统一的现代数学

第四册第二分册

美国中学数学课程改革研究组编

人民教育出版社

内 容 提 要

《统一的现代数学》是美国中学数学课程改革研究组编的一套中学数学现代化课本. 全书共六册十二分册, 内容除有一定的初等数学外, 还包括集论、数理逻辑、近世代数、微积分、概率论、程序设计、线性规划等基本知识, 并用现代数学的结构思想作了统一处理.

本书系内部参考资料, 供研究外国中学数学教材用. 这套课本对我们了解国外中学数学现代的动态, 研究用现代数学观点处理中学数学教材有一定参考价值. 但对这套课本内容中渗透的资产阶级思想意识应当注意分析批判.

本分册是按该书第四册第二分册 1971 年版译出的, 包括向量代数、线性规划、序列和级数、指数和对数函数、向量空间和子空间等五章.

统一的现代数学

第四册 第二分册

美国中学数学课程改革研究组编

曹才翰 译 吴望名 校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1977 年 11 月第 1 版 1978 年 12 月第 1 次印刷

书号 13012·087 定价 0.45 元

(内部发行)

目　录

第五章　向量代数

5.0 引　　言

“向量”这个词有许多意义．对于计算机运算者它能看作数的集合而被输送到计算机内，对于气象工作者研究温度 t，湿度 h，压力 p 和污染要素 f，它能看作数 t, h, p 和 f 的四元组，对于科学家研究气体，感兴趣的是气体的温度 t，压力 p 和体积 v，于是它能看作和气体的一种状态相关的数 t, p 和 v 的三元组．当你使用数对去找出平面上的一个点时，或用数的三元组去找出空间内一个点时，你可以把这个数对或三元组叫做向量．

当 n 是任意自然数时，包含 n 个数的向量叫做 n 元组．对于 n 等于2，3或 4 时，我们就分别称它为数对（或数偶），三元组或四元组．一个气象工作者把收集到的三个数据按照某种次序写出，譬如说先写 t，然后写 p，最后写 f，这样，当他看到三元组(72, 30.02, 5)时，他就知道，温度是 72，压力是 32.02 以及污染要素是 5．这样做是比较方便的．指定（任意）一种顺序于 n 个数时，它就变为有序 n 元组并且可以写为$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$．在这个记法中，括号说明由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的集合已规定了顺序．

在这一章中，我们研究的数的 n 元组是数学向量①．其意义是对这 n 元组定义了一种加法并且定义了这 n 元组被实数相乘的乘法．例如，实数对(a_1, a_2)和(b_1, b_2)是数学向量，我们能根据规则

$$(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$$

① 本章以后提到的“向量”通常是指“数学向量”，一个向量实际上是一个有序 n 元组，这里及以后的讨论中，课文中提到的 n 元组指的是有序 n 元组．——译校者

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

把它们加起来，以及我们能根据规则

$$c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$$

把(a_1, a_2)和 c 相乘，这里 c 也是一个实数.

我们能根据平行四边形画出加法，图 5.1.

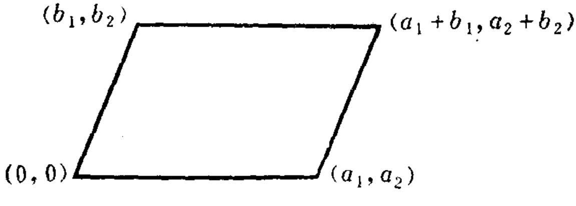


图 5.1

(这将在 5.3 节中来解释)

我们也能根据中心在 $O(0,0)$ 以及它的纯量因子 c 的伸缩来画出乘法，图 5.2.

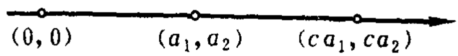


图 5.2

(这将在 5.1 节中来解释)

注意(a_1, a_2)可以看作一行两列矩阵，或$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$可以看作一列两行矩阵. 它们都在 R 上，并且向量上的两个运算规则可以看作 1×2 或 2×1 矩阵上相应的运算规则的特殊情况.

我们常常把向量运算用几何方式作出图来，但现在我们主要感兴趣的是向量代数，即在一个运算系中来研究它们的行为，这类似于我们研究群、环、域时曾做过的那样.

向量的代数结构与几何之间有密切关系. 事实上，我们把这个结构叫做"空间"，向量本身叫做点而向量的某个集合叫做"直线"，而另一些集合叫做"平面". 这一章的实际本质是代数的，但是通常隐藏的几何直观更使人喜爱，并且甚至可以启发本质方面的某些困惑之处.

由于一个数对是笛卡儿乘积 $R \times R$ 的一个元素，故把所有这样的数对的集合叫做 R^2 是合适的. 类似的向量 (a_1, a_2, a_3) 属于 R^3. 一般地，向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 属于 R^n，并且说这个向量具有 n 个分量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 只有一个分量的向量集合是 R^1，它可以看作与实数集 R 等同. 在 R 中的数叫做纯量.

数学向量首先是由物理向量受到启发的. “向量”这个词按拉丁字母的意思是指传输者. 这是物理向量的本质. 物理向量表示力、流量、位移、速度以及类似的量. 它们都可以用既有方向又有大小（长度）的箭头表示. 借助于数学向量可以加深理解物理向量，不仅如此，而且数学向量还可以说明许多科学分支，并对数学本身的发展也是非常有用的.

在 R^2 中向量的图象将借助于轴来显示，而这些轴不必是垂直的. 这些轴也不必用相同的长度单位来刻度. 也就是说，R^2 是一类二维仿射空间. 类似地，R^3 是一类三维仿射空间，用这种专门术语继续去描述 R^n 是一类 n 维仿射空间，甚至空间这个词已经失去了它原来的几何意义. 今后，我们将研究轴是互相垂直的且有相同坐标单位刻度的坐标系中的向量，这种空间叫做欧几里德空间，并可记作 E^n，以此来代替 R^n.

5.1 纯量乘法和向量直线

我们用这样的小写字母 h, l, x, y 来记作纯量，而用这样的大写字母 A, B, X, Y 来记作向量. 只是由零组成的向量称为零向量，并记作 $\bar{0}$. 用几何的说法，$\bar{0}$ 是 O，即是坐标系的原点.

一个向量被一个纯量相乘的定义是一个矩阵被一个纯量相乘的特殊情况.

定义 1 对于所有的纯量 $k \in R$ 和向量 $A \in R^n$，这里

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$$kA=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

这种运算正如大家所知道的是纯量乘法. 注意积 kA 总是一个和 A 具有相同个数分量的向量, 它不是纯量.

例 1 在 R^2 中 $6(3,-4)=(18,-24)$

在 R^3 中 $-3\left(2,0,-\frac{1}{3}\right)=(-6,0,1)$

在 R^4 中 $0(1,2,3,4)=(0,0,0,0)$

在 R^5 中 $1(3,1,4,5,9)=(3,1,4,5,9)$

令向量 $A=(3,2)$, 并且对所有的 t 值考察 tA. 某些积在表 5.1 中表示出来:

表 5.1

t	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{5}$
tA	$(-6,-4)$	$(-3,-2)$	$(0,0)$	$(3,2)$	$(6,4)$	$(3\sqrt{5},2\sqrt{5})$

所有乘积的集合能记作

$$\{X:\quad X=t(3,2),\ t\in R\}$$

我们说这个集合是由 $(3,2)$ 生成(引伸)的. 这个向量集合是向量直线的一个例子.

令 $B=(1,4,2)$. 由 B 生成的某些向量在表 5.2 中表示出来:

表 5.2

t	-2	-1	0	1	2
tB	$(-2,-8,-4)$	$(-1,-4,-2)$	$(0,0,0)$	$(1,4,2)$	$(2,8,4)$

这个集合能记作:

$$\{X:\quad X=t(1,4,2),\quad t\in R\}$$

这也是向量直线的一个例子.

我们已经看到 R^2 和 R^3 中的向量直线的例子，现在要进一步推广到 R^n. 令 C 是非零向量，集合 $\{X: \quad X=tC, t\in R\}$ 是一条向量直线. 在“向量直线”一词中，使用“直线”是有几何解释的. 对于 $A=(3,2)$，当我们试图把这个向量当作一个点时，这就如图 5.3 所表示的. 这个图象是方程为 $x_2=\dfrac{2}{3}x_1$ 的直线. 研究和表 5.1 关联的图象.

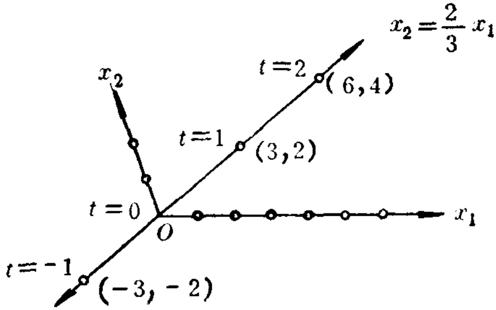


图 5.3

对于 $B=(1,4,2)$，其图象仍然是关于 3 维坐标系的一条直线，看图 5.4.

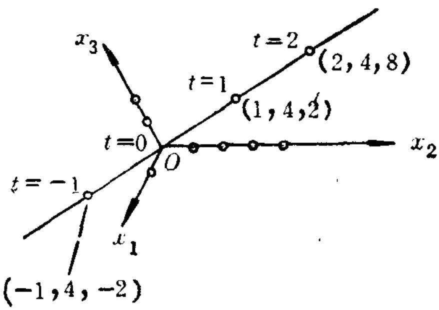


图 5.4

很自然，当推广到 R^n 时，我们说在 R^n 中的一条向量直线的图象是“直线”，即便其意义已经不是原来的意义了.

我们将要准确地来定义两个向量间的相等.

定义 2 令 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 那么 $A=B$ 当且仅当 $a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n$.

重要的是要看到零向量是属于所有的向量直线. 这个事实不是从图象中得出的，而是从 $t=0$ 时有

$$t(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(0, 0, \cdots, 0)=\bar{0}$$

得出的. 应当注意，定义 2 只能应用于具有相同个数分量的向量，同时，$\bar{0}$, A 和 kA 都在同一条向量直线上.

在前几册中，我们已经定义了平面内的伸缩是具有规则

$$(x, y)\to(kx, ky) \qquad (k\neq 0)$$

的一个变换，按纯量乘法的定义，这一规则可以写作

$$(x, y)\to k(x, y)$$

于是我们可以说，(3, 2)在伸缩下的象添上(0, 0)所成的集合构成向量直线.

上述关于伸缩的说法暗示着关于伸缩的一般定义如下：令 A 是 R^n 内的一个向量，且 $k\neq 0$，那么 R^n 到 R^n 的伸缩具有规则

$$A\to kA$$

在进一步研究向量直线之前，我们先来证明一些关于纯量乘法的定理. 假如一个向量 A，我们希望去乘两个纯量 k 和 l，那么就有两种可能：或者 $k(lA)$ 或者 $(kl)A$. 然而我们有

定理 1 对于所有的纯量 k 和 l 以及所有的 R^n 内的向量 A，有

$$k(lA)=(kl)A$$

证 留作练习(令 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 且利用定义 1 和 2).

定理 2 对于所有在 R^n 内的向量 A，有 $1\cdot A=A$.

证 留作练习.

定理 3 若 A 是 R^n 内的一个向量，那么 $kA=\bar{0}$ 当且仅当 $k=0$ 或 $A=\bar{0}$.

要证两个语句:

(1) 若 $k=0$ 或 $A=\bar{0}$,那么 $kA=\bar{0}$,

(2) 若 $kA=\bar{0}$,那么 $k=0$ 或 $A=\bar{0}$.

证明

(1) 若 $k=0$,那么

$$k\cdot A=0\cdot A=(0\cdot a_1,0\cdot a_2,\cdots,0\cdot a_n)=(0,\cdots,0)=\bar{0}.$$

若 $A=\bar{0}$,那么 $kA=k(0,0,\cdots,0)=(k\cdot 0,k\cdot 0,\cdots,k\cdot 0)=\bar{0}$.

(2)的证明留作练习.

定理 4 若 $kA=kB$,这里 $A,B\in R^n$,且 $k\neq 0$,那么 $A=B$.

证 留作练习.

提示:令 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,根据假设和定义 1,$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)=(kb_1,kb_2,\cdots,kb_n)$.

利用定理 1—4 可以证明一些关于向量直线的定理.

定理 5 令 A 和 B 都是非零向量,令 $\alpha=\{X:\quad X=tA,t\in R\}$ 是一个向量直线,那么 B 在 α 内当且仅当存在一个纯量 k,满足

$$B=kA$$

这个定理可直接从向量直线的定义证明.

定理 5 告诉我们怎样去检验已知向量 B 是否是向量直线 α 的一个元素. 例如 $B=(1,2,3)$ 不在 $\alpha=\{X:X=t(2,4,4)\}$ 内,这是因为我们不能找到这样一个 t 使得 $(1,2,3)=t(2,4,4)$(为什么?).可是 $C=(5,10,10)$ 是在向量直线上. (为什么?)

推论 假如 B 在 α 内且 $B\neq\bar{0}$, 那么 A 和 B 生成同样的向量直线.

证 根据假设,有一个 r,使得 $B=rA$,由于 $B\neq\bar{0}$ 且 $A\neq\bar{0}$,那么 $r\neq 0$,因此 $A=\frac{1}{r}B$, $tA=\frac{t}{r}B$, 令 $\frac{t}{r}=s$,那么

$$\{X:\quad X=tA,\quad t\in R\}=\{X:\quad X=sB,\quad s\in R\}$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

定理 6 假如 A 和 B 都是非零向量，B 不在

$$\alpha=\{X:\quad X=t_1A,\ \ t_1\in R\}$$

内，且

$$\beta=\{X:\quad X=t_2B,\ \ t_2\in R\}$$

那么 α 和 β 只有 $\bar{0}$ 是公共的.

证 取 $t_1=t_2=0$ 可知，α 和 β 具有 $\bar{0}$ 为公共的. 假如还有另一个向量 C 为 α 和 β 的公共向量，根据定理 5 推论，C 既生成 α 又生成 β，这就推出 B 在 α 内——矛盾，因此 α 和 β 只有 $\bar{0}$ 是公共的.

令 $A=(1,-2)$，且令 $\alpha=\{X:\quad X=t(1,-2),\ t\in R\}$ 是由 A 生成的向量直线. 那么这个纯量 t，它遍历 R，称为参数. 并且方程

$$X=t(1,-2)$$

叫做 α 的参数表达式，或关于 α 的参数方程. 这个方程的其它的等价形式是：

$$(x_1,x_2)=t(1,-2)\ \text{或}\ (x_1,x_2)=(t,-2t)$$

根据分量的相等性，我们就得到两个线性方程

$$x_1=t\quad \text{和}\quad x_2=-2t$$

例 2 求由 $(1,2,-3)$ 生成的向量直线的参数方程.

解 这条向量直线是 $\{X:\quad X=t(1,2,-3),\ \ t\in R\}$，它的参数表达式或参数方程是 $X=t(1,2,-3)$

或

$$(x_1,x_2,x_3)=(t,2t,-3t)$$

它也可以写为三个方程：$x_1=t$，$x_2=2t$，$x_3=-3t$.

下面的例子是要说明如何去解包括向量的简单方程.

例 3 对于 (x,y,z)，解 $(x-1,y+3,z-5)=2(1,3,2)$.

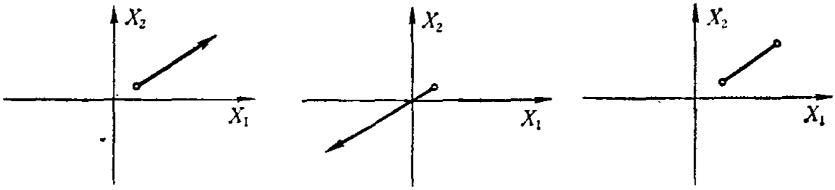
解 $(x-1,y+3,z-5)=(2,6,4)$

$x-1=2$，$y+3=6$，$z-5=4$（为什么？）

$x=3$，$y=3$，$z=9$，或 $(x,y,z)=(3,3,9)$.

例 4 令 $\alpha=\{X:\quad X=tA,\ \ t\in R\}$ 是一条向量直线，那么由 A 生成的，对于某个固定的 a，只取满足 $t\geqslant a$（或 $t\leqslant a$）这样的 t 所

成的向量集合，构成了 α 的向量射线. 而对于满足 $a\leqslant t\leqslant b$ 这样的 t, A 生成的向量集合构成 α 的向量线段. (参看图 5.5)



$t\geqslant a$　　　　$t\leqslant a$　　　　$a\leqslant t\leqslant b$

图　5.5

5.2 练　　习

1. 对下列各题做乘法:

(a) $3(-1,2)$　　　　(b) $-2(0,2,-1)$

(c) $0(4,2,3,1)$　　　　(d) $\frac{1}{2}(6,-8,0)$

(e) $\frac{3}{4}(8,6,-2)$　　　　(f) $\sqrt{2}(0,1,\sqrt{2})$

2. 对于下列每个向量直线，求出属于向量直线的四个向量:

(a) $\{X:\ X=t\left(8,-\frac{1}{2}\right),\ t\in R\}$

(b) $\{X:\ X=t(0,2,-4),\ t\in R\}$

(c) $\{Y:\ Y=s(8,2,-1,0),\ s\in R\}$

(d) $\{Z:\ Z=r(3),\ r\in R\}$

3. 画出下列每条向量直线的图象:

(a) $\{X:\ X=t(-1,3),\ t\in R\}$

(b) $\{Y:\ Y=t(2,1,2),\ t\in R\}$

4. 描述下列每条向量直线的子集:

(a) $\{X:\ X=t(4,8),\ t\in R\}$

(b) $\{Y:\ Y=t(3,2,-1),\ t=3\}$

(c) $\{Y:\ Y=s(1),\ s\in R\}$

(d) $\{Z:\ Z=t(3,-1),\ t\geqslant 2\}$

(e) $\{X:\ X=s(4,0,-1),\ 0\leqslant s\leqslant 2\}$

(f) $\{Z: Z=t(4,0,2,3), t\leqslant 0\}$

5. 描述向量集合$\{X: \quad X=t(0,0), t\in R\}$.

6. 对下述各方程中的所有变量,解方程:

(a) $(x,3,z)=(4,y,z)$

(b) $(x+2,y-1,z+3)=(4,5,6)$

(c) $3(x,2,4)=2(8,z,y)$

(d) $4(x_1,3,x_3,5)=3(6,x_2,9,x_4)$

(e) $(a+3,b-4)=(b,2a)$

7. (a) 证明定理 1, (b) 证明定理 2.

8. 完成定理 3 的证明.

9. 完成定理 4 的证明.

10. 用集合的记号指出由下述向量生成的向量直线:

(a) $A=(3,5)$　　(b) $B=(0,1,3)$

(c) (c_1,c_2,c_3)　　(d) $D=(-2,0,5,2)$

11. 对于$-A$想出一种包含变换的解释,这里A是一个非零向量.

12. 对于语句$k(lA)=(kl)A$.想出一种几何解释.(提示: 利用伸缩的合成)

13. 令$A=(3,-1,2)$用集合记号来描述下述点的集合.

(a) $\overleftrightarrow{OA}$, (b) $\overrightarrow{OA}$, (c) $\overrightarrow{AO}$, (d) $\overline{OA}$.

14. (a) 证明没有一个k满足$(3,2,1)=k(6,4,5)$.

(b) 证明有一个k(并且求出这个k)满足$(3,2,1)=k(30,20,10)$.

(c) 说出有一个k满足$(a,b,c)=k(d,e,f)$的必要充分条件,并把它推广到R^n.

15. 令$A=(2,-3)$和$B(x,y)$,确定是不是生成同一条直线.假如:

(a) $(x,y)=(2,3)$　　(b) $(x,y)=(-2,-3)$

(c) $(x,y)=(-2,3)$　　(d) $(x,y)=(-4,6)$

16. 利用定理 5 去确定给出的向量是否在这条向量直线上:

(a) $A=(1,2)$, $\alpha=\{X: X=t(2,1), t\in R\}$

(b) $B=(4,-2)$, $\beta=\{X: X=t(-2,1), t\in R\}$

17. 对于下述的向量直线用两种形式表示其参数方程:

(a) 由$(3,-1)$生成的直线.

(b) 由$(0,-1,2,-3)$生成的直线.

5.3 向量加法和仿射直线

矩阵加法的定义蕴含了向量加法的定义.

定义 3 令 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 那么

$$A+B=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

应注意只对具有相同数目分量的向量才能相加. 而其和也有同样数目的分量.

例 1 令 $A=(5, 6, -1)$, $B=(3, -2, 0)$, 则

$$A+B=(5+3, 6-2, -1+0)=(8, 4, -1)$$

根据定义 3, 两个在 R^n 内的向量的和在 R^n 内. 因此, $(R^n, +)$ 是一个运算系. 从这个定义也能很容易证明向量的加法有结合性和交换性. 这个系统有个加法单位元, 它就是$(0, 0, \cdots 0)$. 在 R^n 内的每个向量 A 都有一个加法逆元, 也在 R^n 内, 它就是 $-A$. 假如 $A=(a_1, a_2, \cdots a_n)$, 那么 $-A=(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$. 从所有这些性质可以得出:

定理 7 $(R^n, +)$是一个交换群.

证 作为练习.

加法逆元的性质能使我们定义向量减法.

定义 4 对于所有在 R^n 中的向量 A、B, $A-B=A+(-B)$.

例 2 若 $A=(2, 0, -1)$, $B=(-4, 3, 1)$, 则

$$A-B=(2, 0, -1)+(4, -3, -1)=(6, -3, -2)$$

下面定理是向量表达式恒等变形的基础. 注意这与代数表达式恒等变形的基本定理是类似的.

定理 8 令 P, A, B, C, D, X 都是在 R^n 中, 并且令 k 和 l 是任意纯量.

(1) 若 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和 $B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 则

$$A-B=(a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_n-b_n).$$

(2) $A-B=-(B-A)$.

(3) $k(A+B)=kA+kB$.

(4) $(k+l)A=kA+lA$.

(5) $A-\bar{0}=A$.

(6) $\bar{0}-A=-A$.

(7) $A-A=\bar{0}$.

(8) $A-(B+C)=A-B-C$.

(9) $A-(B-C)=A-B+C$.

(10) $X+A=B$ 当且仅当 $X=B-A$.

(11) $B-A=D-C$ 当且仅当 $B+C=A+D$.

作为示范，我们给出(3)的证明，其它的证明可仿照作出.

证(3) 令 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=(b_1,b_2\cdots,b_n)$.

$$\begin{aligned}k(A+B)&=k(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\\&=(k(a_1+b_1),k(a_2+b_2),\cdots,k(a_n+b_n)).\\&=(ka_1+kb_1,ka_2+kb_2,\cdots,ka_n+kb_n)\\&=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)+(kb_1,kb_2,\cdots,kb_n)\\&=kA+kB.\ (\text{为什么？})\end{aligned}$$

例3 若 $3(X+B)=4A-X$，解 X. 这里 A, X, B 都是向量.

解 $3X+3B=4A-X$ (定理 8(3))

$3X+X=4A-3B$ (定理 8(11))

$4X=4A-3B$ (定理 8(4))

$X=A-\frac{3}{4}B$ (定理 1,2,8(4))

若 $A=(1,0,3)$, $B=(2,-1,4)$. X是什么？

解 $X=(1,0,3)-\frac{3}{4}(2,-1,4)$

$$=(1,0,3)+\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4},-3\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4},0\right)$$

现在我们再回到向量加法的几何解释. 令

$$A=(3,2),\qquad B=(-1,4)$$

如图 5.6 所示. 假如 $C=A+B$,那么

$$C=(3,2)+(-1,4)=(2,6)$$

线段$\overline{OC}$ 的中点是(1,3). 它也是 $\overline{AB}$ 的中点. 因此, $OACB$ 是一个平行四边形.(为什么?)

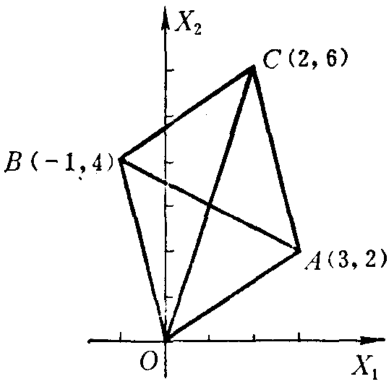


图 5.6

因此,和 $C=(A+B)$是从 O 发出的对角线的端点.

对于 R^2 和 R^3 内的所有向量,这个断语的一般情形是容易证明的. 对 R^3,令 $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$. 那么

$$C=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

根据中点公式,$\overline{AB}$ 的中点有坐标 $\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

这也是$\overline{OC}$ 的中点. 由于 $OACB$ 的对角线互相平分,故 $OACB$ 是一个平行四边形. 因而$\overleftrightarrow{OA}\parallel\overleftrightarrow{BC}$. 且 $OA=BC$(同时 $\overleftrightarrow{OB}\parallel\overleftrightarrow{AC}$, 且 $OB=AC$). 因此,我们可以把 C 看做使 O 映上到 A 的平移映射下

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com