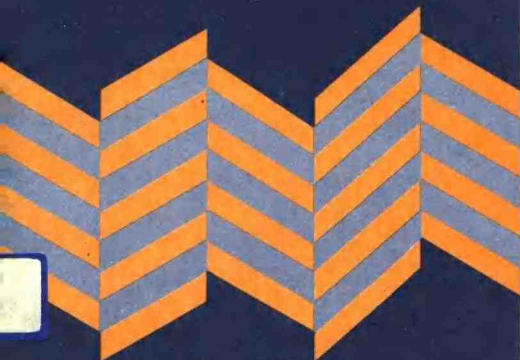


经营数学概论

科学的意思决定的基础

白井 功著 何 平 译
刘国民 校



大连理工大学出版社

内 容 提 要

本书重点介绍了经营管理中的数学方法,侧重于运筹学方面的知识,如资本价值计算、投资的经济计算、库存管理理论、等待排队理论、线性规划、非线性规划、动态规划、对策理论等。是一部很有价值的经营数学教材,同时,也是一本运筹学参考书。

本书可作为经济管理院校经济数学、管理数学的教材,也可供高等院校有关专业的运筹学教材或参考书,还可作为经营管理人员自学参考书。

本书根据[日]有斐阁株式会社1986年版译出

经营数学概论

Jingying Shuxue Gaifun

[日]白井功著

何 平 译 刘国民 校

大连理工大学出版社出版发行(邮政编码:116024)

(出版社登记证[辽]第16号)

大连海运学院印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:7 $\frac{13}{16}$ 字数:196千字

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数:0001—1000册

责任编辑:刘杰 封面设计:姜严军

责任校对:笑萍

ISBN 7-5611-0364-6/O·60 定价:3.95元

译者序

白井功教授的这部《经营数学概论》是很有特色的大学教科书,它不同于一般的经济数学、管理数学以及运筹学教材。本书的鲜明特点在于从经营管理的问题开始,以解决实际问题为结束,将数学理论和方法得出的结论都给出了它的经济意义。并且具体的数学方法阐述的比较直观,引入的恰当,把数学与经营管理的内容融为一体,是目前出版的经营数学教材中难得的一部著作。

在我国目前出版的管理数学、经济数学等有关教材中,大部分的形式还局限于数学知识的汇集,实际效用并不明显,使学生完全处于数学课程之中,体会不了经营与管理中数学方法的含义,不利于培养学生在经营管理中运用数学方法的能力。

我们知道,数学来自现实的问题之中,那么如何将数学这门科学的工具回到实际问题中去呢?这本书为解决这类问题会给你带来极大的兴趣。本书除有一小部分商业数学知识外,大部分介绍的是运筹学方面的知识。如库存理论、线性规划、非线性规划、动态规划、排队论、对策论等。所以,本书也是一部学习运筹学难得的参考书。原书共十章,在翻译过程中,考虑到我国学生的实际,部分几章后面的练习题没有列入,第六章仅翻译了较基础的部分,并与第五章合在一起,原书第十章不确定下的意思决定也未能编入。在翻译过程中,对所发现的原书的不少错误已作了改正。限于译者的水平,译书中难免有错误之处,切望读者批评指正。

编译者

1989年12月于大连

前 言

日本经营理论的研究风气已被世界所认识,并且对日本的经营有着很高的评价。进一步探讨日本企业的经营情况,把日本企业的经营情况与美国相比,发现并未达到尽善尽美的地步,还有进一步改进的余地。这里最需改进的是决策等科学的经营管理方法。如果日本企业能进一步采用科学的经营管理方法,就能给有丰富和优秀的劳动力资源的企业带来巨大的效益。这本书是与科学经营管理方法密切相关的,大学经营数学专门课程的教科书和参考书。

经营数学在我国可大致分两种:

- (1) 科学的经营管理方法必要的数学(包括统计学);
- (2) 科学的经营管理方法体系。

这里所说的经营管理方法是含有科学方法的经营管理方法,是指在经营管理上采用问题的明确化→问题的数学模型化→模型解的导出→解的评价和控制→解的实施这些步骤。

在经营数学的上述含义中,不论哪一种都是以科学的经营管理为基点的,这一点是相同的。所不同的是,把重点放在经营数学的数学上还是放在经营管理上。但是,重点不同内容也会不同。所以,在第一个含义中的经营数学的本质是数学。第二个含义的经营数学则是指经营管理方法,两者大不相同。因此,关键的问题是把经营数学应用在哪一个方面为好。

我认为,考虑这个问题有两个重点,第一是科学的经营管理所需要的数学是一种数学知识的汇集。对经营数学来说不管是纯粹数学还是应用数学在这个领域上是没有区别的。另一个重点是,经营数学这一用语的来源。这一用语最初是用于质量管理统计方法上的经营管理、运筹学、以及以计算利息为基础的商业数学这三者的总称。这与上述经营数学的第二种含义颇为相近,这里所说的相

近是指具有统计性的质量管理,运筹学是具有代表性的科学的经营管理方法。商业数学本身不是科学的经营管理方法,但是,商业数学在决定投资时是不可缺少的,因此也是科学的经营管理所不可缺少的。由于没有研究商业数学的数学家,所以,商业数学不得不包含在经营数学里。根据以上两点,可以得出这样的结论,经营数学这一用语是包含商业数学的科学的运营管理方法体系。

在第二次世界大战中,军事作战研究中产生的运筹学理论现在仍然在继续发展。但是经营数学真正的教科书或参考书这十年间还未出版过。希望能看到根据最近的发展趋势所著的真正的教科书或参考书。但是由于纸张有限,决定省去运用统计方法的经营管理方法,即经营统计学部分。因而本书只提出经营数学中的商业数学和运筹学理论。本书根据上面的含义应用在经营数学上,与数学的严密性相比无疑是把重点放在问题的解法,及经营管理的意义上。而且叙述中举的例子对初学者来说是非常浅显易懂的。因此,不仅是学生,也适用于对这方面感兴趣的经营管理人员。本书所应用的数学,如微积分、线性代数及统计学都是非常基础的,因此,对数学不太精通的人也容易读懂。能够解出每章后面的练习题,不仅能够使你对本章的内容有更深入的理解,同时,也能涉及到本章涉及不到的内容。因此,希望读者必须能完成练习题。

如上所述的本书内容反映了本书是只在描写经营数学最近的发展趋势的教科书或参考书。但是是否能达到这一目标,笔者本不敢奢望。也许还会出现错误,谨请读者批评指教。

写作此书过程中得到各位仁人志士的帮助,在此难以一一列出。但是,对我的三个恩师,及长时间鞭策激励自己的佐藤信吉先生,大石泰彦先生,以及学生时代给本人在社会科学方面以启蒙的福冈正夫先生一定要列出表示谢意。

另外,对通过日常讨论和研究会经常给笔者启示,阅读修改错误之处的同事笹井均,东田启,青山護各位教授以及筑波大学大学

院社会工学研究所博士课程的西原宏君表示深深的感谢。

最后,向对本书出版发行给予帮助的有斐阁编辑部的石塚务氏及各位表示感谢。

白井功

1985 年 12 月

目 录

第一章 资本价值计算	(1)
第一节 利息和它的支付方法.....	(2)
第二节 终价计算.....	(3)
第三节 现价计算.....	(7)
第四节 年金的计算	(10)
第五节 年金计算的应用	(18)
第二章 投资的经济计算	(23)
第一节 现价法	(23)
第二节 盈利率法	(30)
第三节 收益性资产中的投资	(35)
第四节 有价证券的选择理论	(38)
第三章 库存管理理论	(44)
第一节 企业和库存	(44)
第二节 确定需要、动态的决定.....	(49)
第三节 随机的需要、静态的决定.....	(63)
第四节 随机的需要、动态的决定.....	(68)
第四章 等待排队的理论和应用	(82)
第一节 等待排队问题	(83)
第二节 等待排队中的影响因素	(85)
第三节 标准情况的等待排队	(90)
第四节 非标准情况的等待排队	(99)
第五章 线性规划法	(112)
第一节 数学规划法和线性规划法.....	(112)
第二节 单纯形法的构想.....	(116)
第三节 单纯形法的一般说明.....	(125)

第四节	对偶性·····	(142)
第五节	对偶性的应用·····	(154)
第六节	特殊的 LP 问题的解法 ·····	(158)
第六章	非线性规划 ·····	(164)
第一节	Kuhn-Tucker 定理 ·····	(164)
第二节	NP 问题和鞍点问题 ·····	(175)
第三节	二次规划法·····	(179)
第七章	动态规划 ·····	(186)
第一节	最优性原理·····	(186)
第二节	DP 问题的例子 ·····	(188)
第三节	多段决定过程·····	(198)
第八章	对策理论 ·····	(205)
第一节	对策规律·····	(206)
第二节	二人零和对策—严密决定的对策·····	(207)
第三节	二人零和对策—非严密决定的对策·····	(214)
第四节	矩阵对策的解法·····	(225)
第五节	二人非零和对策·····	(230)

第一章 资本价值计算

在某个期间把货币存入金融机关利息就会使所付价值增大。如果存入的期间长,在这个期间利息转入了本金,这样利息也会付于利息,使得利息率增大。关于这个问题在比较一般的货币借贷中也是相同的(以后存入也包含在借贷中考虑)。这样货币在简单借贷中使价值增大,又因为货币是随着它的存在时间的不同而价值也是不同的。因此,比较不同时间期间的货币额必须直接估计在同一时间的价值额才有意义。

在企业经营中,有必要比较各种情况中不同时间期间的货币额。例如,如果在企业中进行设备投资,因为涉及到相当长期间的盈利,所以对所涉及的长期间的利益在同一时间进行估计,这对设备投资决策是很有必要的。关于这个问题在债券或者股票购入的情况上,更进一步地企业自身收买的情况上也相同。反过来在债券或者股票发放上必须支付利息或者支付分配,所以作为同一时期的货币额的表示决定了发行条件也是很必要的。

利息和产生的货币分配以及利息和产生机械设备的盈利分别称为货币资本和实物资本。它们的价值是由它们产生的利息和盈利来决定的。因此,如果直接估计同一时期的价值额的利息和盈利的話,由于资本的价值是由某个值来确定的,所以称这种计算为资本价值计算。这个计算的基础就是所谓的利息率。本章就对各种利息率的算法以及它们的应用进行研究。

第一节 利息和它的支付方法

等价原则

如果不同时期的货币额在某一估价方法中是用同一时期的货币额来直接估价时,则称它是等额的,这时可以看作在这个估价方法下是具有等价值的。这就是所谓的等价原则,例如,某本金在某种借贷条件下对所借贷的进行本利合计,这时本金和本利的合计在那个借贷条件下是等价的,在某一时期的货币额中,所等价的一定期间后的货币额称为终价(find value),求这个终价的计算称为终价计算。和终价对应的是在某一时期的货币额中,所等价的一定期间前的货币额称为现价(present value)。求这个现价的计算称为现价计算。因此,本利合计是本金的终价,本金是本利合计的现价,当给予本金时,求本利合计的计算称为终价计算,当给予本利合计时,求本金的计算称为现价计算。

利息的种类和各种利息支付的方法

对于本金只付于利息,而利息本身不转入本金的情况时,这种利息称为单利(simple interest)。与单利相对应的,在借贷区间中当利息转入本金时,不仅最初的本金付利息而且利息也付利息,这时把最初的本金以及由本金利息产生的利息加在一起称为复利(compound interest),对于计算前者利息大小的方法称为单利法。对于计算后者利息大小的方法称为复利法。

利息的支付可归纳为在借贷期间的初期或者末期,或者在借贷期间的中途中定期的支付。前者的支付称为汇总支付法,后者称为定期支付法。在汇总支付法中,如果在借贷期间的初期支付的称为前支付法,如果在借贷期间的末期支付的称为后支付法。在定期支付法中也有前支付、后支付方法。也就是说,在各期的初期支付的称为前支付,在各期的末期支付的称为后支付。

因为在利息中有单利和复利,在利息支付方法中有汇总支付法和定期支付法,以及前支付法和后支付法。所以,虽然利息的计算方法中应该组合成对应的 8 种方法。但是在定期支付法中,因为计算各期的利息是由单利法进行的,所以实际应该通过下列 6 种方法进行。也就是① 利息后支付单利法,② 利息前支付单利法,③ 利息后支付复利法,④ 利息前支付复利法,⑤ 利息后支付定期支付法。⑥ 利息前支付定期支付法。在这里①~④是汇总支付法。

为了能够计算利息,除了知道本金的大小和借贷期间外,确定利率也是非常必要的。在利息后支付的情况下利率对于本金来说是确定的。也就是说,关于每个单位期间的利息本金的比率是(后支付)利率。作为单位期间通常取为一年,一个月,一日。当单位期间取为一年(一月,一日)的情况时(后支付),利率称为年利(月利,日利)。

当利息前支付时,利率对于终价来说是确定的,关于每个单位期间的利息终价的比率称为前支付利率。

第二节 终价计算

由单利法产生的终价计算

因为单利法是利息不转入本金情况下的利息计算方法。所以根据这个方法所计算的利息额是与本金的大小和期间的长短成比例的。现在设本金为 P , 利率为 i , 期间数为 n , 利息为 I , 本利合计为 S , 则在利息后支付的情况下, 因为利息 I 是由

$$I = Pin \quad (1.1)$$

确定的, 所以终价是

$$S = P + I = P(1 + in) \quad (1.2)$$

在利息前支付的情况下, 设前支付利率为 d , 利息为 D , 所以有

$$D = Sdn \quad (1.3)$$

本利合计是终价,即由于 $S=P+D$, 设 $dn \neq 1$ 时有

$$S = P/(1 - dn) \quad (1.4)$$

要使这个式子有意义,当然只能是在 $dn < 1$ 的情况下。由利息后支付复利法产生的终价计算。

象前面叙述的那样,复利法是计算把在借贷期间的途中产生的利息转入本金的情况下的全部利息额的方法。在这种情况下,因为在借贷期间途中产生的利息是用单位期间中的单利法进行计算的,这个利息要转入本金中,所以各单位期间末的本利合计就成为下个单位期间的本金。

在利息后支付的情况下,第一期末的本利合计是 $P(1+i)$, 这里假定在(1.1)式中 $n=1$ 。因为这个本利合计成为第二期的本金,所以第二期末的本利合计是 $P(1+i)(1+i)$, 以此类推,第 n 期末的本利合计 S 是

$$S = P(1+i)^n \quad (1.5)$$

全期间的利息总和 I 是

$$I = S - P = P\{(1+i)^n - 1\} \quad (1.6)$$

$(1+i)^n$ 称为复利终价率(因为日本工业规格用语是 JIS-OR 所以称为终价系数)。对于种种 i 和 n 通过复利终价率的表示可以制作复利(终价)表。

包含零头期间的情况

在所求(1.2)式以及(1.5)式中当假设 n 为正整数的时候,货币的借贷期间未必是正整数,所谓的包含零头期间的情况也是有的。这时在单利法中,假设在零头期间中所产生的利息与它的期间的长短成比例,那末仍然用(1.2)式。

在复利法中,可分为对于零头期间有单利法适用的方法和复利法适用的方法两种情况。前者考虑的是利率所定义的单位期间比小数期间短,利息不能转入本金的情况。对于后者的情况,因为

复利终价不是由利息转入本金所得到的本利合计,而是由本金以利率相等的一定增大率进行增大时的最终值。所以考虑这样的复利终价以及利息是用(1.5)和(1.6)来计算的。可是,应该值得注意的是,用(1.6)式定义复利所计算的利息是变化的。

假设

$$n = p + q \quad (p \text{ 是整数}, 0 \leq q \leq 1) \quad (1.7)$$

则在小数期间中的单利法适用情况下复利终价有

$$S = P(1+i)^p(1+qi) \quad (1.8)$$

在复利法适用的情况下有

$$S = P(1+i)^p(1+i)^q$$

可是在 $(1+i)^q$ 的二项展开式

$$(1+i)^q = 1 + qi + q(q-1)i^2/2 + \dots \quad (1.9)$$

中,因为二次以上的项的值无限小可以忽略,所以两者相差几乎无几。另外,在(1.9)式中,因为二次项的系数是负的,所以有 $(1+i)^q < 1+qi$,因此,复利终价和复利在零头期间中比单利法适用性稍微大些,关于零头期间的复利(终价)表也是有意义的。

名目利率和实效利率

利息转入本金的过程为本金转化。因为利率通常用年利表示,所以利率所定义的期间为一年,又因为利息转入本金是从一个期间到另一个期间的,也就是说转化期间未必是一年,所以,利率所定义的期间与转化期间未必一致。当两者不一致时,因为对于实际一年期间的本金利息的比率与年利不一致,所以为了区别称前者为实效利率,后者为名目利率。

利息转入本金的次数,即当转化次数在一年中为 p 次时,名目利率是于 p 无关的,为了方便起见记作 $j(p)$ 。又假设实效利率为 i ,因为利息在 $1/p$ 年中转入本金的利率是用 $J(p)/p$ 来计算的,所以实效利率 i 是

$$i = \{1 + j(p)/p\}^p - 1 \quad (1.10)$$

反之当实效利率用 i 表示时, 它的名目利率 $j(p)$ 用

$$j(p) = p\{(1+i)^{1/p} - 1\} \quad (1.11)$$

表示。如果把(1.10)式的右端二项展开的话, 因为有

$$\begin{aligned} \{1 + j(p)/p\}^p - 1 &= 1 + p \frac{j(p)}{p} + \frac{p(p-1)}{2!} \left\{ \frac{j(p)}{p} \right\}^2 \\ &\quad + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \left\{ \frac{j(p)}{p} \right\}^3 + \dots - 1 \\ &= j(p) + \frac{(1-1/p)}{2!} \{j(p)\}^2 \\ &\quad + \frac{(1-1/p)(1-2/p)}{3!} \{j(p)\}^3 + \dots \end{aligned}$$

所以, 随着转化次数 p 的增加, 实效利率 i 是增大的, 可是, 当转化次数是无限大时, 由于有

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{1 + j(p)/p\}^p - 1 = e^{j(\infty)} - 1 \quad (1.12)$$

所以实效利率 i 不是无穷大, 是收敛于 $e^{j(\infty)} - 1$ 的。其中 $j(\infty)$ 是表示利息在瞬间转化的情况下所给与的名目利率。对于 $j(\infty)$ 设它的实效利率为 $i(\infty)$, 那末(1.10)表示为

$$i(\infty) = e^{j(\infty)} - 1 \quad (1.13)$$

反之, 当给与某实效利率为 i 的情况下, 它的名目利率称为利力 (force of interest), 通常用 δ 表示。也就是由(1.12), (1.13)有

$$\delta = \lim_{p \rightarrow \infty} p\{(1+i)^{1/p} - 1\} = \text{Ln}(1+i) \quad (1.14)$$

由利息前支付复利法产生的终价计算

根据前支付单利法看这种情况下的第一期末的本利合计是 $P/(1-d)$ 。又因为假定它是第二期的本金, 所以, 第二期末的本利合计是 $\{P/(1-d)\} \{1/(1-d)\} = P/(1-d)^2$, 由此类推, 第 n 期末的本利合计 S 是

$$S = P/(1-d)^n \quad (1.15)$$

假设利息总额为 D 则

$$D = S - P = P\{1/(1-d)^n - 1\} \quad (1.16)$$

当期间包含零头期间的情况时,用 n 表示(1.7)式,假设在小数期间中单利法适用,则

$$S = P/(1-d)^n(1-qd)$$

设复利法适用,则

$$S = P/(1-d)^n(1-d)^q$$

因为 $1/(1-d)^q < 1/(1-qd)$, 所以由利息前支付单利法产生的复利终价在零头期间中比复利法适用的情况大些。

定期支付情况的终价计算

在定期支付的情况下,因为在借贷期间的中途以一定期间支付利息的运算方法没有特定化,所以不能求终价和利息总额。如果假定在定期支付的情况下,利息不能被再出租,且它不能产生利息,所以终价和利息总额在单利法的计算下是相同的。如果假定所有利息,本金和以相同利率的本金在同一日期被再出租时,终价和利息总额在使用复利法计算的情况下是相同的。除此以外,虽然在各种情况下所对应的计算也是必要的,但本节中不再介入。

第三节 现价计算

现价计算和折扣计算

由票据产生的出租是被出租的金额为票据面额金额减去它的利息的差,利息是以前支付形式出现的。这时,票据的面额金额称为日期收支金额,由日期收支金额减去利息称为折扣。利息是折扣费用(折扣金额),由日期收支金额产生的折扣费用的折扣金额为纯收入,前支付利率称为折扣率。

在票据出租中有必要用日期收支金额来求纯收入的计算。在进行这个计算时,由于日期收支金额相当于终价,纯收入相当于现价,所以虽然根据终价来求现价是现价计算,但是,如果因为由日

期收支费用产生的折扣费用的折扣是纯收入的话,那末也称为折扣计算。而且一般地当折扣行为在实际中不能进行时,求某期间的货币额和等价的现价计算也称为折扣计算,所求的现价应是某一期间的货币额而不应该是票据面额金额,往往把它称为日期收支金额。另一方面,单位期间的折扣费用的本金比率与后支付利率相等,称为用于折扣的利率。在折扣计算中,日期收支金额由现价变为等价时,由于条件不同,它们的计算方法也不同。

由单利产生的现价

(1) 由利率产生的折扣法,这个方法又称为真折扣法,由于在这种方法中日期收支金额是由利息后支付单利法产生的本利合计,所以这个方法所考虑的是本金的现价,它是求现价的方法。又由上述的讨论,在日期收支金额 S , 后支付利率 i , 期间数 n , 现价 P 之间有(1.2)式成立,所以现价 P 是由

$$P = S / (1 + in) \quad (1.17)$$

来求得,这时若设折扣费用为 D , 则

$$D = S - P = Sin / (1 + in)$$

这是与(1.1)相等的。

当这个方法在损害赔偿和破产等法律上的折扣计算中使用时,这时称这个方法为 Hoffman 方法。

(2) 由折扣率产生的折扣法,这个方法有时称为银行折扣法,由于在这个方法中,日期收支金额是由利息前支付单利法产生的本利合计,所以这个方法所考虑的是本金的现价,它是求现价的方法。因此,由于在日期收支金额 S , 折扣率 d , 期间数 n , 现价 P 之间有(1.4)式成立,所以现价 P 是由

$$P = S(1 - dn)$$

求得的。这时的折扣费用 D 是用(1.3)式表示。

在银行折扣法和真折扣法中将折扣费用 $i=d$ 做比较, 因为 $Sin / (1 + in) < Sdn$, 所以可以知道银行折扣法中的折扣费用比真折

扣法中的折扣费用要大些。

由复利产生的现价

(1) 由利率产生的折扣法,在这种方法中,日期收支金额是由利息后支付复利法产生的本利合计,所以,这个方法所考虑的是本金的现价,它是求现价的方法。因此,由于在日期收支金额,后支付利率 i , 期间数 n , 现价 P 之间的(1.5)式成立,所以现价 P 是由

$$P = S/(1+i)^n = S(1+i)^{-n} \quad (1.18)$$

求得的,这时的折扣费用 D 是 $D = S - P = S\{1 - (1+i)^{-n}\}$ 这是与(1.6)相同的。

$(1+i)^{-n}$ 称为复利现价率(在 JIS 用语中称为现价系数)。对于各种 i 和 n 通过复利现价率的表示可以制作复利现价表。

(2) 由折扣率产生的折扣法,在这个方法中,日期收支金额是由利息前支付复利法产生的本利合计,这个方法所考虑的是本金的现价,它是求现价的方法。这时,在日期收支金额 S , 折扣率 d , 期间数 n , 现价 P 之间有(1.15)式成立,所以现价 P 是由

$$P = S(1-d)^n$$

求得的。这时的折扣费用 D 是 $D = S\{1 - (1-d)^n\}$, 它与(1.16)式相等。

要比较由利率产生的复利折扣法中的折扣费用和折扣率的大小,假设 $i=d$, 因为 $(1+i)^{-n} > (1-d)^n$, 所以前者比较大。

例题 1 把退休金为 6% 的一部分以半年一期的复利存入银行中,为了在九年九个月后取出 10 000 000 元,现在存入多少才行呢?其中假定对于零头期间单利法是适用的。

解 当复利终价为 10 000 000 元时,应使用由利率产生的折扣法计算复利现价 P 。因为在零头期间中单利法适用时的复利终价和复利现价之间有(1.8)式成立,所以 P 是

$$P = S(1+i)^{-p}/(i+q)$$

在这个式子中,假设 $i=0.06/2$, $p=9.5 \times 2=19$, $q=3/6=0.5$, 使