅导书主要是为帮助电大学生学好工程数学方法这门课程而编写的。同时，凡是学习"工程数学方法"及"数理方程"者均可借助于此书作为学习参考书。本书各章由下列部分组成：

一、内容提要

以廖祖纬老师主编的《工程数学方法》及蒋定华老师主编的《数理方程》的内容及顺序为准，列出每章中的主要概念、定义、定理、重要公式等基本内容。

二、教学要求

以广播电视大学1988年4月通过的工程数学方法课程教学要求为准。

三、典型例题分析

对具有代表性的题目进行分析、解答，并总结解题规律。

四、复习思考题

五、自我检查题

自我检查题附有答案或提示，便于学生复习、巩固所学知识及检查学习情况。

由于笔者水平及教学经验有限，缺点错误不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

88年4月

目　录

第一部分　场　　论

在物理学及许多科学技术领域中，常常遇到各种物理场，如温度场、速度场、力场和电磁场等，尽管这些场各自的物理意义不同，但在数学上却有某种共性。场论就是借助矢量代数和多元函数微积分的知识来研究这种场的共性的，目的是为进一步学习电磁场理论等后续课程奠定必要的基础。

场论部分的主要内容有三个："三个度"——数量场的梯度、矢量场的散度和旋度；"两个公式"——高斯公式和斯托克斯公式；"一个算子 ∇"——哈米尔顿算子 ∇。研究方法是从场的局部性质着眼，分别引入"三个度"的概念，以直角坐标系为基本参考系，把概念和计算紧密联系起来，用算子 ∇ 按数乘、点乘及叉乘逐步归纳出"三个度"的基本公式。

第一章　场与数量场的梯度

本章先介绍场的概念，然后从研究数量函数的微分性质入手，引入数量场的梯度概念。

一、内容提要

（一）场的概念

1. 场的概念及表示

有关场、数量场和矢量场的定义请见教材。值得注意的是，在场的定义中，"空间区域 V"可以是三维空间区域，也可

以是二维平面区域。

场分为数量场和矢量场两类，数量场用一个数量函数表示，如在直角坐标系中，数量场用 $u=u(x,y,z)$，$M(x,y,z)\in V$ 表示；矢量场是用一个矢量函数表示，在直角坐标系中可表为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$，$M(x,y,z)\in V$。若用坐标分量形式表示，可记为

$$\boldsymbol{a}(M)=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

场有时是与时间有关的。与时间无关的场称谓是定常的（稳定场），本课程研究的场均为定常情形。

2. 等值面（线）与矢量线

（1）数量场 $u=u(x,y,z)$ 的等值面是指这样的曲面 σ：在曲面 σ 上的每一点处，函数 $u(M)$ 取相同的数值 c（c 是常数），即对任意的 $M\in\sigma$，都有 $u(M)=c$。

平面数量场 $u=u(x,y)$ 中取相同数值 c 的点组成数量场的等值线，即 $u(x,y)=c$（c 是常数）。

数量场的等值面（线）可以帮助我们从直观上了解数量场的整体结构。因为有些数量场是难以用图形表示的，但却较易画出它的等值面（线），从等值面（线）的疏密情况可以了解数量场不均匀的情况，因此说等值面（线）可以用来描述数量场的整体结构。

（2）矢量场 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(m)$ 的矢量线是指这样的曲线 r：在 r 上每一点 M 处的切线方向都与 M 点处矢量 $\boldsymbol{a}(m)$ 的方向重合。

矢量线可直观地表示矢量场中各点处的矢量分布状况：因在矢量场中，每一点处均有一条矢量线通过，因此矢量线族充满了整个矢量场所在的空间区域 V。所以说矢量线可用来描述矢量场的整体结构。

矢量线的求法：

设矢量场为 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，矢量线 $\boldsymbol{r}$ 的参数方程是 $\boldsymbol{r}=\{x(t), y(t), z(t)\}$，则矢量线 $\boldsymbol{r}$ 应满足微分方程

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}$$

这是两个联立的微分方程组，解之可得矢量线族；若加上过点 M 的条件，则求得过 M 点的矢量线方程。

（二）数量场的梯度

1. 数量函数的全微分

设算子 $\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$，矢径 $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$，则数量函数 $u=u(x, y, z)$ 的全微分可表示成为

$$du=\nabla u \cdot d\boldsymbol{r}$$

2. 方向导数

（1）定义：数量场 $u=u(M)$ 中，数量函数 u 在一点 M_0 处沿 l 方向对距离的变化率称为数量函数 $u(M)$ 在 M_0 点沿 l 方向的方向导数，记作 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$。

（2）方向导数的计算公式

设数量函数 u 在 M_0 点可微，l 的方向余弦是 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$，则 $u(M)$ 在 M_0 点沿 l 方向的方向导数存在，且由下式给出

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\\&=\nabla u \cdot \mathbf{s}_0\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{s}_0$ 是 l 的单位向量，即 $\mathbf{s}_0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$。

3. 数量场的梯度

关于数量场的梯度的定义及性质，教材交待得很清楚了，请读者见教材。

（三）梯度的计算

1. ∇ 算子

哈米尔顿算子 ∇ 是一矢量形式的微分算子，它与数量函数 $\varphi(x,y,z)$ 作数乘，是数量场的梯度，即 $\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi=\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}$。

算子 ∇ 与矢量函数 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 作点乘和叉乘，分别得矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度和旋度。梯度、散度和旋度合称为场的"三个度"。具体计算见教材。

2. 梯度运算的基本公式

梯度的运算与导数的运算公式很相似，下面列表对照：

	函数	梯度运算	导数运算
1	c	$\nabla c=0$	$c'=0$
2	cu	$\nabla(cu)=c\nabla u$	$(cu)'=cu'$
3	$u\pm v$	$\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$	$(u\pm v)'=u'\pm v'$
4	$u\cdot v$	$\nabla(u\cdot v)=v\nabla u+u\nabla v$	$(uv)'=u'v+uv'$
5	$\frac{u}{v}$	$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$
6	$f(u)$	$\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$	$(f(u))'=f'(u)u'$

其中 c 是常数，u、v 是两函数，$f(u)$ 是复合函数。

3. 一个最基本的公式

$$\nabla\varphi(u,v)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\nabla v$$

此公式是关于梯度运算的一个最基本的公式，由它可以推导出梯度运算的六个公式。

例如，设 $\varphi(u,v)=uv$，则有

$$\nabla\varphi(u,v)=\nabla(uv),\frac{\partial\varphi}{\partial u}=v,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=u,$$

根据基本公式得

$$\nabla(uv)=\nabla\varphi(u,v)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\nabla v$$

$$=v\nabla u+u\nabla v$$

其他公式的推导留给读者做练习。

（四）梯度的应用问题

主要掌握求具有实际意义的数量场中的方向导数和梯度的问题，并能说明其几何、物理意义。

二、教学要求

1. 理解场的概念，明确物理场存在的客观性及其数学描述的多样性，特别是在直角坐标系下的描述方式。

2. 了解场分为数量场和矢量场两类。

3. 理解等值面(线)对描述数量场的意义，掌握等值面的求法。

4. 理解矢量线对描述矢量场的意义，掌握矢量线的求法。

5. 理解方向导数的概念及其在引入梯度概念中的作用，熟练掌握方向导数的求法。

6. 深刻理解数量场的梯度概念及其引入的过程，牢固掌握梯度的性质及其计算。

7. 了解梯度计算的简单应用。

重点：

1. 数量场的等值面和矢量场的矢量线的求法。

2. 方向导数的概念及其计算。

3. 梯度的概念、性质及其计算。

三、典型例题分析

例1 场的举例。

1. 地形图。取一平面为直角坐标系 XOY，这样空间一点的位置便可用该点在 XOY 平面的投影坐标(x, y)来确定。设该点位置高度为h,则 h 是关于 x 和 y 的函数,即$h=h(x,y)$，因此地形高度 h 形成一个数量场。这是一个平面数量场。

在绘制地形图时，将高度相同的点用曲线连结起来画在地形图上,就是等高线,亦即平面数量场中的等值线。一般地,将相邻等高线之间的高度差 Δh 取一定值，这样根据地形图上等高线及其所标出的高度，我们便可以了解到该地区的地势高低情况。另外，根据等高线分布的疏密程度还可判断出该地区在各个方向上地势的陡度情况(密则陡，疏则平)。如图 1-1，其中数字表示海拔的高度。我们从图中等高线分布的疏密状况以及所标出的数字，就可以看出该地区的东北部偏低而平，西南部则偏高而陡。

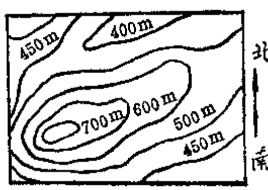


图 1-1

2. 刚体转动。一刚体以恒定角速度ω绕固定轴 l 转动，则其内部任一点$M(\boldsymbol{r})$处的线速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，这样刚体内部空间区域便形成一速度场，它是矢量场。

3. 一密度不均匀的物体，其内部每一点处的密度都不同，用函数 $u=u(x,y,z)$表示内部一点$M(x,y,z)$处的密度，则此物体内部形成一密度场，它是数量场。

例 2 (1) 求温度场$T=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$的等值面，并说明温度场T所在的空间区域。

(2) 指出数量场 $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$所在 在 空 间 区域。

(3) 求 $u(x,y)=x^2+y^2$ 通过点(1,1)的等值线。

解：(1) 温度场T的等值面是曲面 $T=c$，即$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=c$，整理得 $x^2+y^2+z^2-\frac{1}{c}=0$，其中 c 是常数，且 $c>0$。这是一族以原点 $O(0,0,0)$ 为球心，半径$\frac{1}{\sqrt{c}}$随任意常数 c 变化的同心球面。

温度场T所在的空间区域是除原点 $O(0, 0, 0)$外的所有空间区域，在该温度场中，离原点近的地方温度高，远离原点处的温度低。

(2) 数量场 $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$所在的空间区域是$V=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$，即第一挂限。

(3) 数量场 $u(x,y)=x^2+y^2$ 的等值线族是

$$x^2+y^2=c \quad (c\text{ 是常数})$$

因要求过点(1,1)的等值线，代入方程有

$$c=2$$

因此，通过点(1,1)的等值线方程是 $x^2+y^2=2$，这是一个以原点 $O(0,0)$ 为圆心，以$\sqrt{2}$为半径的圆。

例 3 (1) 求矢 量 场 $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$ 过点$M(1,1,1)$的矢量线方程。

(2) 求力场 $\boldsymbol{a}=(z-y)^2\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ 的力线方程。

解:(1) 已知 $a_x=x^2, a_y=y, a_z=xz$, 代入矢量线应满足的微分方程有

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xz}$$

这是两个联立的方程,它等价于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{y} & (1)\\[2mm] \dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dz}{xz} & (2)\end{cases}$$

由方程(1)可得 $y=C_1e^{-\frac{1}{x}}$

当 $x\neq0$ 时,由方程(2)得 $z=C_2x$

因此有矢量线族 $\begin{cases}y=C_1e^{-\frac{1}{x}}\\ z=C_2x\end{cases}$

若求过点 $M(1,1,1)$ 的矢量线方程,将点 M 坐标代入矢量线族方程,得

$$\begin{cases}C_1=e\\ C_2=1\end{cases}$$

从而求得过点 $M(1,1,1)$ 的矢量线方程是

$$\begin{cases}y=e^{1-\frac{1}{x}}\\ z=x\end{cases}$$

(2) 所谓力场的力线方程就是矢量线方程。

将 $a_x=(z-y)^2$, $a_y=z$, $a_z=y$ 代入矢量线满足的微分方程

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$$

这是一个比例式子的方程,适用于比例性质进行计算,应用比

例的合比性质得

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}=\frac{d(y-z)}{z-y}$$

它等价于两个联立的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{z}=\dfrac{dz}{y} & (1)\\[2ex] \dfrac{dx}{(z-y)^2}=\dfrac{d(y-z)}{z-y} & (2)\end{cases}$$

解方程(1)得 $\quad y^2=z^2+C_1.$

解方程(2)，设 $t=z-y$，则方程(2)化为

$$\frac{dx}{t^2}=\frac{-dt}{t},\quad \text{解之得 } x=-\frac{t^2}{2}+C_2$$

将 $t=z-y$ 代回，得 $x=-\dfrac{(z-y)^2}{2}+C_2$，即

$$2x+(z-y)^2=C_2$$

于是所求力线方程是 $\begin{cases}y^2=z^2+C_1.\\ 2x+(z-y)^2=C_2.\end{cases}$

小结

1. 在求矢量线方程时，需要解微分方程组 $\dfrac{dx}{a_x}=\dfrac{dy}{a_y}=\dfrac{dz}{a_z}$，可任取其中两个完全不同的等式联立。由于 a_x, a_y、a_z 形式多样，往往不易求解，因此在取其中两个组成一个方程前，要考虑到如何根据存在的某种内在关系去选择才能使所联立的方程易于求解，如例3(1)题，若选择 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{xz}$ 则不易求解，而选择 $\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dz}{xz}$ 则易求解。另外，还要常利用比例性质将联立方程变形，使其化成较易求解的形式，如例3(2)题。

2. 我们来验证一下例3(1)题所求的结果。

在例3(1)题中，我们求得过$M(1,1,1)$点的矢量线方程

是
$$\begin{cases} y=e^{1-\frac{1}{x}} \\ z=x \end{cases}$$

此矢量线在M点的切向量是$\boldsymbol{n}=\{1,\ y'(x),\ z'(x)\}|_{(1,1,1)}=\{1,1,1\}$,而过点$M$的场矢量$\boldsymbol{a}=\{x^2,y,xz\}|_{(1,1,1)}=\{1,1,1\}$，这说明矢量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{a}$平行,即方向相同，满足矢量线定义。同理可验证例3(2)题,请读者自己验证。

例4 (1) 求函数$u=xy+yz+zx$在点$P(1,2,3)$处沿其矢径方向的方向导数。

(2) 求函数$u=xyz$在曲面$2z-xy=0$上的点$M(2,3,3)$处沿曲面下侧法线方向的方向导数$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M$。

解: (1) 方法一:直接用方向导数的公式。

在点$P(1,2,3)$的矢径$\boldsymbol{r}=\{1,2,3\}$，单位矢径为$\boldsymbol{r}_0=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$,故$\boldsymbol{r}$的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

因为
$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x+z,\ \frac{\partial u}{\partial z}=y+x$$

所以根据求方向导数的公式得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_P&=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P\cos\gamma\\&=(2+3)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+(1+3)\frac{2}{\sqrt{14}}+(1+2)\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\\&=\frac{22}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

方法二:作为梯度在该方向上的投影

u 在 $P(1,2,3)$ 点的梯度为

$$\mathrm{grad}\,u=\nabla u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\bigg|_P$$
$$=\{y+z,x+z,y+x\}\big|_{(1,2,3)}$$
$$=\{5,4,3\}$$

因矢径 $\boldsymbol{r}=\{1,2,3\}$，故 u 沿 $\boldsymbol{r}$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_P=\mathrm{grad}\,u\cdot\boldsymbol{r}_0=\mathrm{grad}\,u\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$
$$=\{5,4,3\}\cdot\frac{\{1,2,3\}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{22}{\sqrt{14}}$$

(2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M=yz|_M=9$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M=xz|_M=6$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=xy|_M=6.$$

记 $F(x,y,z)=2z-xy$，则此曲面在点 $M(2,3,3)$ 处的法线方向数为

$$F_x|_M=-y|_M=-3,F_y|_M=-x|_M=-2,F_z|_M=2$$

从而朝曲面下侧的法线方向余弦为:

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{17}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma=\frac{-2}{\sqrt{17}}$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\bigg|_M$$
$$=9\times\frac{3}{\sqrt{17}}+6\times\frac{2}{\sqrt{17}}+6\times\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)=\frac{27}{\sqrt{17}}$$

例 5 (1) 求数量场 $u=x^2+y^2+z^2$ 所产生 的梯度场。

(2) 作出数量场 $u=xy$ 所产生的梯度场的矢量线示意图。

解: 所谓梯度场就是由数量场 u 中每一点的梯度矢量所

形成的矢量场。

(1) 根据梯度计算公式

$$\nabla u=\mathrm{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$=\{2x,2y,2z\}=2\boldsymbol{r}$$

其中 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$表示矢径。这就是数量场u产生的梯度场，记为$G=\mathrm{grad}u=2\boldsymbol{r}$.

(2) 数量场 $u=xy$ 所产生的梯度场为

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}=y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}.$$

其矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$$

由此解得矢量线方程

$$x^2-y^2=C$$

其示意图如图 1-2. 根据梯度矢量指向函数增大最快的方向的性质，我们可以从图中矢量线的走向，看出函数$u=xy$的数值变化的总趋向。

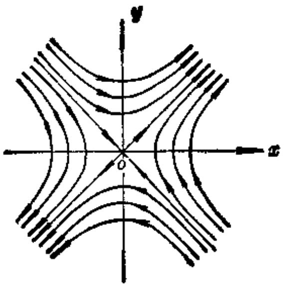


图 1-2

例 6 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, n 为正整数，(1) 求 ∇r^n. (2) 证明 $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$ 为常矢)。

解: (1) $\because r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\text{即}\ r^n=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}$$

$$\therefore\quad \nabla r^n=(r^n)'\cdot\nabla r=nr^{n-1}\cdot\left\{\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial r}{\partial y},\ \frac{\partial r}{\partial z}\right\}$$

$$=nr^{n-1}\cdot\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}=nr^{n-2}\cdot\boldsymbol{r}$$

(2) 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{a}$ 为常矢，a_1、a_2、a_3 为常数，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=a_1x+a_2y+a_3z$.

$$\text{因此},\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\left\{\frac{\partial(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial x},\frac{\partial(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial y},\frac{\partial(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial z}\right\}$$

$$=\{a_1,a_2,a_3\}=\boldsymbol{a}$$

即 $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}$，证毕。

例 7　设数量场

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

求(1) u 的等值面。(2) 在点 $M_0(1,-1,\sqrt{2})$ 处沿方向 $\boldsymbol{r}_1=\{1,0,2\},\boldsymbol{r}_2=\{2,1,0\},\boldsymbol{r}_3=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{8},-\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right\}$ 的方向导数。(3) 在点 $M_0(1,-1,\sqrt{2})$、$M_1(4,3,0)$ 处的梯度。

解：(1) 由等值面的定义，数量场 u 的等值面是

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c$$

(c 是常数)

当 $c\neq 0$ 时，方程化为 $x^2+y^2+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0$。若 $|c|<1$，该等值面表示以 z 轴为中心轴，原点 $O(0,0,0)$ 为顶点的圆锥面，此时 $|c|$ 的值越小，圆锥面口越大，如图 1-3 所示，有 $|c_1|>|c_2|>|c_3|$ $c>0$ 时为上半圆锥面，$c<0$ 时为下半圆锥面；若 $|c|=1$，等值面方程简化为 $x^2+y^2=0$，它表示等值面的图形为 z 轴；若 $|c|>1$，则

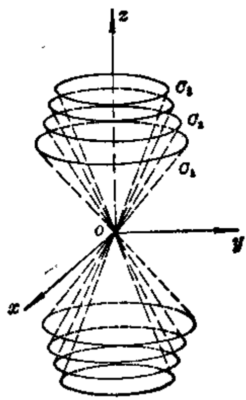


图 1-3