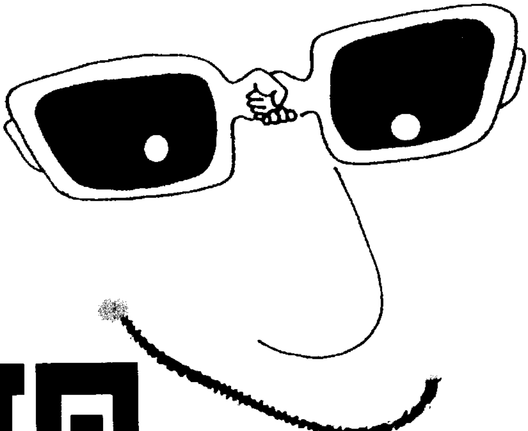
发现的方法



发现的方法

脑开发丛书

申建春 编著

湖南人民出版社

图书在版编目(C I P)数据

发现的方法/ 申建春编著.—长沙:湖南人民出版社,2002.3

("脑开发"丛书)

ISBN 7-5438-2823-5

Ⅰ.发...　Ⅱ.申...　Ⅲ.创造发明-方法-青少年读物　Ⅳ.G305-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 001514 号

责任编辑:曹有鹏

装帧设计:虢　剑

发现的方法

申建春　编著

*

湖南人民出版社出版、发行

(长沙市展览馆路 66 号　邮编:410005)

湖南省新华书店经销　湖南东方速印科技股份有限公司印刷

2002 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:5

字数:84,000　印数:1-6,000

ISBN7-5438-2823-5

G·620　定价:8.00 元

出版前言

轻轻松松上北大，轻轻松松上清华，甚至轻轻松松上哈佛，你相信有这样的事吗?

学习是否轻松，每个学子都心中有数。所谓轻松学习，无非是一要培养学习的兴趣，二要掌握学习的方法。有了学习兴趣，掌握了学习方法，学习起来，自然就会轻松。

“谁知道如何学习，谁就有丰富的知识。”这是美国的教育家亚当斯先生在《论教育》一书中的一句名言。他所指的如何学习，实际上也关涉到学习方法的问题。掌握了学习方法，就会获得丰富的知识，有了丰富的知识，上北大、清华，甚至哈佛，也就不会是梦想，而且，这梦还做得轻松着哩!

掌握学习方法是如此的重要，因此，为帮助正在求学途中的莘莘学子，我们出版了这套“脑开发”丛书，其目的和宗旨，也是为学子们提供最佳的学习方法。

这套丛书第一辑有五种，它们是：《发现的方

法》、《观察的方法》、《证明的方法》、《阅读的方法》和《表达的方法》。撰写这五本书的作者，或为大学教授，或为教育研究工作者，他们对学习方法均有自己的独特感悟。我们也期望这五本书是五把金钥匙，能帮学子们开启智慧的宝库，获得丰富的知识。

湖南人民出版社
辞书编辑室
2001 年 12 月

目　录

多试数据

我们先来做个数字游戏，任意给出一个自然数 n（$n>1$），如果 n 是偶数，下一步就除以 2；如果 n 是奇数，下一步就变为 $3n+1$. 按照这两条规则，不断地变换下去，总可以得到数 1.

例如，给出数 7，则：

$7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$.

再给出数 38，则有：

$38\to19\to58\to29\to88\to44\to22\cdots\cdots$，下面的过程与上面一致了.

还可以举出许许多多的例子，于是，有人可能会想到：是不是每一个正整数按照这样的规则演算下去，最终都能得到 1 呢？这个游戏首先是由日本数学家角谷提出的. 角谷猜想按照上面的两条规则演算，对任何自然数 n（$n>1$），最后得到的结果总是 1. 因此，我们把这个猜想称为角谷猜想.

有人已算到 $n=1\ 099\ 511\ 627\ 776$ 这样大的数，

猜想都是正确的．岁月悠悠，至今还是没有人从理论上给出严格的证明．

这是角谷在做数字游戏时，通过试验一些数据，得到了别人所没有发现的结论，足可见角谷对数字的钟情，对试验的钟爱．也许，就是在无意的游戏中，只要按照某些规则进行，会使你有惊人的发现．

法国业余数学家费尔马（1601—1665）是一位富有传奇色彩的数学家．他最初学习法律，并以当律师为谋生之道，后来成为议会会员，数学只不过是他的业余爱好，只能利用空闲时间研究．费尔马虽年近30才认真地研究数学，但他在数论、微积分等方面做出了一流的贡献．他与笛卡儿几乎同时创立了解析几何，也是17世纪兴起的概率论的探索者之一．

费尔马特别爱好数论，提出过许多定理，也提出了一些猜想．他的猜想，几乎也是通过试验数据得出来的．

例如：若 $f(n)=2^{2^n}+1$（n 是非负整数），他计算了 $n=0，1，2，3，4$ 时，$f(n)$ 的值分别是：

$$f(0)=2^{2^0}+1=3，f(1)=2^{2^1}+1=5，$$

$$f(2)=2^{2^2}+1=17，f(3)=2^{2^3}+1=257．$$

$$f(4)=2^{2^4}+1=65\,537．$$

费尔马于1640年提出猜想：$f(n)=2^{2^n}+1$（n 是非负整数）是素数（质数）.

费尔马的这个猜想提出近100年后，1732年，瑞士数学家欧拉（1707—1783）却举出了一个反例：

$f(5)=2^{2^5}+1=641\times 6\,700\,417$，推翻了 $f(n)$ 一定是素数的猜想.

当时，费尔马提出了 $f(n)$ 是素数的猜想，人们不能从理论上给予证明，那么，就可以思考——如果能够举出一个反例，说明 $f(n)$ 不是素数，则猜想就不需要证明了. 要举反例，就得沿着费尔马的思路，再试验一个或几个数据，看看有什么样的结论. 这里，试验数据又派上了用场.

大数学家们就是通过这样平凡的试验数据，得到了一个又一个伟大的发现. 对我们中学生来说，试验数据，也是学习的利器，发现解题方法的捷径，提高学习成绩的手段.

例 1 若 n 是自然数，n^4-3n^2+9 是质数还是合数？

同学们见到该题，一时难以下定论. 不要急，先取一些数据试试看.

$n=1$ 时，$n^4-3n^2+9=7$ 是质数；

$n=2$ 时，$n^4-3n^2+9=13$ 是质数.

至此，你若认为不管 n 取什么自然数，n^4-

$3n^2+9$ 都一定是质数的话，那就错了！怎么办？不妨再取一些数据试试，看看结论如何．

$n=3$ 时，$n^4-3n^2+9=63=9\times7$ 是合数；

$n=4$ 时，$n^4-3n^2+9=31\times7$ 是合数．

至此，你如果认为只要 n 取不小于 3 的自然数，n^4-3n^2+9 的合数，这种猜测是大胆的，值得赞赏，但还不能确定猜测到底是否正确．因为，尽管试验了两个数据是对的，并不意味着对所有不小于 3 的自然数都对，还需要从一般性情形上加以论证．这时，需要对 n^4-3n^2+9 进行恒等变换．

$$\begin{aligned} n^4-3n^2+9 &= (n^4+6n^2+9)-9n^2 \\ &= (n^2+3)^2-(3n)^2 \\ &= (n^2-3n+3)(n^2+3n+3) \end{aligned}$$

显然，当 $n>2$ 时，n^2-3n+3 及 n^2+3n+3 均大于 1，所以 n^4-3n^2+9 是合数．这样，你的猜测是对的啦！

你看，开始试验的两个数据得出的结论与后试验的两个数据得出的结论截然相反．有人会说，我如果先试验的 n 的值不是 1 或 2，而是 3，首先得到的结论是合数，也不能发现结论．从这里，我们就得到一点启发——试验所取的数据，一定要能够包含问题中字母取值范围内的所有情形，不然，就要多试验几个数据，才可能发现正确答案．

从封建社会的科举考试到今天，已有 1000 多年的历史了．到了 20 世纪 80 年代，我们又学习洋

人考试题的玩艺儿——选择题，以至于我国的小学、中学乃至大学的各个阶段的考试中，大量的选择题呈现在莘莘学子面前．解答选择题时，只要从给定的 A、B、C、D 等几个选项中选出正确答案的号码，而不需要叙述你思考的过程．因此，我们就可以用试验数据的方法，筛掉不符合题意的选项，从而确定符合题意的答案．

例 2 若 $\sin\alpha > \tan\alpha > \cot\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha \in$（　　）．

(A) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

(C) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$　　(D) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

若从 $\sin\alpha > \tan\alpha > \cot\alpha$ 中解出 α 的取值范围，真不好做，那就暂时放弃这个想法吧．在 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 内，取一些数据试验，看能否发现答案．

取 $\alpha = -\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$，且满足 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) > \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) > \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，这时，$-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$，且 $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$．由于答案是惟一的，选（A）还是选（B）呢？再试验一个数据吧．

在 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ 内取 $\alpha = -\frac{\pi}{3}$，则不能满足 $\sin\alpha > \tan\alpha > \cot\alpha$，说明（A）不成立，所以

选（B）.

在上述两次试验中，第一次是从满足已知条件的值是否满足选项入手，第二次是从满足某个选项的值看是否满足已知条件入手.

有些填空题，字母很多，有点烦人. 但如果对字母取些值试验，而且多试验几个数据，也能化繁为简，发现要填的结论.

例 3 已知 $x<y<0$，设 $M=|x|$，$N=|y|$，$P=\frac{|x+y|}{2}$，$Q=\sqrt{xy}$，用“<”连接 M、N、P、Q 的大小关系是（　　）.

为了便于找到答案，令 $x=-4$，$y=-1$，那么 $M=4$，$N=1$，$P=2.5$，$Q=2$. 显然 $N<Q<P<M$. 这个结论正确么？再验证一组数据：

令 $x=-9$，$y=-4$，则 $M=9$，$N=4$，$P=6.5$，$Q=6$，同样有 $N<Q<P<M$.

此时，可放心填上 $N<Q<P<M$ 了.

对于填空题或选择题，取几个数据试验，可轻而易举地得到了结论.

事实上，对于例 3，如果要写出过程，并不很难.

因为 $x<y<0$，所以 $-x>-y$，$M=-x$，$N=-y$，$P=\frac{-x-y}{2}$，

$Q=\sqrt{(-x)(-y)}=\sqrt{xy}$，则 $N<P<M$，$N<Q<M$.

又由于$\frac{-x-y}{2} > \sqrt{(-x)(-y)} = Q$，因此，$N < Q < P < M$.

有一次，几个小学生朋友问我这样一个问题：

求 $A = \underbrace{999\cdots999}_{2000个9} \times \underbrace{999\cdots999}_{2000个9}$的各位数字之和.

这题对中学生朋友来说是“小菜一碟”，因为由 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$，就可以得到：

$(10^{2000}-1) \times (10^{2000}-1) = (10^{2000}-1)^2 = 10^{4000} - 2\times 10^{2000} + 1 = \underbrace{999\cdots999}_{1999个9}8\underbrace{000\cdots00}_{1999个0}1$.

从而 A 的各位数字的和是：$9\times 1999 + 8 + 1 = 18000$.

但对小学生不能这样讲呀．于是，我要他们先计算：$9\times 9 = 81$，$99\times 99 = 9801$．然后，问他们：从这两个算式中，能够发现一点什么规律么？他们说，后一个积中的 8 和 1 之间多了一个 0，8 前面多了一个 9．有点眉目了，但规律还不清晰，我继续要他们借助计算器计算：

$999\times 999 = 998\ 001$，$9\ 999\times 9\ 999 = 99\ 980\ 001$.

这时，我提出不准用计算器，能够看出 $99\ 999\times 99\ 999$ 的答案么？他们都睁大眼睛，盯着前面的四个算式，认真思索，终于从中发现了积的规律：积中 9 的个数与 0 的个数一样多，而且比一个因数的位数少 1，8 和 1 只出现一次．他们一齐欢呼：

$$A=\underbrace{999\cdots999}_{2000\text{个}9}\times\underbrace{999\cdots999}_{2000\text{个}9}=\underbrace{999\cdots99}_{1999\text{个}9}8\underbrace{000\cdots00}_{1999\text{个}0}1.$$

那么要计算各位数字的积就轻而易举了.

无数的数学发现证明，试验数据是数学发现的成功之道．只要勤于试验，也许惊奇的发现就在你眼前.

反复实验

1998年冬天，老家下了一场大雪．我从城里回乡休假，欣赏了一群小孩玩雪人的游戏．

几个小朋友首先用木耙将操坪四周像棉花似的雪堆积在一起．然后，他们将雪堆夯实，准备做一尊雪人．小朋友很快堆成了一个雪人，可嘴巴太大，眼睛太上，鼻子太长．不行！几个人在唧唧喳喳地议论．做好的雪人并不那么像，他们拆了原来已做好的嘴巴、眼睛与鼻子，重新做一遍——不像，又重来．这样反复好几回，直至大家都说“OK”才罢手．他们围着雪人团团转，整整玩了一个上午，不知疲倦，不怕寒冷，乐在其中．

我站在阳台上，看着小朋友反复多次地修改自己的作品，直至成功．我出于——数学教师——数学编辑的职业敏感，认为学数学、搞发明创造，也要反复不断地实验，才可能找到科学的真谛．

电灯的发明，为人们的生活带来了无限的光明，可谓是反复实验的成功之作．

美国1845年的一份专利档案中记载，辛辛那提的斯塔尔提出可以在真空泡内使用碳丝．英国的斯旺按照这种方法，用碳化纸作灯丝．由于当时的技术很差，质量上不去，灯丝很快就烧断了，灯泡的寿命很短，只有个把小时，没有实用价值．

1879年，爱迪生开始投入了对电灯的研究．要延长灯泡的使用寿命，关键是提高灯泡的真空度，采用耗电少、发光强且价格便宜又耐热的材料作灯丝．

爱迪生先后实验了1600多种耐热材料，结果都不理想．1879年10月21日，他采用碳化棉线作灯丝，将这种灯丝放入玻璃球内，再启动抽气机，将球内抽成真空．结果碳化棉灯丝发出的光明亮而稳定，足足用了10多个小时．就这样，碳化棉灯丝诞生了，爱迪生也获得了专利．

虽然爱迪生的发明比原来的灯丝使用寿命大大提高了，但使用寿命还是不够长．爱迪生没有停步，继续寻找比碳化棉灯丝更持久的耐热材料．1880年，爱迪生又研制出了碳化竹灯丝，使灯丝的使用寿命更长．

围绕延长灯丝的使用寿命的研究还是没有停止，到1908年，美国发明家库利奇才发明现代的钨丝灯泡．

一个小小灯泡钨丝的发明创造，是一场接力赛．如果没有几代人的努力，如果没有爱迪生那样