（鄂）新登字 14 号

内容提要

本书系统地介绍了常用的经济管理模型与算法。主要内容有：经济预测模型、对策模型、决策分析模型、线性规划模型、运输模型、分配模型、整数规划模型、网络计划模型、最短路径和最小费用流模型、动态规划模型、投入产出模型、质量管理模型、非线性规划模型、存贮模型、系统动力学仿真模型等，还附有源程序 16 个，大部分章后附有习题。

图书在版编目(CIP)数据

实用经济管理模型与算法/牛长立编著. 一武汉：
武汉测绘科技大学出版社，1998.8
ISBN 7-81030-647-2

Ⅰ.实… Ⅱ.牛 Ⅲ.经济管理-经济数学方法-经济数学模型 Ⅳ.F224.0

责任编辑：李莲　　　　封面设计：日文
武汉测绘科技大学出版社出版发行
（武汉市武昌珞喻路 129 号　邮编 430079）
湖北省国营华严农场印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/16　印张：19.25　字数：470 千字
印数：0001—3000 册　　定价：18.80 元

前　言

本书系由编者多年对管理人员和计算机软件人员进行培训所授课的讲义、讲稿和从事多项应用研究课题研究中所积累的材料编写而成。在教学和科研中均得益于国内许多老师和同行的指导，得益于许多国内外权威性的著作。经济管理模型与算法，内容浩瀚。本书编写力求深入浅出，尽量通俗易懂，其目的是为读者把深奥莫测的复杂数学模型引入到实际应用铺平道路。由于不同管理工作的特殊性，个别难点章节，如D—最优设计算法可以暂搁置不学。

本书第四章中部分内容罗荣桂教授参加了编写。本书由武汉大学计算机系博导陈莘盟教授负责主审。参加审稿的还有武汉大学数学系费浦生教授、国家科委管理学院肖佑恩教授，湖北计划干部管理学院何佰琦教授，中山大学王钦秀教授等。尤其陈莘盟教授多次鼓励和支持编写及出版该书，湖北省微机办的林茂全高工等，都对本书稿给予关心和帮助，在此一并致谢。

本书可作为经济管理人员，计算机软件工程师的培训教材，也可作为计算机专业高年级学生、工程管理专业硕士生和部分院校计算机应用专业硕士生的选修教材，学时数以80节左右为宜。为照顾不同基础读者的需求，书中附有BASIC，FORTRAN，C语言、DYNAMO语言编写的源程序16个。编者乐意与读者随时通信解答或切磋与该书内容有关的问题。鉴于编者水平有限，书中不妥之处，恭请有关专家和读者批评指正。

本书的出版，得到了国家科委管理学院陈荣秋院长等院领导和同志们的帮助，在此深表感谢。

牛长立

1998年5月8日

目 录

绪 论

任何一级信息管理系统，必须具备三个功能：信息收集、处理和分类整理；分析信息，制定最优决策；预测未来，制定发展规划。要实现这些功能，就要在正确的经济理论指导之下编制各种经济数学模型，直接应用于经济管理的数学模型称为经济管理模型。所谓经济管理模型，就是描述经济系统特征的表达经济变量之间关系的数学表达式。经济管理模型包括微观模型与宏观模型。微观模型是描述企业或部门经济管理问题的模型。宏观模型是描述国民经济全局范围问题的模型。

经济数学模型是对客观经济现象和过程的一种模拟反映，是反映经济内容的数学公式或公式体系（用数学符号表示的函数式、方程组），它不是一堆数学符号的简单堆砌。有的公式在数学上可以成立，但是在经济上没有意义。所以，必须依据有关的经济理论，对经济数量及其关系进行分析，提出理论假设。没有这个前提，经济模型无从建立。

建立模型的步骤如下

①阐明问题及目标；

②定义各要素及符号；

③绘制经济管理模型的结构图；

④建立数学模型并求解；

⑤修正模型。

修正模型的方法有：去除某些不必要的可控因素；合并一些性质相同的变量；改变变量的性质（如将变量改为常量，离散量变为连续量，或连续量改变为离散量等）；改变约束条件等。

经济系统中的数量关系是复杂的，因而经济管理模型也必然是多种多样的。针对不同的经济问题，可以建立不同的经济管理模型。一般常用的经济管理模型可分为：经济计量模型、投入产出模型和优化模型，以及它们相结合的经济管理模型体系。此外还有专门用于工业企业管理的模型、系统动力学等仿真模拟模型。

经济计量模型，主要运用回归分析等概率统计以及矩阵代数等数学工具，是对经济变量之间的关系进行定量分析的计量技术。经济计量模型方法最重要的应用领域是宏观经济。

投入产出模型，主要运用矩阵代数以反映、分析和计量经济系统各部分（部门、地区、产品等）间的平衡关系。它以物质生产的工艺技术联系为基础，研究经济系统的结构。它通过对中间产品、最终产品和总产品关系的分析，揭示经济系统各部分生产中的连锁关系，从而达到协调各种经济活动的目的。投入产出模型的应用范围日益广泛，已从宏观、中观到微观（企业）管理，既可用于预测和计划，也可用于政策分析。

最优规划模型，是运用线性规划（还有非线性规划、动态规划、整数规划等）以及系统科学方法，确定各种计划的最优方案。它能反映经济活动中的条件极值问题，概括起来就是：在既定目标下，如何达到最好的结果。例如，资源的最佳分配问题，生产力的合理布局问题，合理库存问题，成本、价格问题，等等。最优规划模型的应用，是从微观扩展到宏观。

系统动力学是 60 年代初才发展起来的一种利用电子计算机进行系统仿真的方法。它建立在自动控制理论、信息论和结构理论的基础上，运用反馈调节等原理进行系统结构仿真，可用

于分析研究经济系统的发展趋势和政策效果。系统动力学设计了一种专用计算机语言(DYNAMO),用它描述模型很方便。经过计算机运算后可将各种变量的数值变化用表格形式和曲线图形打印出来,形象直观,使用简便。

经济管理数学模型的构造,不是最终目的,利用计算机求解,给出研究对象各要素的状态(数量值),管理者才能分析和判断。由模型到编程序上机计算,桥梁是模型的常用的基本算法。

算法是指用计算机来解决某一问题的特殊方法,由有限步骤的集合构成,每一个步骤包含一个或多个基本操作,该操作必须是已定义的且计算机能执行的操作。另外,一个算法应有零个或多个输入和至少一个输出。本书讲的数学模型的求解算法,主要是怎样通过有限的步骤把数学问题的求解运算化为对有限数位的数的四则运算。

第一章　经济预测模型

§1.1　经济预测概述

经济预测是适应社会化大生产而发展起来的一门研究经济运动发展规律的科学，是经济管理、企业管理科学的重要组成部分。

一般来说，经济预测是制定政策，作出决策的依据。不论是研究宏观经济还是研究微观经济，经济效益的高低，关键在于管理，管理就是决策，决策的依据在于预测。

政府通过经济预测，掌握经济发展的变化趋势，就可以正确地制定经济发展计划，指导经济建设。企业通过科学预测，掌握市场需求的变化动向，就可以以销定产，并生产出更多更好的社会所需要的产品，使企业获得更大的利润。

1.1.1　预测的分类

经济预测有宏观和微观两种类型。从宏观角度看，其预测的范围是很广的，往往涉及整个国民经济。例如国民经济生产总值预测，国家财政收入预测，人民生活水平和“国富”预测，科学技术的发展及其对国民经济影响的预测，外贸和对外经济协作的预测等。

从微观角度看，企业要做到有计划地进行生产，就必须对供、产、销和人、财、物的情况进行预测。常见的预测有

社会需要预测　即预测用户对某产品的需要情况。其主要内容：产品是面向城市还是面向农村；产品用户是集体还是个人；产品面向哪些阶层，这些阶层的消费倾向如何；对产品需求趋势是上升、饱和，还是下降；开辟新市场的可能性；季节变化和地区不同对产品需求的影响等。

资源预测　即预测企业所需原材料等供应的变化情况。其主要内容：物价的变化；材料、能源供应保证程度；市场采购保证程度；代用材料适用范围及其来源；协作关系的变化等。

技术发展预测　即预测计划期内技术发展情况。主要考虑新技术、新材料、新产品的发展对产品需求的影响。在目前新技术、新材料不断出现的时代，技术发展预测具有十分重要的意义。

另外，从时效方面去看，预测可以分为短期预测、中期预测和长期预测。所谓短期预测一般是指一年或一年内的预测，而中期预测和长期预测是指三年到五年，甚至十年到二十年以上的预测。但是，短期预测、中期预测和长期预测的划分并无固定标准。

如果按预测结果的属性区分，预测又可分为定性预测和定量预测，在同一个预测过程中，这二者是互相补充的。

如果按预测对象来分，预测的种类又有市场预测、技术预测、社会预测等。

1.1.2　预测的程序

预测系统没有一定的形式，且进行工作的阶段划分亦有粗有细，但其基本流程皆大同小异，一般程序如图 1-1 所示。

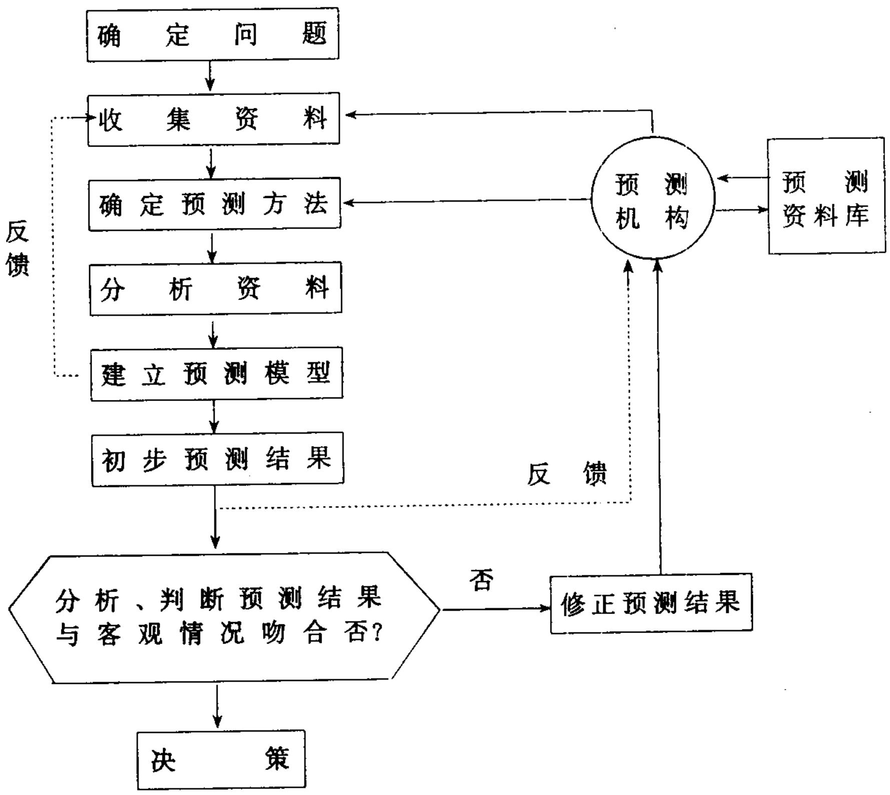

图 1-1 预测系统程序形式

1.1.3 预测方法及使用条件

预测方法不仅有数学方法,也有非数学方法,预测学综合运用了数学、社会学、经济学、自然科学以及电子计算的现代技术,到目前为止,据说大约有 300 种预测方法,这些方法常常分散在统计学、市场学、经营管理学、经济计量学、经济学、运筹学、系统工程学、未来学等学科里。常用的预测方法和模型是特尔斐法、经验分析法、综合判断法、投入产出模型、回归分析模型、时间序列模型、最小二乘法、经济函数弹性分析模型、马尔可夫模型、运筹模型、统计外推模型、相互影响分析法、博克斯-金肯斯(Box-Jenkins)预测模型、增长曲线模型、经济寿命周期模型、系统动力学模型等。

特尔斐法是对选定的专家进行系统地询问调查,方法的运用是在若干回合反复讨论中,就一系列的问题向专家们征询意见,直到获得满意的结论为止。此法又称专家调查法,是一种非计算方法,当预测资料(数据)不全时,可采用此法。

时间序列分析是建立在一个假定基础之上的,即假定未来是过去趋势的延伸。这种方法简单,运用方便,然而它只能用在经济平稳发展的时候,不能用于经济转折时期。此法主要用于短期预测。

回归分析模型,是找出一个经济变量与若干其他变量之间的数量关系,然后用某种方法给出外生变量的未来值而算出预测系统经济变量的预测值。这种经济计量模型常被使用。

在经济转折时期,经济预测是特别困难的,因为由过去的统计资料建立的模型的结构或者结构的参数,往往不再完全适用于未来。这时应采取对模型参数进行修正,或调整计算结果或对数据进行加权处理等方法。

在实际工作中,各种方法不是互相排斥的,可将几种方法结合起来使用,也可分别使用,互相印证。

短期预测的使用方法通常以时间序列方法为主,预测精度要求较高。

中期预测所使用的方法以时间序列、经济计量模型等为主，预测精度要求在±15%以内。

长期预测所采用方法以经济计量模型、投入产出模型、系统动力学模型等为主。主要预测变化趋势，精度无法要求太高。

针对某一种商品或一个企业，它的经济寿命同任何生物体的生命一样，经历着一个发展过程，有它的胚胎期、萌芽期、成长期、成熟期和衰老期。不论在哪个时期，欲使经济效益最高，都需很好地研究预测、计划和决策。各个时期三者的内容如表 1-1 所示。

表 1-1

经济寿命阶段	胚胎期（产品研制阶段）	萌芽期（试销阶段）	成长期（畅销阶段）	成熟期（饱和阶段）	衰老期（滞销阶段）
计划内容	1. 研制工作量 2. 产品设计 3. 材料 4. 成本 ……	1. 生产设施的最佳规模计划 2. 推销计划（包括销售价格） 3. 材料、运输等方面的计划	1. 扩大生产设施计划 2. 生产计划 3. 推销计划	1. 合理库存计划 2. 扩大规格品种计划 3. 价格调整计划 4. 加强科研计划 5. 推销计划	1. 加强新产品研制计划 2. 设备调整、顺利转产计划
预测与决策内容	1. 何时投产最宜 2. 产品在今后 5～10 年内能否适应市场需要 3. 商业策略	1. 进入什么市场 2. 生产数量多少 3. 需求增长时如何安排生产	1. 增长率预测 2. 进入成熟期预测 3. 购买者意图调查	1. 需求量预测 2. 新产品新技术预测 3. 进入衰老期预测 4. 库存决策	1. 减少库存 2. 利用价格政策处理存货
预测方法	1. 特尔裴法 2. 相似产品历史分析法 3. 投入产出分析	1. 市场调查法 2. 展销调查法 3. 购买力预测	1. 统计技术 2. 趋势预测法 3. 时间序列法 4. 回归分析法	1. 时间序列分析法 2. 因果预测法 3. 市场调查法	1. 新老产品对比法 2. 趋势判断法 3. 市场调查法

§1.2 直观预测方法

1.2.1 特尔裴法

这种方法是在本世纪 40 年代末期由美国兰德公司首先创造和使用的。50 年代就在西方盛行起来了。

这种方法的主要过程是：主持预测的机构先选定与预测问题有关领域的有关方面的专家数十人，并与他们建立适当的联系，联系的主要方式是信件往来，同时将他们的意见经过综合、整理、归纳，并匿名反馈给各位专家，再次征求意见。这种方式经过多次的反复，使专家们的意见逐渐趋向一致，最后作为预测的依据。

1.2.2 信息卡调查法

这种方法是 1983 年湖北省科委进行科技发展趋势预测时首先采用的一种预测方法。此方法是特尔裴法的一种新发展。

信息卡调查法工作步骤大致如下

(1)明确预测对象的目标体系，以及评价的指标体系(定性或定量的)；

(2)制作信息卡，每一张信息卡所提出的问题要集中，不要过于分散；

(3)向被调查的对象发放信息卡；

(4)对由信息卡提供的情况进行综合处理；

(5)根据由综合信息卡得出的结论作出预测。

信息卡所列款项要概念清楚。一般信息卡都应有前言,以扼要说明预测的目的。

1.2.3 **综合判断法**

在收集到若干原始信息后,应采用统计分析的方法,对原始信息进行综合判断后作出预测。

例:某工厂为预测某商品的市场需求,向3名售货员发了信息卡,得到的反馈信息如表1-2所示。表中高、中、低代表三种销售量的估值,单位为台、件等。

表 1-2 (单位:台、件)

	高	中	低
甲	800	600	400
乙	900	700	500
丙	1 000	800	480

采用下述公式可求出3个售货员所列数字的平均值

$$\text{平均销售量} = \frac{\text{高} + 4 \times \text{中} + \text{低}}{6}$$

$$\text{甲的平均销售预测} = \frac{800 + 4 \times 600 + 400}{6} = 600$$

$$\text{乙的平均销售预测} = \frac{900 + 4 \times 700 + 500}{6} = 700$$

$$\text{丙的平均销售预测} = \frac{1000 + 4 \times 800 + 480}{6} = 780$$

现假定三个售货员的预测水平一样,则售货员的销售预测为

$$\frac{600 + 700 + 780}{3} = 693$$

那么,693就可作为这种商品的销售预测值。

诸如此类比此例复杂得多的统计判断就是综合判断法。

§1.3 平滑预测模型

平滑预测模型是由平均法演变过来的一种趋势预测模型。它包括一般平滑模型和指数平滑模型。

1.3.1 **一般平滑模型**

设取一时间序列 $x_1, x_2, \cdots, x_t, \cdots$,称平均数

$$\overline{X}_t = \frac{x_t + x_{t-1} + \cdots + x_{t-(N-1)}}{N}, t \geqslant N \tag{1-1}$$

为时间序列$\{x_t\}$的滑动平均数列。这里 N 称为滑动平均的时段长。滑动平均的目的主要是平滑数据,消除一些干扰,显示出变化趋势,因而可以用于趋势预测。

1.3.2 **加权平滑模型**

设取时间序列 $x_1, x_2, \cdots, x_t, \cdots$,称下述平均数序列

$$X_{tw} = \frac{a_0x_t + a_1x_{t-1} + \cdots + a_{N-1}x_{t-(N-1)}}{N} \tag{1-2}$$

为加权平滑模型。这里 $a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}$ 为加权因子，满足

$$(\sum_{i=0}^{N-1} a_i)/N = 1$$

采用加权平滑模型，一般来说可以更加准确地反映实际情况。但应注意，最新数据的权取得愈大，其风险也愈大，愈容易受随机干扰的影响。

1.3.3 指数平滑模型

设 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一时间序列的一系列观察值，其观察时间为 $t=0,1,2,\cdots,n$。又设 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n$，为时间 $t=1,2,\cdots,n$ 的平滑预测值。$\hat{x}_t$ 是由下述公式求得

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t-1} + a(x_t - \hat{x}_{t-1}), t = 1,2,\cdots,n \tag{1-3}$$

则称此为指数平滑模型，这里 a 称为平滑常数，$0<a<1$。式(1-3)又可改写为

$$\hat{x}_t = ax_t + (1-a)\hat{x}_{t-1}, t = 1,2,\cdots,n \tag{1-4}$$

式(1.4)表示 $\hat{x}_t$ 为 x_t 和 $\hat{x}_{t-1}$的加权平均数，其中权数分别为 a 和 $1-a$。

由式(1-4)，显然有

$$\hat{x}_{t-1} = ax_{t-1} + (1-a)\hat{x}_{t-2}$$
$$\hat{x}_{t-2} = ax_{t-2} + (1-a)\hat{x}_{t-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\hat{x}_1 = ax_1 + (1-a)\hat{x}_0$$

将这一结果代入式(1-4)中，可得

$$\hat{x}_t = ax_t + a(1-a)x_{t-1} + a(1-a)^2x_{t-2} + \cdots + a(1-a)^l x_{t-l} + \cdots + (1-a)^t x_0,$$
$$t = 1,2,\cdots,n \tag{1-5}$$

用 $s_t(x)$代替 $\hat{x}_t$，式(1-5)可写成

$$s_t(x) = a\sum_{j=0}^{t-1}(1-a)^j x_{t-j} + (1-a)^t x_0, t = 1,2,\cdots,n \tag{1-6}$$

式(1-5)和式(1-6)表示 $\hat{x}_t$ 或 $s_t(x)$为 $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_1, x_0$ 的加权平均数，其权数分别为 $a, a(1-a), a(1-a)^2, \cdots, a(1-a)^{t-1}, (1-a)^t$。前 t 个权数是首项为 a，公比为$(1-a)$的等比级数。此级数与$(1-a)$的和为 1，即 $a+a(1-a)+a(1-a)^2+\cdots+a(1-a)^{t-1}+(1-a)^t = \frac{a[1-(1-a)^t]}{1-(1-a)}+(1-a)^t=1$。由此可知，指数平滑法实际上为一种特殊形式的加权平均法。由于这些权数为一指数函数形式，且此平均法是具有修匀或平滑一系列观察值的作用，因此这种方法称之为指数平滑法。

一般来说，选取的 a 值越小，则原给时间序列被修正程度越大；a 值越大，则被修正程度越小。因此，欲求较长期的趋势值，则必须取较小的 a 值，例如取 $a=0.1$。如果实际图形波动较大，就要求模型灵敏度高一些，这时 a 应选得大一些，例如 $a=0.9$。但是 a 的选择都应以残差平方和最小为标准。即 a 应使

$$Q = \sum_t (x_t - \hat{x}_t)^2 = \min(\text{最小}) \tag{1-7}$$

这里 Q 是 a 的函数，但没有具体表达式，故不能用解析的方法求出最小值，但可采用 0.618 法，求出使 Q 达到最小值的 a_0 作为 a 的最佳值。

此外，还有多重指数平滑模型等。在此不再赘述。

§ 1.4 回归分析预测模型

回归分析是一种处理变量之间相互关系的数理统计方法。回归分析主要解决以下两个方面的问题：

(1)确定几个特定的变量之间是否存在相互关系，如果存在的话，找出它们之间合适的数学表达式；

(2)根据一个或几个变量的值，预测另一个变量的取值，并且求出预测所能达到的精确度。

回归分析预测模型主要有一元线性回归预测模型、多元线性回归预测模型和非线性回归预测模型。

1.4.1 一元线性回归预测模型

如果只有一个变量影响被预测对象，且该变量与被预测对象成线性关系，那么可以用一元线性回归模型来进行预测。

一元线性回归预测的一般数学模型为

$$\hat{y} = a + bx \tag{1-8}$$

其中 $\hat{y}$ 为预测值，a 和 b 是回归系数，x 代表影响因素(自变量)。

式(1-8)还可以写成如下形式

$$y = a + bx + e \tag{1-9}$$

其中 y 为实际值，e 为预测误差值(简称为误差)。

显然，预测方程(1-8)的精度越高，误差 e 的绝对值将越小。

一元线性回归预测问题的一般提法是：根据已有的 n 组观测值 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 确定回归系数 a 和 b，使误差的平方和

$$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \tag{1-10}$$

达到最小。

由微积分中的极值原理可知，要使 S 达到极小，只需在式(1-10)中分别对 a，b 求导数，令它们等于零。于是 a，b 满足

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0 \tag{1-11}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)x_i = 0 \tag{1-12}$$

由式(1-11)得到

$$na = \sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

所以

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \tag{1-13}$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1-14}$$

$\bar{x}$，$\bar{y}$ 分别为 x_i，$y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的平均值。由式(1-12)得到

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

将式(1-13)和式(1-14)代入上式，经整理可得回归系数 b 的计算公式

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)} \tag{1-15}$$

由于式(1-13)和式(1-15)中的所有量都可以从观测数据中得出，所以回归预测模型(1-8)就可确定。

前面已经指出，一元线性回归预测方程(1-8)只对具有线性关系的两个变量成立。而两个变量之间的线性相关程度是用相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} \tag{1-16}$$

来衡量的。

显然有

$$0 \leqslant |r| \leqslant 1$$

且$|r|$愈小，x与y之间的线性相关程度也愈小；反之，$|r|$愈大，x与y之间的线性相关程度也愈大。但要注意，相关系数只表示x与y的线性关系的密切程度。当$|r|$很小，甚至为零时，并不一定表示x与y之间不存在其他关系，而只是表示x与y之间的线性关系很弱。

通过式(1-8)可以得到预测值$\hat{y}$，除此之外，还要知道实际值与预测值$\hat{y}$的差别有多大。同一个x，实际的y值按一定的分布波动(波动规律在一般情况下都认为是正态分布)，如果能算出波动的标准离差，回归方程的精度即可给出。标准离差由下式给出

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2} \tag{1-17}$$

由正态分布的性质可知，实际值y与预测值$\hat{y}$有如下关系

实际值y落在区间$[\hat{y}-\sigma, \hat{y}+\sigma]$内的概率约为 0.682 7；

实际值y落在区间$[\hat{y}-2\sigma, \hat{y}+2\sigma]$内的概率约为 0.954 5；

实际值y落在区间$[\hat{y}-3\sigma, \hat{y}+3\sigma]$内的概率约为 0.997 3。 (1-18)

由此可见，σ越小，则由回归预测方程预测的y值就越精确。

例 某公司在 1992～1996 年中某商品的实际销售情况如表 1-3 所示，试预测 1997 年度的销售值。

表 1-3

年　份	编号 x_i	实际销售数 y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1992	1	58	58	1
1993	2	62	124	4
1994	3	69	207	9
1995	4	74	296	16
1996	5	85	425	25
$\sum$	$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 348$	$\sum x_i y_i = 110$	$\sum x_i^2 = 55$

由式(1-15)可得

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-\frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{5}x_i)(\sum_{i=1}^{5}y_i)}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{5}x_i)}=\frac{1\ 110-\frac{1}{5}\times 15\times 348}{55-\frac{1}{5}\times 15^2}=6.6$$

由式(1-13)和式(1-14)可得

$$a=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i-b\cdot\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{5}\times 348-6.6\times\frac{1}{5}\times 15=49.8$$

所以，预测模型(1-8)为

$$\hat{y}=49.8+6.6x$$

由上式可得 1997 年度的销售商品的预测值

$$\hat{y}_{(97)}=49.8+6.6\times 6=89.4$$

相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)(y_i-69.6)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)^2\cdot\sum_{i=1}^{5}(y_i-69.6)^2}}=0.98$$

可见 x 与 y 的相关程度是很大的。

标准离差

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2}=1.65$$

所以由式(1-18)可知

实际值 y 落在$[\hat{y}-\sigma,\hat{y}+\sigma]=[89.4-1.65,89.4+1.65]$内的概率约为 0.682 7；

实际值 y 落在$[\hat{y}-2\sigma,\hat{y}+2\sigma]=[89.4-3.30,89.4+3.30]$内的概率约为 0.954 5；

实际值 y 落在$[\hat{y}-3\sigma,\hat{y}+3\sigma]=[89.4-4.95,89.4+4.95]$内的概率约为 0.997 3。

1.4.2 多元线性回归模型

在经济管理实践中，或在科学技术发展规划中，单因素都是在多因素交错发生作用的条件下起作用的。而多因素同时发生作用才是经常性的。例如农作物收成，是由肥料、土壤、水利、品种、气温、雨量、耕作技术等许多因素共同影响的综合结果。在多因素同时发生作用时，有时可以分清主次，分别解决，但有时则难以分清主次。这样，只有多因素的分析，才能反映出经济预测对象与影响因素之间的真相，只考虑某一因素而忽视其他因素，对于经济预测的准确性和可靠性是有影响的。多元线性回归模型是处理预测对象涉及到两个以上影响的因素，且因素之间是线性关系的重要模型。同时，对于某些非线性关系的问题，通过数学上的变换处理，也可化成多元线性的问题来处理。

多元线性回归的一般数学模型

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m \tag{1-19}$$

式中 y——预测对象；$x_1,x_2,\cdots,x_m$——m 个影响因素；$a_0,a_1,\cdots,a_m$——$m+1$ 个回归系数。

如果有 n 个数据点$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im};y_i)i=1,2,\cdots,n$，则可以写成如下方程组的形式

$$y_1=a_0+a_1x_{11}+a_2x_{12}+\cdots+a_mx_{1m}$$

$$y_2=a_0+a_1x_{21}+a_2x_{22}+\cdots+a_mx_{2m}$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_0 + a_1 x_{n1} + a_2 x_{n2} + \cdots + a_m x_{nm}$$

如用矩阵的形式来表示则更为简单。

令 $$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

则上面的方程组变为

$$Y = XA$$

与一元线性回归一样，Y,X 都是已知的数据，只要将回归系数 A 求出，则可利用这个多元线性回归模型进行预测。

下面用矩阵的办法来求回归系数 A。

当 X 是满秩的，那么则有逆阵 X^{-1}存在

$$X^{-1}Y = X^{-1}XA = A \tag{1-20}$$

另一种情况，当 X 是非方阵，则对 X 进行转置得 X'，且设 $X'X$ 是满秩，则有

$$(X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}(X'X)A = A \tag{1-21}$$

后一种情况更为常见。

一般，在解多元线性回归模型时，主要是计算下列四个矩阵

$$X, A, C, B$$

其中 X 是多元线性回归模型中数据 y_i 的结构矩阵；$A=X'X$，叫做信息矩阵，或称为系数矩阵；C 是系数矩阵 A 的逆矩阵，称为相关矩阵；B 是列向量，$B=XY$ 称为常数项矩阵。

多元线性回归预测模型，计算机源程序详见附录一。

1.4.3 多元线性回归预测模型的精度分析

在实际的经济预测中，我们仅是根据各经济变量间的机理分析而作了它们之间有线性关系的假设。因此，在建立回归方程以后，还需对线性假设作进一步的检验。检验的方法有以下几种。

1. 回归方程的显著性检验

第 1 步：计算残差平方和 Q

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{1-22}$$

式中y_i——实测值；$\hat{y}_i$——预测值；n——样本容量。

第 2 步：计算回归平方和 U

$$U = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \tag{1-23}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

第 3 步：计算统计量 F 的值

$$F = \frac{U/m}{Q/n - m - 1} \tag{1-24}$$

可以证明 F 是变量，且自由度为$(m, n-m-1)$的 F 分布。

第 4 步：按置信度 α 查 F 分布表（第一自由度为 m，第二自由度为 $n-m-1$）所得到临界值

为 F_α。若统计量的值 $F>F_\alpha$,则认为线性假设有效,即各经济变量间有线性关系。

2. 回归系数的显著性检验

在回归方程(1-19)中,并不意味着每个自变量 $x_1,\cdots,x_m$ 都是对因变量 y 有重要的影响,可能有些变量的影响实际上可以忽略,相当于回归系数等于零。因此要对回归系数进行显著性检验,检验方法如下:

第 1 步:计算剩余标准差 S_y

$$S_y=\sqrt{\frac{Q}{n-m-1}} \tag{1-25}$$

其中

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

第 2 步:计算 $\sqrt{C_{ii}}$ 的值

其中 C_{ii} 是相关矩阵 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ 的 i 行 i 列元素。

第 3 步:计算统计量 t_i 的值

$$t_i=\frac{\hat{a}_i}{S_y\sqrt{C_{ii}}} \tag{1-26}$$

第 4 步:对给定的置信度 α,查自由度为 $n-m-1$ 的分布表 t,得到临界值 t_α,若 $|t_i|\geqslant t_\alpha$ 时则回归系数 $\hat{a}_i$ 与零有显著差异,故保留 x_i 在回归方程之中。否则应把 x_i 去掉,重新建立回归方程。这也是逐步回归的基本思想。

1.4.4 非线性回归预测模型

若预测值与它所依赖的变量不是线性关系,则不能直接运用线性回归预测。但经过变量变换后,即可采用线性回归预测方法。

如

$$\frac{1}{y}=a+be^x \tag{1-27}$$

若令

$$\frac{1}{y}=y',x'=e^x$$

则式(1-27)化为

$$y'=a+bx'$$

这样对上式就可采用线性回归预测方法了。

又如

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2 \tag{1-28}$$

若令

$$x_1=x,x_2=x^2$$

则上式化为

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2$$

此式即可直接采用线性回归预测。

§1.5 增长曲线预测模型

我们观察到许多经济现象与人的身高和体重随年龄的增长而增长的曲线相似,其相似的